山东大学学报(理学版)2024 年 2 月 第 59 卷 第 2 期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.59, No.2, 2024

E-mail:xblxb@ sdu.edu.cn
http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn
Tel:+86-531-88366917

文章编号:1671-9352(2024)02-0022-10　　DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2022.470

关于 w-IFP-平坦模与 w-IFP-内射模

周柳,乔磊*,赵丹
(四川师范大学数学科学学院, 四川 成都 610066)

摘要:利用交换环上的 w-模理论对 IFP-平坦模与 IFP-内射模进行 w-模化研究。引入交换环上 w-IFP-平坦模与 w-IFP-内射模的概念,并讨论它们的一些性质和等价刻画。
关键词:w-IFP-平坦模;w-IFP-内射模;w-PFP 环
中图分类号:O153.3　　**文献标志码**:A
引用格式:周柳,乔磊,赵丹.关于 w-IFP-平坦模与 w-IFP-内射模[J]. 山东大学学报(理学版),2024,59(2):22-31.

On w-IFP-flat modules and w-IFP-injective modules

ZHOU Liu, QIAO Lei*, ZHAO Dan
(School of Mathematical Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, Sichuan, China)

Abstract: The w-module theoretic analogues of IFP-flat modules and IFP-injective modules are studied in terms of w-module theory over commutative rings. The concepts of w-IFP-flat modules and w-IFP-injective modules over commutative rings are introduced and several characterizations and properties of these modules are discussed.
Key words: w-IFP-flat module; w-IFP-injective module; w-PFP ring

1　引言与预备知识

未作特别声明时,本文所提到的环均为有单位元的交换环,所有的模都是酉模。特别地,用 R 表示这样一个环。

平坦模和内射模是模理论和同调理论中非常重要的模类,平坦模和内射模的推广也是学者们比较关注的研究内容。2012 年,Lu 和 Liu[1]引入并研究了 IFP-平坦模和 IFP-内射模,证明了 R 是凝聚环,当且仅当 IFP-平坦模是平坦模,当且仅当 IFP-内射模是 FP-内射模;同时,给出了 PFP 环的定义,并利用 IFP-平坦模和 IFP-内射模刻画了 PFP 环。同年,Lu 和 Liu[2]定义了模的 IFP-平坦维数和 IFP-内射维数,给出了模的 IFP-平坦维数和 IFP-内射维数的等价刻画。2014 年,Lu 和 Liu[3]讨论了 IFP-平坦模和 IFP-内射模的局部化性质。

下面回顾一般交换环上 w-模理论($w=(\{\text{GV-挠模}\},\{\text{GV-无挠模}\})$是遗传挠理论)的相关知识。

设 J 是 R 的有限生成理想,若自然同态 $\varphi: R\to J^{*}=\mathrm{Hom}_R(J,R)$ 是同构,则称 J 为 R 的 Glaz−Vasconcelos 理想[4],简称 GV-理想,并记 $J\in \mathrm{GV}(R)$。

设 M 是 R-模,记

$$\mathrm{tor}_{\mathrm{GV}}(M)=\{x\in M \mid \text{存在 } J\in \mathrm{GV}(R),\text{使得 } Jx=0\},$$

收稿日期:2022-09-07; **网络出版时间**:2023-11-30 10:14:43
网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/37.1389.N.20231128.1556.008
第一作者简介:周柳(1996—),女,硕士研究生,研究方向为交换代数和同调代数. E-mail:1526764500@ qq.com
*通信作者简介:乔磊(1987—),男,副研究员,博士,研究方向为交换代数和同调代数. E-mail:lqiao@ sicnu.edu.cn

则有 $\mathrm{tor}_{\mathrm{GV}}(M)$是 M 的子模,称 $\mathrm{tor}_{\mathrm{GV}}(M)$是 M 的完全 GV-挠子模。特别地,若 $\mathrm{tor}_{\mathrm{GV}}(M)=M$,则称 M 是 GV-挠模。若 $\mathrm{tor}_{\mathrm{GV}}(M)=0$,则称 M 是 GV-无挠模[4]。由此可知,若 M 既是 GV-挠模,又是 GV-无挠模,则 $M=0$。

设 M 是 GV-无挠模,若对任意 $J\in \mathrm{GV}(R)$,有 $\mathrm{Ext}_R^1(R/J,M)=0$,则称 M 是 w-模。设 M 是 w-模,N 是 M 的真 w-子模,如果 N 与 M 之间无其他 w-子模,则称 N 是 M 的极大 w-子模。特别地,若环 R 的理想 I 作为 R-模是 w-模,则称 I 是 w-理想。设 m 是 R 的真 w-理想,若除 R 和 m 外没有包含 m 的其他 w-理想,则称 m 是 R 的极大 w-理想。

设 $f:M\to N$ 是 R-模同态,若对 R 的任何极大 w-理想 m,$f_m:M_m\to N_m$ 是单同态(满同态或同构),则称 f 是 w-单同态(w-满同态或 w-同构)[5]。

设 $A\to B\to C$ 是 R-模与同态的序列,若对 R 的任何极大 w-理想 m,$A_m\to B_m\to C_m$ 是正合列,则称序列 $A\to B\to C$是 w-正合列[5]。

设 M 是 R-模,若存在有限生成自由模 F 及 w-正合列 $F\to M\to 0$,则称 M 是有限型模。若存在有限生成自由模 F、F_1 及 w-正合列 $F_1\to F\to M\to 0$,则称 M 是有限表现型模[5]。

若 R 的任何理想都是 w-理想,则称 R 是 DW 环[5]。环 R 是 DW 环,当且仅当 $\mathrm{GV}(R)=\{R\}$,当且仅每个 R-模是 w-模。

对 w-正合列 $0\to A\to B\to C\to 0$ 及任何 R-模 M,若诱导序列 $0\to M\otimes_R A\to M\otimes_R B\to M\otimes_R C\to 0$ 仍是 w-正合列,则称序列 $0\to A\to B\to C\to 0$ 是 w-纯正合列。特别地,若模 A 作为模 B 的子模,且序列 $0\to A\to B\to B/A\to 0$ 是 w-纯正合列,则称 A 是 B 的 w-纯子模[6]。

设 M 是 R-模,令 $L(M)=(M/\mathrm{tor}_{\mathrm{GV}}(M))_w$,若对任意无挠的 w-模 N,有 $\mathrm{Ext}_R^1(L(M),N)$是 GV-挠模,则称 M 是 w-投射模[7]。

若 R 的每个有限型(有限生成)的理想是 w-投射的,则称 R 是 w-遗传环[8]。

设 M 是 R-模,记 $M^{\dagger}=\mathrm{Hom}_R(M,E_0)$ 是 M 的广义特征模,其中 $E_0=\prod\limits_i E(R/m)$,$m$ 是 R 的任意极大w-理想,E_0 是 GV-无挠的内射模[9],且 M 是 GV-挠模当且仅当 $M^{\dagger}=0$。

设 x 为 R 上的未定元,

$$S_w:=\{f\in R[x]\mid c(f)_w=R\}$$

是 $R[x]$的乘法集,记 $R\{x\}=R[x]_{S_w}$,称为 R 的 w-Nagata 环。设 M 是 R-模,相应地,

$$M\{x\}=M[x]_{S_w}=R\{x\}\otimes_R M。$$

设 M 是 R-模,若对任何 w-单同态 $f:A\to B$,诱导同态

$$1\otimes f:M\otimes_R A\to M\otimes_R B$$

仍是 w-单同态,则称 M 是 w-平坦模[10]。对模 M,下列各条等价:(1) M 是 w-平坦模;(2) 对任何 R-模 N,$\mathrm{Tor}_1^R(M,N)$是 GV-挠模;(3) 对任何理想 I,$\mathrm{Tor}_1^R(M,R/I)$是 GV-挠模;(4) 对任何有限生成理想 I,$\mathrm{Tor}_1^R(M,R/I)$是 GV-挠模。

设 $\xi:0\to A\to B\xrightarrow{g}C\to 0$ 是正合列,若存在 $J=(d_1,d_2,\cdots,d_n)\in \mathrm{GV}(R)$,以及 $h_1,h_2,\cdots,h_n\in \mathrm{Hom}_R(C,B)$,使得 $d_k\mathbf{1}_C=gh_k$, $k=1,2,\cdots,n$,则称 ξ 是 w-分裂的正合列。设 M 是 R-模,若存在投射模 F,及满同态 $g:F\to M$,使得正合列 $0\to \mathrm{Ker}(g)\to F\xrightarrow{g}M\to 0$ 是 w-分裂的正合列,则称 M 是 w-分裂模[11]。对于模 M,M 是 w-分裂模当且仅当对任意 R-模 N,$\mathrm{Ext}_R^1(M,N)$是 GV-挠模。由此可见,w-分裂模是 w-投射模。

1997 年,Wang[12]介绍了整环上平坦模 w-模化后所得的 w-平坦模类,这里的 w-平坦模要求是无挠模。随着 Yin[4]把整环上的 w-模理论推广到了一般交换环上,w-平坦模的概念也被 Kim 和 Wang[13]推广到一般交换环上。利用 w-平坦模可刻画 VN 正则环,即 R 是 VN 正则环当且仅当每个 R-模是 w-平坦模[8]。2018 年,Xing 和 Wang[14]引入了绝对 w-纯模,证明了 R 是 VN 正则环当且仅当每个 R-模是绝对 w-纯模。2022 年,吴小英在文献[15]中介绍了相对于 w-算子的内射模,即 iw-分裂模,利用 iw-分裂模刻画了半单环,R 是半单环当且仅当每个 R-模是 iw-分裂模。

鉴于学者们对平坦模和内射模的 w-模化理论研究取得的好结果,本文的目的是对 IFP-平坦模和 IFP-内射模进行 w-模化理论研究。为此,我们首先给出了 w-IFP-平坦模和 w-IFP-内射模的概念(见定义 1),并讨

论 w-IFP-平坦模和 w-IFP-内射模的一些性质和等价刻画。最后,引入并刻画每个有限表现理想是 w-分裂理想的环,称为 w-PFP 环。

2 w-IFP-平坦模与 w-IFP-内射模

首先回顾文献[1]中 IFP-平坦模与 IFP-内射模的概念。称右 R-模 M 是 IFP-平坦模,如果对 R 的任意有限表现左理想 I,有 $\mathrm{Tor}_1^R(M,R/I)=0$;称左 R-模 M 是 IFP-内射模,如果对 R 的任意有限表现左理想 I,有 $\mathrm{Ext}_R^1(R/I,M)=0$。类似地定义:

定义 1 设 M 是 R-模,则:

(1) 如果对 R 的任意有限表现理想 I,有 $\mathrm{Tor}_1^R(M,R/I)$ 是 GV-挠模,则 M 称为 w-IFP-平坦模;

(2) 如果对 R 的任意有限表现理想 I,有 $\mathrm{Ext}_R^1(R/I,M)$ 是 GV-挠模,则 M 称为 w-IFP-内射模。

显然,IFP-平坦模和 w-平坦模都是 w-IFP-平坦模,IFP-内射模和 iw-分裂模都是 w-IFP-内射模。

命题 1 (1) GV-挠模是 w-IFP-平坦模;

(2) GV-挠模是 w-IFP-内射模。

证明 (1) 由于 GV-挠模是 w-平坦模,而 w-平坦模又是 w-IFP-平坦模,因此 GV-挠模是 w-IFP-平坦模。

(2) 由于 I 是有限表现理想,因此 R/I 也是有限表现的,故根据文献[16,引理 2.1(2)],GV-挠模是 w-IFP-内射模。

w-IFP-平坦模不一定是 IFP-平坦模,w-IFP-内射模也不一定是 IFP-内射模。下面通过 2 个例子来说明这个事实。

例 1 设(R,m)是 2 维 Noether 正则局部环,则 m 是 GV-理想,故 $M:=R/m$ 是 GV-挠模, 从而是 w-IFP-平坦模;但 M 不是 IFP-平坦模(平坦模),否则有 M 是 GV-无挠模,从而 $M=0$,矛盾。

例 2 设(R,m)是 2 维 Noether 正则局部环,则 m 是 GV-理想,故 $M:=R/m$ 是 GV-挠模,从而是 w-IFP-内射模;但 M 不是可除模,否则,如果 M 是可除模,取 $0\neq a\in J(R)=m$,则 $M=aM$。而 M 是有限生成的,由中山引理,$M:=R/m=0$,这与 m 是真理想矛盾,故 M 不是内射模。而在 Noether 环下内射模与 IFP-内射模是等价的,故 M 不是 IFP-内射模。

显然,当 R 是 DW 环时,w-IFP-内射模是 IFP-内射模,w-IFP-平坦模是 IFP-平坦模。

命题 2 设$\{M_i \mid i\in I\}$是一簇 R-模,则:

(1) $\bigoplus\limits_i M_i$ 是 w-IFP-平坦模当且仅当每个 M_i 是 w-IFP-平坦模;

(2) $\bigoplus\limits_i M_i$ 是 w-IFP-内射模当且仅当每个 M_i 是 w-IFP-内射模。

证明 (1) 设 I 是 R 的有限表现理想,由文献[10,定理 3.4.5]可知

$$\mathrm{Tor}_1^R(\bigoplus_i M_i,R/I)\cong\bigoplus_i \mathrm{Tor}_1^R(M_i,R/I)。$$

而 GV-挠模在直和与直和加项下是封闭的,即得证。

(2) 设 I 是 R 的有限表现理想,由文献[10,定理 3.9.2(1)]可知

$$\mathrm{Ext}_R^1(R/I,\bigoplus_i M_i)\cong\bigoplus_i \mathrm{Ext}_R^1(R/I,M_i)。$$

而 GV-挠模在直和与直和加项下是封闭的,即得证。

命题 3 w-IFP-内射模的 w-纯子模是 w-IFP-内射模。

证明 设 A 是 w-IFP-内射模 B 的 w-纯子模,令 $C=B/A$,则 $0\to A\to B\to C\to 0$ 是 w-纯正合列。对 R 的任意有限表现理想 I,有正合列

$$\mathrm{Hom}_R(R/I,B)\to\mathrm{Hom}_R(R/I,C)\to\mathrm{Ext}_R^1(R/I,A)\to\mathrm{Ext}_R^1(R/I,B)。$$

由文献[14,定理 2.5],序列

$$\mathrm{Hom}_R(R/I,B)\to\mathrm{Hom}_R(R/I,C)\to 0$$

是 w-正合列。对任何 $m\in\mathrm{Max}(R)$,序列

$$\mathrm{Hom}_R(R/I,B)_m\to\mathrm{Hom}_R(R/I,C)_m\to\mathrm{Ext}_R^1(R/I,A)_m\to\mathrm{Ext}_R^1(R/I,B)_m$$

与

$$\mathrm{Hom}_R(R/I,B)_m \to \mathrm{Hom}_R(R/I,C)_m \to 0$$

是正合列。又由于 B 是 w-IFP-内射模,因此 $\mathrm{Ext}_R^1(R/I,B)$ 是 GV-挠模,即 $\mathrm{Ext}_R^1(R/I,B)_m=0$,于是,$\mathrm{Ext}_R^1(R/I,A)_m=0$。由文献[10,定理 6.2.15],$\mathrm{Ext}_R^1(R/I,A)$是 GV-挠模,即 A 为 w-IFP-内射模。

引理 1[17]　设 M 是 R-模,则 M 是 n-有限表现模当且仅当存在正合列 $0\to K\to P\to M\to 0$,其中 K 是 $(n-1)$-有限表现模,P 是有限生成投射模。

命题 4　w-IFP-内射模关于正向极限封闭。

证明　设$\{M_i \mid i\in\Gamma\}$是 w-IFP-内射模的正向系统,I 是 R 的任意有限表现理想。由引理 1,R/I 是 2-有限表现 R-模,故由文献[1,引理 2.1],有

$$\mathrm{Ext}_R^1(R/I,\varinjlim M_i)\cong \varinjlim \mathrm{Ext}_R^1(R/I,M_i)。$$

又由文献[16,命题 3.1(证明过程)],可知 GV-挠模的正向极限是 GV-挠模,故 $\varinjlim M_i$ 是 w-IFP-内射模。

命题 5　w-IFP-平坦模关于正向极限封闭。

证明　设$\{M_i \mid i\in\Gamma\}$是 w-IFP-平坦模的正向系统,I 是 R 的任意有限表现理想。由文献[10,定理3.4.14],有

$$\mathrm{Tor}_1^R(R/I,\varinjlim M_i)\cong \varinjlim \mathrm{Tor}_1^R(R/I,M_i)。$$

又由文献[16,命题 3.1(证明过程)],GV-挠模的正向极限是 GV-挠模,故 $\varinjlim M_i$ 是 w-IFP-平坦模。

M 是 IFP-内射模当且仅当 M 的特征模是 IFP-平坦模,M 是 IFP-平坦模当且仅当 M 的特征模是 IFP-内射模[1]。对 w-IFP-内射模与 w-IFP-平坦模也有相似的性质。

定理 1　设 M 是 R-模,则以下各条等价:

(1) M 是 w-IFP-内射模;

(2) $M^\dagger$ 是 IFP-平坦模;

(3) $M^\dagger$ 是 w-IFP-平坦模。

证明　对 R 的任意有限表现理想 I,根据文献[18,引理 2.7(2)],有

$$\mathrm{Tor}_1^R(M^\dagger,R/I)\cong \mathrm{Ext}_R^1(R/I,M)^\dagger。$$

(1)⇒(2)。由(1),$\mathrm{Ext}_R^1(R/I,M)$是 GV-挠模,于是,$\mathrm{Tor}_1^R(M^\dagger,R/I)=0$,故 $M^\dagger$ 是 IFP-平坦模。

(2)⇒(3)。显然。

(3)⇒(1)。由(3),$\mathrm{Tor}_1^R(M^\dagger,R/I)$是 GV-挠模,即 $\mathrm{Ext}_R^1(R/I,M)^\dagger$ 是 GV-挠模。由文献[4,定理 2.8]知,$\mathrm{Ext}_R^1(R/I,M)^\dagger$ 是 w-模,于是,$\mathrm{Ext}_R^1(R/I,M)^\dagger=0$,故 $\mathrm{Ext}_R^1(R/I,M)$是 GV-挠模。

定理 2　设 M 是 R-模,则以下各条等价:

(1) M 是 w-IFP-平坦模;

(2) $M^\dagger$ 是 IFP-内射模;

(3) $M^\dagger$ 是 w-IFP-内射模。

证明　根据 $\mathrm{Ext}_R^1(R/I,M^\dagger)\cong \mathrm{Tor}_1^R(M,R/I)^\dagger$ 即得。

引理 2　设 M 是 R-模,则以下各条等价:

(1) M 是 w-平坦模;

(2) $M^\dagger$ 是内射模;

(3) $M^\dagger$ 是 iw-分裂模;

(4) $M^\dagger$ 是绝对纯模;

(5) $M^\dagger$ 是绝对 w-纯模。

证明　对任意 R-模 X,有 $\mathrm{Ext}_R^1(X,M^\dagger)\cong \mathrm{Tor}_1^R(M,X)^\dagger$。

(1)⇒(2)。设 N 是任意 R-模,由(1),$\mathrm{Tor}_1^R(M,N)$是 GV-挠模,从而 $\mathrm{Ext}_R^1(N,M^\dagger)=0$,故 $M^\dagger$ 是内射模。

(2)⇒(3)。由文献[15,定理 4.1.2],内射模是 iw-分裂模。

(3)⇒(1)。设 N 是任意 R-模,由(3)得,$M^\dagger$ 是 iw-分裂模,从而 $\mathrm{Tor}_1^R(M,N)^\dagger$ 是 GV-挠模,于是 $\mathrm{Tor}_1^R(M,N)^\dagger=0$,因此 $\mathrm{Tor}_1^R(M,N)$是 GV-挠模,即 M 是 w-平坦模。

(1)⇒(4)。设 N 是有限表现模,由文献[16,命题 3.1],$\mathrm{Tor}_1^R(M,N)$ 是 GV-挠模,从而

$$\mathrm{Ext}_R^1(N,M^\dagger)=0,$$

故 $M^\dagger$ 是绝对纯模。

(4)⇒(5)。显然。

(5)⇒(1)。设 N 是有限表现 R-模,由于 $M^\dagger$ 是绝对 w-纯模,则 $\mathrm{Ext}_R^1(N,M^\dagger)$ 是 GV-挠模,从而 $\mathrm{Tor}_1^R(M,N)^\dagger$ 是 GV-挠模,于是,$\mathrm{Tor}_1^R(M,N)^\dagger=0$。由文献[9,命题 11],$\mathrm{Tor}_1^R(M,N)$ 是 GV-挠模。

下面给出 w-IFP-内射模与 w-IFP-平坦模的一些等价刻画。

定理 3 设 M 是 R-模,则以下各条等价:

(1) M 是 w-IFP-内射模;

(2) 对任意内射的 w-模(GV-无挠的内射模)E,$\mathrm{Hom}_R(M,E)$ 是 IFP-平坦模;

(3) 对任意内射的 w-模(GV-无挠的内射模)E,$\mathrm{Hom}_R(M,E)$ 是 w-IFP-平坦模;

(4) 对任意 w-平坦模 E,$M\otimes_R E$ 是 w-IFP-内射模。

证明 (1)⇒(2)。设 I 是 R 的有限表现理想,由文献[18,引理 2.7(2)],有

$$\mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{Hom}_R(M,E),R/I)\cong\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ext}_R^1(R/I,M),E)。$$

由已知条件,可知 $\mathrm{Ext}_R^1(R/I,M)$ 是 GV-挠模。又由文献[16,引理 2.8]可知,

$$\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ext}_R^1(R/I,M),E)=0,$$

故 $\mathrm{Hom}_R(M,E)$ 是 IFP-平坦模。

(2)⇒(3)。显然。

(3)⇒(4)。由相伴同构定理,$(M\otimes_R E)^\dagger\cong\mathrm{Hom}_R(M,E^\dagger)$。由于 E 是 w-平坦模,根据引理 2,$E^\dagger$ 是 GV-无挠的内射模。由(3),$\mathrm{Hom}_R(M,E^\dagger)$ 是 w-IFP-平坦模。由定理 1,$M\otimes_R E$ 是 w-IFP-内射模。

(4)⇒(1)。令 $E=R$ 即得。

命题 6 对环 R,以下各条成立:

(1) 对任意有限表现理想 I 及任意绝对 w-纯模 N,$\mathrm{Ext}_R^2(R/I,N)$ 是 GV-挠模;

(2) 若 $0\to N\to M\to L\to 0$ 是正合列,其中 N 是绝对 w-纯模,M 是 w-IFP-内射模,则 L 是 w-IFP-内射模。

证明 (1) 短正合列 $0\to I\to R\to R/I\to 0$ 诱导序列

$$\mathrm{Ext}_R^1(I,N)\to\mathrm{Ext}_R^2(R/I,N)\to\mathrm{Ext}_R^2(R,N)=0$$

是正合列。由文献[16,引理 2.1],$\mathrm{Ext}_R^1(I,N)$ 是 GV-挠模,因此,$\mathrm{Ext}_R^2(R/I,N)$ 是 GV-挠模。

(2) 设 I 是有限表现理想,序列 $0\to N\to M\to L\to 0$ 诱导了正合列

$$\mathrm{Ext}_R^1(R/I,M)\to\mathrm{Ext}_R^1(R/I,L)\to\mathrm{Ext}_R^2(R/I,N)。$$

由(1)可知,$\mathrm{Ext}_R^2(R/I,N)$ 是 GV-挠模。又因为 M 是 w-IFP-内射模,所以 $\mathrm{Ext}_R^1(R/I,M)$ 是 GV-挠模,于是,$\mathrm{Ext}_R^1(R/I,L)$ 是 GV-挠模,即 L 是 w-IFP-内射模。

命题 7 设 M 是 R-模,则 M 是 w-IFP-内射模当且仅当 $M\{x\}$ 是 IFP-内射 R-模。

证明 设 I 是 R 的有限表现理想。

若 M 是 GV-无挠模,根据文献[16,命题 2.7(4)],

$$\mathrm{Ext}_R^1(R/I,M)\underset{R}{\otimes}R\{x\}\cong\mathrm{Ext}_R^1(R/I,M\{x\})。$$

再根据文献[16,引理 2.8(2)],M 是 w-IFP-内射模当且仅当 $M\{x\}$ 是 IFP-内射 R-模。

现在考虑一般情形。令 $\mathrm{tor}_{\mathrm{GV}}(M)=T$,则序列 $0\to T\to M\to M/T\to 0$ 诱导了正合列

$$\mathrm{Ext}_R^1(R/I,T)\to\mathrm{Ext}_R^1(R/I,M)\to\mathrm{Ext}_R^1(R/I,M/T)\to\mathrm{Ext}_R^2(R/I,T)。$$

由文献[19,引理 2.3]及命题 6,$\mathrm{Ext}_R^1(R/I,T)$ 和 $\mathrm{Ext}_R^2(R/I,T)$ 是 GV-挠模,故 $\mathrm{Ext}_R^1(R/I,M)$ 是 GV-挠模当且仅当 $\mathrm{Ext}_R^1(R/I,M/T)$ 是 GV-挠模,即 M 是 w-IFP-内射模当且仅当 M/T 是 w-IFP-内射模。由于 M/T 是 GV-无挠模,因此 M/T 是 w-IFP-内射模当且仅当 $(M/T)\{x\}$ 是 IFP-内射 R-模,即 M 是 w-IFP-内射模当且仅当 $(M/T)\{x\}$ 是 IFP-内射 R-模。而自然同态 $M\to M/T$ 是 w-同构,根据文献[10,推论 6.6.22],$M\{x\}\cong(M/T)\{x\}$,因此,M 是 w-IFP-内射模当且仅当 $M\{x\}$ 是 IFP-内射 R-模。

推论 1 若 $f:M\to N$ 是 w-同构,则 M 是 w-IFP-内射模当且仅当 N 是 w-IFP-内射模。

证明　由于 $f:M\to N$ 是 w-同构,因此 $M\{x\}\cong N\{x\}$。再由命题 7 即得。

定理 4　设 M 是 R-模,则以下各条等价:

(1) M 是 w-IFP-平坦模;

(2) 对任意内射的 w-模(GV-无挠的内射模)E,$\mathrm{Hom}_R(M,E)$ 是 IFP-内射模;

(3) 对任意内射的 w-模(GV-无挠的内射模)E,$\mathrm{Hom}_R(M,E)$ 是 w-IFP-内射模;

(4) 对任意 w-平坦模 E,$M\otimes_R E$ 是 w-IFP-平坦模;

(5) $M\{x\}$ 是 IFP-平坦 R-模。

证明　(1)⇒(2)。设 I 是 R 的有限表现理想,则

$$\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Tor}_1^R(R/I,M),E)\cong \mathrm{Ext}_R^1(R/I,\mathrm{Hom}_R(M,E))。$$

由 M 是 w-IFP-平坦模,有 $\mathrm{Tor}_1^R(R/I,M)$ 是 GV-挠模。又由文献[20,定理 1.3],

$$\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Tor}_1^R(R/I,M),E)=0,$$

从而 $\mathrm{Ext}_R^1(R/I,\mathrm{Hom}_R(M,E))=0$,即 $\mathrm{Hom}_R(M,E)$ 是 IFP-内射模。

(2)⇒(3)。显然。

(3)⇒(4)。由相伴同构定理可知,$(M\otimes_R E)^{\dagger}\cong \mathrm{Hom}_R(M,E^{\dagger})$。由于 E 是 w-平坦模,根据引理 2,$E^{\dagger}$ 是 GV-无挠的内射模。由(3)可知,$\mathrm{Hom}_R(M,E^{\dagger})$ 是 w-IFP-内射模。由定理 2 可知,$M\otimes_R E$ 是 w-IFP-平坦模。

(4)⇒(1)。令 $E=R$ 即得。

(1)⇔(5)。由文献[16,命题 2.4],有

$$\begin{aligned}\mathrm{Tor}_1^R(M\{x\},R/I)&\cong \mathrm{Tor}_1^{R\{x\}}((R/I)\{x\},M\{x\})\\&=\mathrm{Tor}_1^{R\{x\}}(R\{x\}\otimes_R R/I,R\{x\}\otimes_R M)\\&\cong R\{x\}\otimes_R \mathrm{Tor}_1^R(R/I,M)。\end{aligned}$$

再由文献[10,定理 6.6.20]即得。

定理 5　设 M 是 R-模,则以下各条等价:

(1) M 是 w-IFP-平坦模;

(2) 对任意有限表现理想 I,自然同态 $I\otimes_R M\to M$ 是 w-单同态;

(3) 对任意有限表现理想 I,自然同态 $I\otimes_R M\to IM$ 是 w-同构。

证明　(1)⇔(2)。由定义即得。

(2)⇒(3)。考虑下列 w-正合列的交换图:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I\otimes_R M \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\rho"] & M \arrow[d, equal, "\sigma"] \\ 0 \arrow[r] & IM \arrow[r, "\lambda"] & M \end{tikzcd}。$$

由文献[10,引理 6.3.6],ρ 是 w-单同态。又由 ρ 是满同态,故 ρ 是 w-同构。

(3)⇒(2)。由于 ρ 是 w-同构,因此 ρ 是 w-单同态,于是 $\sigma h=\lambda\rho$ 是 w-单同态,故 h 是 w-单同态。

引理 3　若 $M^{\dagger}$ 是 w-平坦 R-模,则 M 是绝对 w-纯模。

证明　设 N 是有限表现 R-模,根据文献[18,引理 2.7(1)],有正合列

$$\mathrm{Tor}_1^R(M^{\dagger},N)\to \mathrm{Ext}_R^1(N,M)^{\dagger}\to 0。$$

由 $M^{\dagger}$ 是 w-平坦模,有 $\mathrm{Tor}_1^R(M^{\dagger},N)$ 是 GV-挠模,故 $\mathrm{Ext}_R^1(N,M)^{\dagger}$ 是 GV-挠模。于是 $\mathrm{Ext}_R^1(N,M)^{\dagger}=0$,因此,$\mathrm{Ext}_R^1(N,M)$ 是 GV-挠模,即 M 是绝对 w-纯模。

命题 8　对环 R,以下各条等价:

(1) 每个 w-IFP-平坦模是 w-平坦模;

(2) 每个 IFP-平坦模是 w-平坦模;

(3) 每个 w-IFP-内射模是绝对 w-纯模;

(4) 每个 IFP-内射模是绝对 w-纯模。

证明　(1)⇒(2)。显然。

(2)⇒(3)。设 M 是 w-IFP-内射模,由定理 1 可知,$M^{\dagger}$ 是 IFP-平坦模,从而 $M^{\dagger}$ 是 w-平坦模。又由引理

3 可知,M 是绝对 w-纯模。

(3)⇒(4)。显然。

(4)⇒(1)。设 M 是 w-IFP-平坦模,由定理 2 得,$M^{\dagger}$ 是 IFP-内射模。再由(4)得,$M^{\dagger}$ 是绝对 w-纯模。根据引理 2,M 是 w-平坦模。

命题 9　若 R 是凝聚环,则 w-IFP-平坦模是 w-平坦模。

证明　设 M 是 w-IFP-平坦模,I 是 R 的有限生成理想。由于 R 是凝聚环,因此 I 是有限表现的,故 $\mathrm{Tor}_1^R(M,R/I)$ 是 GV-挠模,即 M 是 w-平坦模。

注 1　文献[1,定理 2.8]证明,IFP-平坦模的直积是 IFP-平坦模,但 w-IFP-平坦模的直积不一定是 w-IFP-平坦模。例如,由文献[21,例 2.1]可知,在 Noether 环上,w-平坦模的直积未必是 w-平坦模;然而,当 R 是 Noether 环时,w-IFP-平坦模与 w-平坦模等价,故 w-IFP-平坦模的直积未必是 w-IFP-平坦模。

若 R 的每个有限型理想是有限表现型的,则称 R 是 w-凝聚环[16]。

命题 10　若 R 满足命题 8 的等价条件,则 R 是 w-凝聚环。

证明　由于任意多个平坦模的直积是 IFP-平坦模,则任意多个平坦模的直积是 w-平坦模,根据文献[21,定理 2.2]即得。

命题 11　设 R 是环,则以下各条等价:

(1) 若 $A \to B \to C \to 0$ 是正合列,其中 A、B 是 w-IFP-内射模,则 C 是 w-IFP-内射模;

(2) 若 $0 \to P \to Q \to T$ 是正合列,其中 Q、T 是 w-IFP-平坦模,则 P 是 w-IFP-平坦模;

(3) 若 M 是 w-IFP-内射模,$\alpha \in \mathrm{End}_R(M)$,则 $\mathrm{Cok}(\alpha)$ 是 w-IFP-内射模;

(4) 若 N 是 w-IFP-平坦模,$\alpha \in \mathrm{End}_R(N)$,则 $\mathrm{Ker}(\alpha)$ 是 w-IFP-平坦模。

证明　(1)⇒(2)。设 $0 \to P \to Q \to T$ 是正合列,其中 Q、T 是 w-IFP-平坦模,则 $T^{\dagger} \to Q^{\dagger} \to P^{\dagger} \to 0$ 是正合列。由定理 2 可知,$T^{\dagger}$、$Q^{\dagger}$ 是 w-IFP-内射模。由(1)得,$P^{\dagger}$ 是 w-IFP-内射模,因此,P 是 w-IFP-平坦模。

(2)⇒(1)。设 $A \to B \to C \to 0$ 是正合列,其中 A、B 是 w-IFP-内射模,则 $0 \to C^{\dagger} \to B^{\dagger} \to A^{\dagger}$ 是正合列。由定理 1 可知,$B^{\dagger}$、$A^{\dagger}$ 是 w-IFP-平坦模。由(2)可知,$C^{\dagger}$ 是 w-IFP-平坦模,因此,C 是 w-IFP-内射模。

(1)⇒(3)。由 $M \to M \to \mathrm{Cok}(\alpha) \to 0$ 是正合列及条件即得。

(2)⇒(4)。由 $0 \to \mathrm{Ker}(\alpha) \to N \to N$ 是正合列及条件即得。

(3)⇒(1)。设 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ 是正合列,其中 A、B 是 w-IFP-内射模。对 $\alpha \in \mathrm{End}_R(A \oplus B)$,定义 $\alpha:(x,y) \mapsto (0,f(x))$,则 $(A \oplus B)/\mathrm{Im}(\alpha) \cong A \oplus (B/\mathrm{Im}(f))$。由(3)及命题 2 可知,$B/\mathrm{Im}(f)$ 是 w-IFP-内射模。又因为 $C \cong B/\mathrm{Ker}(g) = B/\mathrm{Im}(f)$,所以 C 是 w-IFP-内射模。

(4)⇒(2)。设 $0 \to P \xrightarrow{\varphi} Q \xrightarrow{\psi} T$ 是正合列,其中 Q、T 均为 w-IFP-平坦模。对 $\alpha \in \mathrm{End}_R(Q \oplus T)$,定义 $\alpha:(a,b) \mapsto (0,\psi(a))$,则 $\mathrm{Ker}(\alpha) = \mathrm{Ker}(\psi) \oplus Q$。由(4)及命题 2 可知,$\mathrm{Ker}(\psi)$ 是 w-IFP-平坦模。又因为 $P \cong \mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi)$,所以 P 是 w-IFP-平坦模。

3　w-PFP 环

Lu 和 Liu[1]定义了 PFP 环,即 R 的任意有限表现理想是投射理想。本节主要是引入 w-PFP 环的概念,并利用 w-IFP-平坦模和 w-IFP-内射模刻画 w-PFP 环。

定义 2　若 R 的任意有限表现理想是 w-分裂理想,则称 R 是 w-PFP 环。

显然,w-半遗传环是 w-PFP 环。下面给出 w-PFP 环的一个等价刻画。

定理 6　对环 R,以下各条等价:

(1) R 是 w-PFP 环;

(2) 每个有限表现理想是 w-投射理想;

(3) 每个有限表现理想是 w-平坦理想。

证明　由文献[22,命题 2.4]即得。

引理 4　设 R 是 w-PFP 环,M 是 R-模,I 是 R 有限表现理想,则对任何整数 $n \geqslant 1$,有:

(1) $\mathrm{Tor}_{n+1}^{R}(M,R/I)$ 是 GV-挠模;

(2) $\mathrm{Ext}_{R}^{n+1}(R/I,M)$ 是 GV-挠模。

证明　(1) 由定理 6 得,I 是 w-平坦理想。又因为 $0\to I\to R\to R/I\to 0$ 是正合列以及 R 是投射模, 所以,根据文献[10,定理 3.4.1],$\mathrm{Tor}_{n}^{R}(M,I)\cong\mathrm{Tor}_{n+1}^{R}(M,R/I)$ 是 GV-挠模,即得证。

(2) 证明方法同(1)。

命题 12　设 R 是 w-PFP 环,$0\to A\to B\to C\to 0$ 是短正合列,有:

(1) 若 C 是 w-IFP-平坦模,则 A 是 w-IFP-平坦模当且仅当 B 是 w-IFP-平坦模;

(2) 若 A 是 w-IFP-内射模, 则 B 是 w-IFP-内射模当且仅当 C 是 w-IFP-内射模。

证明　(1) 短正合列 $0\to A\to B\to C\to 0$ 诱导序列

$$\mathrm{Tor}_{2}^{R}(C,R/I)\to\mathrm{Tor}_{1}^{R}(A,R/I)\to\mathrm{Tor}_{1}^{R}(B,R/I)\to\mathrm{Tor}_{1}^{R}(C,R/I)$$

是正合列,由引理 4 可知,$\mathrm{Tor}_{2}^{R}(C,R/I)$ 是 GV-挠模,局部化即得。

(2) 证明方法同(1)。

命题 13　设 R 是 w-PFP 环,则 w-IFP-平坦模的 w-纯子模是 w-IFP-平坦模。

证明　设 A 是 w-IFP-平坦模 B 的 w-纯子模,令 $C=B/A$,则 $0\to A\to B\to C\to 0$ 是 w-纯正合列。对 R 的任意有限表现理想 I,根据文献[13,命题 3.2]可知

$$\mathrm{Tor}_{2}^{R}(C,R/I)\to\mathrm{Tor}_{1}^{R}(A,R/I)\to\mathrm{Tor}_{1}^{R}(B,R/I)$$

是 w-正合列。由引理 4 可得,$\mathrm{Tor}_{2}^{R}(C,R/I)$ 是 GV-挠模。又由 B 是 w-IFP-平坦模,故 $\mathrm{Tor}_{1}^{R}(B,R/I)$ 是 GV-挠模,因此,$\mathrm{Tor}_{1}^{R}(A,R/I)$ 是 GV-挠模, 即 A 是 w-IFP-平坦模。

Lu 和 Liu 在文献[1,定理 3.6]中利用 IFP-内射模和 IFP-平坦模刻画了 PFP 环,即 R 是 PFP 环,当且仅当 IFP-内射模的商模是 IFP-内射模,当且仅当 IFP-平坦模的子模是 IFP-平坦模。为了给出 w-PFP 环与之类似的刻画,我们先给出下面的引理作为准备。

引理 5　设 M 是 R-模,则以下各条等价:

(1) M 是 w-IFP-内射模;

(2) 对 R 的任意有限表现理想 I,有序列

$$0\to\mathrm{Hom}_{R}(R/I,M)\to\mathrm{Hom}_{R}(R,M)\to\mathrm{Hom}_{R}(I,M)\to 0$$

是 w-正合列;

(3) 对任何同态 $\alpha:I\to M$,其中 I 是有限表现理想,恒存在 $J=(d_1,d_2,\cdots,d_n)\in\mathrm{GV}(R)$,以及模同态 $q_k:R\to M$,使得 $q_kf=d_k\alpha$,其中 $f:I\to R$ 是包含映射,$k=1,2,\cdots,n$。

证明　(1)$\Leftrightarrow$(2)。显然。

(2)$\Rightarrow$(3)。由(2)可知,$f^*:\mathrm{Hom}_{R}(R,M)\to\mathrm{Hom}_{R}(I,M)$ 是 w-满同态,即 $\mathrm{Cok}(f^*)$ 是 GV-挠模。于是,存在 $J=(d_1,d_2,\cdots,d_n)\in\mathrm{GV}(R)$,使得 $J\alpha\in\mathrm{Im}(f^*)$, 因此,存在 $q_k\in\mathrm{Hom}_{R}(R,M)$,使得 $q_kf=d_k\alpha$, $k=1,2,\cdots,n$。

(3)$\Rightarrow$(2)。设 $\bar{\alpha}\in\mathrm{Hom}_{R}(I,M)/\mathrm{Im}(f^*)$, $\alpha\in\mathrm{Hom}_{R}(I,M)$,由(3)知,存在 $J=(d_1,d_2,\cdots,d_n)\in\mathrm{GV}(R)$,以及模同态 $q_k:R\to M$,使得 $q_kf=f^*(q_k)=d_k\alpha$,所以 $d_k\alpha\in\mathrm{Im}(f^*)$,从而 $J\alpha\subseteq\mathrm{Im}(f^*)$,即 $J\bar{\alpha}=0$,故 $\mathrm{Hom}_{R}(I,M)/\mathrm{Im}(f^*)$ 是 GV-挠模。

引理 6　设 M 是 R-模,则 M 是 w-分裂模当且仅当对任何满同态 $g:B\to C$,其中 B 是内射模,以及任何同态 $\alpha:M\to C$,恒存在 $J=(d_1,d_2,\cdots,d_n)\in\mathrm{GV}(R)$,以及模同态 $h_k:M\to B$,使得 $gh_k=d_k\alpha$, $k=1,2,\cdots,n$。

证明　只需证明充分性。设 $0\to A'\to A\to A''\to 0$ 是正合列,则存在内射模 B,及嵌入同态 $\sigma:A\to B$。考虑下面 2 行是正合列的图,其中左边方图可交换:

$$\begin{tikzcd}
 & & & M \arrow[d, "f"] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "1"] & A \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\sigma"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\rho"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\sigma i"'] & B \arrow[r, "\nu"'] & C \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

其中 $C=\mathrm{Cok}(\sigma i)$,ν 是自然满同态。由文献[10,定理 1.9.17],存在同态 $\rho:A''\to C$ 使得上图是交换图。由假设条件,存在 $J=(d_1,d_2,\cdots,d_n)\in \mathrm{GV}(R)$,以及模同态 $h_k:M\to B$,使得 $\nu h_k=d_k\rho f$。因为 $\mathrm{Im}(\sigma)\cong A$,所以由文献[11,命题 2.4],只需说明 $\mathrm{Im}(h_k)\subseteq \mathrm{Im}(\sigma)$, $k=1,2,\cdots,n$。设 $y\in \mathrm{Im}(h_k)$,则有 $x\in M$,使 $y=h_k(x)$。由于 $f(x)\in A''$,且 τ 是满同态,因此有 $a\in A$,使得 $\tau(a)=f(x)$,从而 $\rho\tau(a)=\rho f(x)=\nu\sigma(a)$。于是 $d_k\nu\sigma(a)=\nu h_k(x)$,即 $\nu\sigma(d_ka)=\nu h_k(x)$,进而 $\sigma(d_ka)-h_k(x)\in \mathrm{Ker}(\nu)=\mathrm{Im}(\sigma i)$,故存在 $a'_k\in A'$,使得 $\sigma(d_ka)-h_k(x)=\sigma i(a'_k)$,即 $y=h_k(x)=\sigma(d_ka-i(a'_k))\in \mathrm{Im}(\sigma)$。

定理 7 对环 R,以下各条等价:

(1) R 是 w-PFP 环;

(2) w-IFP-内射模的商模是 w-IFP-内射模;

(3) IFP-内射模的商模是 w-IFP-内射模;

(4) w-IFP-平坦模的子模是 w-IFP-平坦模;

(5) IFP-平坦模的子模是 w-IFP-平坦模。

证明 (1)⇒(2)。设 B 是 w-IFP-内射模,A 是 B 的任意子模,对 R 的任意有限表现理想 I,正合列 $0\to A\to B\to B/A\to 0$ 诱导的序列

$$\mathrm{Ext}_R^1(R/I,B)\to \mathrm{Ext}_R^1(R/I,B/A)\to \mathrm{Ext}_R^2(R/I,A)$$

是正合列。另一方面,正合列 $0\to I\to R\to R/I\to 0$ 诱导的序列

$$\mathrm{Ext}_R^1(I,A)\to \mathrm{Ext}_R^2(R/I,A)\to 0$$

是正合列。由(1)可知,I 是 w-分裂理想,于是 $\mathrm{Ext}_R^1(I,A)$ 是 GV-挠模,从而 $\mathrm{Ext}_R^2(R/I,A)$ 是 GV-挠模,故 $\mathrm{Ext}_R^1(R/I,B/A)$ 是 GV-挠模,即 B/A 是 w-IFP-内射模。

(2)⇒(1)。设 B 是内射模 E 的子模,I 是 R 的任意有限表现理想,对任何同态 $f:I\to E/B$, 由(2)得,E/B是 w-IFP-内射模。由引理 5 可得,存在 $J=(d_1,d_2,\cdots,d_n)\in \mathrm{GV}(R)$,以及模同态 $q_k:R\to E/B$,使得 $q_k\lambda=d_kf$, $k=1,2,\cdots,n$,其中 $\lambda:I\to R$ 是嵌入同态。由于 R 是投射模,因此存在模同态 $h_k:R\to E$,使得 $\pi h_k=q_k$,其中 $\pi:E\to E/B$ 是自然满同态,从而$(\pi h_k)(\lambda)=\pi(h_k\lambda)=q_k\lambda=d_kf$。由引理 6 得,$I$ 是 w-分裂的。

(2)⇒(3)。显然。

(3)⇒(4)。设 B 是 w-IFP-平坦模,A 是 B 的任意子模,则正合列 $0\to A\to B\to B/A\to 0$ 诱导的序列 $0\to (B/A)^\dagger\to B^\dagger\to A^\dagger\to 0$ 是正合列。由定理 2 得,$B^\dagger$ 是 IFP-内射模。由已知条件得,$A^\dagger$ 是 w-IFP-内射模。又由定理 2 得, A 是 w-IFP-平坦模。

(4)⇒(5)。显然。

(5)⇒(2)。设 B 是 w-IFP-内射模,A 是 B 的任意子模,则正合列 $0\to A\to B\to B/A\to 0$ 诱导的序列 $0\to (B/A)^\dagger\to B^\dagger\to A^\dagger\to 0$ 是正合列。由定理 1 得,$B^\dagger$ 是 IFP-平坦模。由已知条件得,$(B/A)^\dagger$ 是 w-IFP-平坦模。又由定理 1 得, B/A 是 w-IFP-内射模。

参考文献:

[1] LU Bo, LIU Zhongkui. IFP-flat modules and IFP-injective modules[J]. Communications in Algebra, 2012, 40(2):361-374.

[2] LU Bo, LIU Zhongkui. IFP-flat dimensions and IFP-injective dimensions[J]. Acta Mathematica Scientia, 2012, 32(6):2085-2095.

[3] LU Bo, LIU Zhongkui. IFP-injective, IFP-flat modules and localizations[J]. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 2014, 45(6):837-849.

[4] YIN Huayu, WANG Fanggui, ZHU Xiaosheng, et al. *w*-modules over commutative rings[J]. Journal of the Korean Mathematical Society, 2011, 48(1):207-222.

[5] WANG Fanggui. Finitely presented type modules and *w*-coherent rings[J]. Journal of Sichuan Normal University (Natural Science), 2010, 33(1):1-9.

[6] XING Shiqi, WANG Fanggui. Purity over Prüfer *v*-multiplication domains[J]. Journal of Algebra and Its Applications, 2018, 17(6):1850100.

[7] WANG F G, KIM H K. Two generalizations of projective modules and their applications[J]. Journal of Pure and Applied

Algebra, 2015, 219(6):2099-2123.

[8] WANG F G, KIM H K. *w*-injective modules and *w*-semi-hereditary rings[J]. Journal of the Korean Mathematical Society, 2014, 51(3):509-525.

[9] 宋菲菲,乔磊,夏伟恒. 交换环上的 *w*-弱平坦模与 *w*-弱内射模[J]. 西北师范大学学报(自然学科版), 2022, 58(5):17-24.

SONG Feifei, QIAO Lei, XIA Weiheng. *w*-weak flat and *w*-weak injective modules over commutative rings[J]. Journal of Northwest Normal University(Natural Science), 2022, 58(5):17-24.

[10] WANG F G, KIM H K. Foundations of commutative rings and their modules[M]. Singapore: Springer, 2016.

[11] WANG Fanggui, QIAO Lei. A new version of a theorem of Kaplansky[J]. Communications in Algebra, 2020, 48(8):3415-3428.

[12] WANG Fanggui. On *w*-projective modules and *w*-flat modules[J]. Algebra Colloquium, 1997, 4(1):111-120.

[13] KIM H K, WANG F G. On LCM-stable modules[J]. Journal of Algebra and Its Applications, 2014, 13(4):1350133.

[14] XING Shiqi, WANG Fanggui. Purity over Prüfer *v*-multiplication domains: II[J]. Journal of Algebra and Its Applications, 2018, 17(12):1850223.

[15] 吴小英. *w*-模化理论中环的 linked 性与模的分裂性[D]. 成都: 四川师范大学, 2022.

WU Xiaoying. The linked property of rings and the split property of modules in *w*-modularization theory[D]. Chengdu: Sichuan Normal University, 2022.

[16] WANG F G, KIM H K. Relative FP-injective modules and relative IF rings[J]. Communications in Algebra, 2021, 49(8): 3552-3582.

[17] XUE W. On *n*-presented modules and almost excellent extensions[J]. Communications in Algebra, 1999, 27(3):1091-1102.

[18] CHEN Jianlong, DING Nanqing. On *n*-coherent rings[J]. Communications in Algebra, 1996, 24(10):3211-3216.

[19] ASSAAD R A K, BOUBA M E, TAMEKKANTE M. *w*-FP-projective modules and dimension[M]. Singapore: Springer, 2022:47-57.

[20] 王芳贵,张俊. *w*-Noether 环上的内射模[J]. 数学学报, 2010, 53(6):1119-1130.

WANG Fanggui, ZHANG Jun. Injective modules over *w*-Noether rings[J]. Acta Mathematica Sinica, Chinese Series, 2010, 53(6):1119-1130.

[21] ZHANG Xiaolei, WANG Fanggui, QI Wei. On characterizations of *w*-coherent rings[J]. Communications in Algebra, 2020, 48(11):4681-4697.

[22] ALMAHDI F A A, ASSAAD R A K. A note on *w*-split modules[J]. Palestine Journal of Mathematics, 2021, 10(1):160-168.

(编辑:李艺)

(上接第 21 页)

[10] 高凤霞,杨士林.3 阶全矩阵代数的 H_8-模代数结构[J]. 数学年刊, 2017, 38A(2):215-226.

GAO Fengxia, YANG Shilin. The H_8-module algebra structures on $M_3(k)$[J]. Chinese Annals of Mathematics, 2017, 38A(2):215-226.

[11] NASTASESCU C, VAN OYSTAEYEN F. Methods of graded rings[M]. Berlin: Springer, 2004: 261-269.

[12] 魏丰,史荣昌,闫晓霞. 矩阵分析学习指导[M]. 北京:北京理工大学出版社, 2005:51-65.

WEI Feng, SHI Rongchang, YAN Xiaoxia. Matrix analysis learning guide[M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2005:51-65.

[13] 高雪琴. 非交换非余交换 8 维半单 Hopf 代数的模代数结构[D]. 北京:北京工业大学, 2015.

GAO Xueqin. The module algebra structures of non-commutative and non-cocommutative 8-dimensional semisimple Hopf algebra[D]. Beijing: Beijing Institute of Technology, 2015.

[14] MONTGOMERY S. Hopf algebras and their actions on rings[M]. Providence: American Mathematical Society, 1993:40-43.

(编辑:李艺)