山东大学学报(理学版)2024年2月 第59卷 第2期
Journal of Shandong University(Natural Science), Vol.59, No.2, 2024

E-mail:xblxb@sdu.edu.cn
http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn
Tel:+86-531-88366917

文章编号:1671-9352(2024)02-0059-06　　DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2022.654

$W_n \square P_m$ 的 r-hued 染色

史雅馨[1],刘凤霞[1*],蔡华[2]
(1.新疆大学数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830046; 2.昌吉学院数学与数据科学学院, 新疆 昌吉 831199)

摘要:图 G 的 (k,r)-染色是对图 G 用 k 种颜色进行正常染色,使得图 G 任一点 v 的邻点至少染 $\min\{r,d(v)\}$ 种不同的颜色。使图 G 有一个 (k,r)-染色的最小的整数 k 称为图 G 的 r-hued 色数,用 $\chi_r(G)$ 来表示。图 G 和 H 的笛卡尔乘积图记为 $G\square H$,其顶点集为 $V(G)\times V(H)$,(u_1,v_1) 与 (u_2,v_2) 相邻当且仅当 $u_1=u_2$,$v_1v_2\in E(H)$ 或 $v_1=v_2$,$u_1u_2\in E(G)$。确定了 $W_n\square P_m$ 的 r-hued 色数。

关键词:(k,r)-染色;r-hued 色数;笛卡尔乘积图
中图分类号:O157.5　　**文献标志码**:A
引用格式:史雅馨,刘凤霞,蔡华.$W_n\square P_m$ 的 r-hued 染色[J]. 山东大学学报(理学版),2024,59(2):59-64.

On r-hued coloring of $W_n \square P_m$

SHI Yaxin[1], LIU Fengxia[1*], CAI Hua[2]
(1. College of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi 830046, Xinjiang, China; 2. College of Mathematics and Data Sciences, Changji University, Changji 831199, Xinjiang, China)

Abstract: A (k,r)-coloring of a graph G is a proper k-coloring of graph G such that the neighbors of any vertex receive at least min $\{r,d(v)\}$ different colors. The smallest positive integral k such that graph G has a (k,r)-coloring is defined as the r-hued chromatic number and denoted by $\chi_r(G)$. The Cartesian product of two graphs G and H, denoted by $G\square H$, has vertex set $V(G)\times V(H)$, where (u_1,v_1) and (u_2,v_2) are adjacent if and only if either $u_1=u_2$ and $v_1v_2\in E(G)$, or $v_1=v_2$ and $u_1u_2\in E(G)$. In this paper, the r-hued chromatic number of $W_n\square P_m$ is determined.
Key words: (k,r)-coloring; r-hued chromatic number; Cartesian product of graphs

0 引言

设 $G=(V,E)$ 为一个图,用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 来表示图 G 的顶点集和边集。$N_G(v)$ 表示图 G 中顶点 v 的邻点集,$\Delta(G)$ 表示图 G 的最大度。图的 (k,r)-染色最早被 Montgomery 定义[1],并有:

ⅰ) $\chi_r(K_n)=n$。

ⅱ) 若图 G 是树,则 $\chi_r(G)=\min\{r,\Delta(G)\}+1$。

ⅲ) 若 $m\geqslant n\geqslant 2$,则 $\chi_r(K_{m,n})=\min\{2r,n+m,r+n\}$。

有关图 G 的 r-hued 色数的结论还有:

性质 1[2]　$\chi(G)=\chi_1(G)\leqslant\chi_2(G)\leqslant\cdots\leqslant\chi_{r-1}(G)\leqslant\chi_r(G)\leqslant\cdots\leqslant\chi_\Delta(G)=\chi_{\Delta+1}(G)=\cdots$

性质 2[2]　对于任意一个图 G,有 $\chi_r(G)\geqslant\min\{r,\Delta(G)\}+1$。

收稿日期:2022-11-30; **网络出版日期**:2023-11-24 17:17:46
网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/37.1389.N.20231123.1511.004
基金项目:新疆维吾尔自治区自然科学基金资助项目(2022D01C02);国家自然科学基金地区项目(11961067)
第一作者简介:史雅馨(1998—),女,硕士研究生,研究方向为图论及其应用. E-mail:1031666207@qq.com
* **通信作者简介**:刘凤霞(1981—),女,副教授,博士,研究方向为图论及其应用. E-mail:xjulfx@163.com

2个图的笛卡尔乘积图的 r-hued 色数的研究已经有很多结果，Akbari 等[3]分别刻画了 $P_m\Box P_n$、$C_m\Box P_n$、$C_m\Box C_n$ 的 2-hued 色数，结论如下：

ⅰ）$\chi_2(P_m\Box P_n)=4(m,n\geqslant 2)$。

ⅱ）

$$\chi_2(C_m\Box P_n)\begin{cases}\chi_2(C_m), & n=1,\ m\geqslant 3;\\ 3, & m=0(\bmod 3),\ m\geqslant 3;\\ 4, & m\neq 0(\bmod 3),\ m\geqslant 3。\end{cases}$$

ⅲ）当 $mn=0(\bmod 3)$，$\chi_2(C_m\Box C_n)=3(m,n\geqslant 3)$；当 $mn\neq 0(\bmod 3)$ 时，$\chi_2(C_m\Box C_n)=4(m,n\geqslant 3)$。

kang 等[4]刻画了 $P_m\Box P_n$ 的 3-hued 色数和 4-hued 色数，结论如下：

ⅰ）

$$\chi_3(P_m\Box P_n)\begin{cases}4, & \min\{m,n\}=2;\\ 4, & m、n \text{ 都是偶数};\\ 5, & m、n \text{ 不都是偶数且 } mn\neq 2(\bmod 4)。\end{cases}$$

ⅱ）

$$\chi_4(P_m\Box P_n)\begin{cases}4, & \min\{m,n\}=2;\\ 5, & \text{其他}。\end{cases}$$

Kaliraj 等[5]刻画了 $K_n\Box K_s$、$K_n\Box K_{1,s}$ 以及 $W_l\Box K_n$ 的 2-hued 染色数。Liang 等[6]确定了 $K_n\Box K_{1,s}$ 的 r-hued染色数。关于其他笛卡尔乘积图的 r-hued 色数的研究见参考文献[7-8]。本文研究了图 $W_n\Box P_m$ 的 r-hued 染色数。

1 准备工作

首先给出基本的记号，记 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置，W_n 为 $n+1$ 个点的轮图，顶点集记为 $V(W_n)=\{v_0,v_1,v_2,\cdots,v_n\}(n\geqslant 3)$，其中 $d(v_0)=n$，且 $E(W_n)=\{v_0v_i\mid 1\leqslant i\leqslant n\}\cup\{v_iv_{i+1}\mid 1\leqslant i\leqslant n-1\}\cup\{v_nv_1\}$。$P_m$ 是 m 个点的路，顶点集记为 $V(P_m)=\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}(m\geqslant 2)$。在 $W_n\Box P_m$ 中，W_n 的第 i 个复制用 W_n^i表示，并且记 $V(W_n^i)=\{(v_0,u_i),(v_1,u_i),\cdots,(v_n,u_i)\}(i=1,2,\cdots,m)$。由笛卡尔积的定义，用以下方法记 $W_n\Box P_m$ 的顶点集和边集：

$$V(W_n\Box P_m)=\begin{bmatrix}(v_0,u_1) & (v_0,u_2) & \cdots & (v_0,u_m)\\ (v_1,u_1) & (v_1,u_2) & \cdots & (v_1,u_m)\\ (v_2,u_1) & (v_2,u_2) & \cdots & (v_2,u_m)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (v_{n-1},u_1) & (v_{n-1},u_2) & \cdots & (v_{n-1},u_m)\\ (v_n,u_1) & (v_n,u_2) & \cdots & (v_n,u_m)\end{bmatrix}_{(n+1)\times m},$$

$E(W_n\Box P_m)=\{((v_0,u_j),(v_i,u_j))\mid 1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m\}\cup\{((v_i,u_j),(v_{i+1},u_j))\mid 1\leqslant i\leqslant n-1,\ 1\leqslant j\leqslant m\}\cup\{((v_i,u_j),(v_i,u_{j+1}))\mid 0\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m-1\}\cup\{((v_n,u_j),(v_1,u_j))\mid 1\leqslant j\leqslant m\}$，

且有

$$d((v_i,u_j))=\begin{cases}4, & i\neq 0,\ j=\{1,m\};\\ 5, & i\neq 0,\ j\neq\{1,m\};\\ n+1, & i=0,\ j=\{1,m\};\\ n+2, & i=0,\ j\neq\{1,m\}。\end{cases}$$

$$\Delta(W_n\Box P_m)=\begin{cases}n+2, & m\geqslant 3;\\ n+1, & m=2。\end{cases}$$

对于一般的 r，刻画了图 $W_n\Box P_m$ 的 r-hued 染色数。

2　主要结果

按正整数 r 的取值,分类讨论 $W_n\square P_m$ 的 r-hued 色数。由于 $4\leqslant r\leqslant 9$ 的证明过于繁琐,在此不一一列出,只给出 $1\leqslant r\leqslant 3$ 以及 $r\geqslant 10$ 情况的证明。本文总是假设 $n\geqslant 3$, $m\geqslant 2$。当 $r=1,2$ 时,有如下结论:

定理 1　$\chi(W_n\square P_m)=\chi_2(W_n\square P_m)=\begin{cases}3, & n=0(\bmod 2);\\ 4, & n=1(\bmod 2)。\end{cases}$

证明　图 $W_n\square P_m$ 的每个顶点都在一个三角形中,在一个正常染色下,每个顶点都有 2 种不同颜色的邻点,故 $\chi(W_n\square P_m)=\chi_2(W_n\square P_m)$。由性质 2 得 $\chi(W_n\square P_m)=\chi_2(W_n\square P_m)\geqslant\min\{2,\Delta\}+1$,且 $\Delta>2$,则 $\chi(W_n\square P_m)=\chi_2(W_n\square P_m)\geqslant 3$。下面根据 n 的奇偶分别讨论。

情况 1　$n=0(\bmod 2)$。下面给出 $W_n\square P_m$ 的一个正常 3-染色,以此说明 $\chi(W_n\square P_m)\leqslant 3$。定义映射 $c_{11}:V(W_n\square P_m)\to\{0,1,2\}$,矩阵 $\boldsymbol{A}_{11}$ 如下所示:

$$\boldsymbol{A}_{11}=\begin{bmatrix}0&2&0&2&\cdots&2&0&\cdots\\1&0&1&0&\cdots&0&1&\cdots\\2&1&2&1&\cdots&1&2&\cdots\\1&0&1&0&\cdots&0&1&\cdots\\2&1&2&1&\cdots&1&2&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\end{bmatrix}_{(n+1)\times m},$$

其中 $c_{11}(v_i,u_j)=a_{i+1,j}\in\boldsymbol{A}_{11}(0\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m)$。$c_{11}(v_i,u_j)\neq c_{11}(v_0,u_j)(i\neq 0)$, $c_{11}(v_i,u_j)\neq c_{11}(v_i,u_{j+1})$, $c_{11}(v_i,u_j)\neq c_{11}(v_{i+1},u_j)$, $c_{11}(v_n,u_j)\neq c_{11}(v_1,u_j)$,故 c_{11} 是图 $W_n\square P_m$ 的正常染色,即得 $\chi(W_n\square P_m)\leqslant 3$。综上可得 $\chi(W_n\square P_m)=\chi_2(W_n\square P_m)=3$。

情况 2　$n=1(\bmod 2)$。下面运用反证法证明 $\chi(W_n\square P_m)\geqslant 4$。设 $\chi(W_n\square P_m)\leqslant 3$,则图 $W_n\square P_m$ 存在一个正常 3-染色 $c'_{12}:V(W_n\square P_m)\to\{0,1,2\}$。在 W_n^1 中,点 (v_0,u_1)、(v_1,u_1) 与 (v_2,u_1) 构成一个三角形,不妨设 $c'_{12}(v_1,u_1)=1$, $c'_{12}(v_2,u_1)=2$, $c'_{12}(v_0,u_1)=0$,而 (v_0,u_1)、(v_2,u_1) 与 (v_3,u_1) 也构成一个三角形,从而 $c'_{12}(v_3,u_1)=1$,依次进行下去,即当 i 为奇数时,点 (v_i,u_1) 染 1 色;当 $i\neq 0$ 且 i 为偶数时,点 (v_i,u_1) 染 2 色。因为 n 为奇数,所以 $c'_{12}(v_n,u_1)=1$,而 (v_n,u_1) 与 (v_1,u_1) 是相邻的 2 个点染色相同,故矛盾,因此 $\chi(W_n\square P_n)\geqslant 4$。下面给出 $W_n\square P_m$ 的一个正常 4-染色,以此说明 $\chi(W_n\square P_m)\leqslant 4$。定义映射 $c_{12}:V(W_n\square P_m)\to\{0,1,2,3\}$,矩阵 $\boldsymbol{A}_{12}$ 如下所示:

$$\boldsymbol{A}_{12}=\begin{bmatrix}0&3&0&3&\cdots&3&0&\cdots\\1&0&1&0&\cdots&0&1&\cdots\\2&1&2&1&\cdots&1&2&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\1&0&1&0&\cdots&0&1&\cdots\\2&1&2&1&\cdots&1&2&\cdots\\3&2&3&2&\cdots&2&3&\cdots\end{bmatrix}_{(n+1)\times m},$$

其中 $c_{12}(v_i,u_j)=a_{i+1,j}\in\boldsymbol{A}_{12}(0\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m)$,故 c_{12} 是图 $W_n\square P_n$ 的一个正常染色,即得 $\chi(W_n\square P_m)\leqslant 4$。综上得 $\chi(W_n\square P_n)=\chi_2(W_n\square P_n)=4$。定理得证。

当 $r=3$ 时,有如下结论。

定理 2　$\chi_3(W_n\square P_m)=\begin{cases}4, & n\neq 5;\\ 5, & n=5。\end{cases}$

证明　由性质 2 得 $\chi_3(W_n\square P_m)\geqslant\min\{3,\Delta\}+1$,且 $\Delta>3$,则 $\chi_3(W_n\square P_m)\geqslant\min\{3,\Delta\}+1=4$,下面根据 n 的值分别讨论。

情况 1　$n\neq 5$。

情况 1.1 $n=0(\bmod 3)$。下面给出 $W_n\square P_m$ 的一个具体(4,3)-染色,以此说明$\chi_3(W_n\square P_m)\leqslant 4$。定义映射$c_{21}:V(W_n\square P_m)\to\{0,1,2,3\}$,矩阵$\boldsymbol{A}_{21}$如下所示:

$$\boldsymbol{A}_{21}=\begin{bmatrix}0&1&2&3&\cdots&1&2&3&\cdots\\1&2&3&0&\cdots&2&3&0&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&1&2&3&\cdots&1&2&3&\cdots\\1&2&3&0&\cdots&2&3&0&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}_{m\times(n+1)}。$$

情况 1.2 $n=1(\bmod 3)$。下面给出 $W_n\square P_m$ 的一个具体(4,3)-染色,以此说明$\chi_3(W_n\square P_m)\leqslant 4$。定义映射$c_{22}:V(W_n\square P_m)\to\{0,1,2,3\}$,矩阵$\boldsymbol{A}_{22}$如下所示:

$$\boldsymbol{A}_{22}=\begin{bmatrix}0&1&2&1&3&1&2&3&\cdots&1&2&3&\cdots\\1&0&3&0&2&0&3&2&\cdots&0&3&2&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&1&2&1&3&1&2&3&\cdots&1&2&3&\cdots\\1&0&3&0&2&0&3&2&\cdots&0&3&2&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}_{m\times(n+1)}。$$

情况 1.3 $n=2(\bmod 3)$。下面给出 $W_n\square P_m$ 的一个具体(4,3)-染色,以此说明$\chi_3(W_n\square P_m)\leqslant 4$。定义映射$c_{23}:V(W_n\square P_m)\to\{0,1,2,3\}$,矩阵$\boldsymbol{A}_{23}$如下所示:

$$\boldsymbol{A}_{23}=\begin{bmatrix}0&1&2&1&3&1&2&1&3&1&2&3&\cdots&1&2&3&\cdots\\1&0&3&0&2&0&3&0&2&0&3&2&\cdots&0&3&2&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&1&2&1&3&1&2&1&3&1&2&3&\cdots&1&2&3&\cdots\\1&0&3&0&2&0&3&0&2&0&3&2&\cdots&0&3&2&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}_{m\times(n+1)},$$

其中 $c_{2t}(v_i,u_j)=a_{i+1,j}\in\boldsymbol{A}_{2t}(0\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m,\ 1\leqslant t\leqslant 3)$。$c_{2t}(v_i,u_j)\neq c_{2t}(v_0,u_j)(i\neq 0)$, $c_{2t}(v_i,u_j)\neq c_{2t}(v_i,u_{j+1})$, $c_{2t}(v_i,u_j)\neq c_{2t}(v_{i+1},u_j)$, $c_{2t}(v_n,u_j)\neq c_{2t}(v_1,u_j)$,故 c_{2t}是图 $W_n\square P_m$ 的一个正常 4-染色。以下结论成立:$|c_{2t}(N_{W_n\square P_m}((v_i,u_j)))|=3$, $d((v_i,u_j))>3$,则$|c_{2t}(N_{W_n\square P_m}((v_i,u_j)))|\geqslant\min\{d((v_i,u_j)),3\}=3$,故 c_{2t}是 $W_n\square P_m$ 的一个(4,3)-染色。综上得$\chi_3(W_n\square P_m)=4$。

情况 2 $n=5$。下面用反证法证明$\chi_3(W_5\square P_m)\geqslant 5$,如果$\chi_3(W_5\square P_m)\leqslant 4$,则图 $W_5\square P_m$ 存在一个(4,3)-染色$c'_{24}:V(W_5\square P_m)\to\{0,1,2,3\}$。在 W_n^1 中,点(v_i,u_1)、(v_{i+1},u_1)与(v_0,u_1)构成一个三角形且顶点染色互不相同。不妨设 $c'_{24}(v_0,u_1)=0$, $c'_{24}(v_1,u_1)=1$, $c'_{24}(v_2,u_1)=2$,因为 W_n^1上的点最多染 4 种不同的颜色,至少染 3 种不同的颜色,所以下面根据 W_n^1 上的点染的颜色数进行分类。

ⅰ) 如果 W_n^1 上的点染 3 种不同的颜色,不妨设 $c'_{24}(v_i,u_1)\in\{0,1,2\}$,因为 $c'_{24}(v_0,u_1)=0$, $c'_{24}(v_i,u_1)\in\{1,2\}(i\neq 0)$,所以 $c'_{24}(v_0,u_2)=3$,故只能是当 i 为奇数时,点(v_i,u_1)染一色。当 i 为偶数时,点(v_i,u_1)染 2 色。因为 $n=5$, $c'_{24}(v_5,u_1)=1$,而(v_5,u_1)与(v_1,u_1)是相邻的 2 个点染色相同,所以矛盾。

ⅱ) 如果 W_n^1 上的点染 4 种不同的颜色,不妨设 $c'_{24}(v_i,u_1)\in\{1,2,3\}(i\neq 0)$,那么就会出现 5 个点染 3 种颜色,则会出现 $abcbc(a,b,c\in\{1,2,3\})$的颜色片段,不妨设 $c'_{24}(v_1,u_1)=a$, $c'_{24}(v_2,u_1)=b$, $c'_{24}(v_3,u_1)=c$, $c'_{24}(v_4,u_1)=b$, $c'_{24}(v_5,u_1)=c$,则 $c'_{24}(v_3,u_2)=a$, $c'_{24}(v_4,u_2)=a$,如此,在 W_n^2 上出现了 aa 颜色片段,矛盾,从而有$\chi_3(W_5\square P_m)\geqslant 5$。

下面给出 $W_5\square P_m$ 的一个具体(5,3)-染色,以此说明$\chi_3(W_5\square P_m)\leqslant 5$。定义映射$c_{24}:V(W_5\square P_m)\to\{0,1,2,3,4\}$,矩阵$\boldsymbol{A}_{24}$如下所示:

$$
\boldsymbol{A}_{24}=\begin{bmatrix}
0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 4\\
1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 3\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 4\\
1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 3\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}_{m\times 6},
$$

其中 $c_{24}(v_i,u_j)=a_{i+1,j}\in\boldsymbol{A}_{24}(0\leqslant i\leqslant 5,\ 1\leqslant j\leqslant m)$。$c_{24}(v_i,u_j)\neq c_{24}(v_0,u_j)(i\neq 0)$，$c_{24}(v_i,u_j)\neq c_{24}(v_i,u_{j+1})$，$c_{24}(v_i,u_j)\neq c_{24}(v_{i+1},u_j)$，$c_{24}(v_n,u_j)\neq c_{24}(v_1,u_j)$，则 c_{24} 是图 $W_5\square P_m$ 的一个正常 5-染色。以下结论成立：$|c_{24}(N_{W_5\square P_m}((v_i,u_j)))|\geqslant 3(i\neq 0)$，$|c_{24}(N_{W_5\square P_m}((v_0,u_j)))|=4$，$d((v_i,u_j))>3(i\neq 0)$，$|c_{24}(N_{W_5\square P_m}((v_i,u_j)))|\geqslant\min\{d((v_i,u_j)),3\}$，因此 c_{24} 是 $W_5\square P_m$ 的一个 $(5,3)$-染色，从而得 $\chi_3(W_5\square P_m)\leqslant 5$。综上可得 $\chi_3(W_5\square P_m)=5$。定理得证。

本文将以上结果推广到更一般的正整数 $r\geqslant 10$ 上，主要结果如下：

定理 3 $\chi_r(W_n\square P_m)=\begin{cases} r+1, & r<\Delta;\\ \Delta+1, & r\geqslant\Delta。\end{cases}$

证明 下在根据 Δ 和 n 的值进行讨论。

情况 1 $\Delta>r$。由性质 2 得 $\chi_r(W_n\square P_m)\geqslant\min\{r,\Delta\}+1=r+1$。设 $n=k(\mathrm{mod}(r-1))$，下面根据 k 的值进行讨论。

情况 1.1 当 $k\leqslant 5$ 时，给出 $W_n\square P_m$ 的一个具体 $(r+1,r)$-染色，以此说明 $\chi_r(W_n\square P_m)\leqslant r+1$。定义映射 $c_{31}:V(W_n\square P_m)\to\{0,1,2,3,\cdots,r\}$，矩阵 $\boldsymbol{A}_{31}$ 如下所示：

$$
\boldsymbol{A}_{31}=\begin{bmatrix}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & \cdots & k & 6 & \cdots & r-1 & 1 & 2 & \cdots & r-1 & \cdots\\
r & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 7 & 8 & \cdots & 2 & 3 & 4 & \cdots & 2 & \cdots\\
0 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & 9 & 10 & \cdots & 4 & 5 & 6 & \cdots & 4 & \cdots\\
r & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \cdots & 11 & 12 & \cdots & 6 & 7 & 8 & \cdots & 6 & \cdots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots
\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}_{m\times(n+1)},
$$

其中，$i\neq 1$ 时，第 $j+1$ 行第 i 列的元素等于第 j 行第 $i+2$ 列的元素，如把第一行的元素整体向前移动 2 个单位得到第二行元素，第 1 行第 1，2 列的元素按照原来的顺序移动到第 2 行第 n、$n+1$ 列的元素，依次进行下去。

情况 1.2 当 $k\geqslant 6$ 时，给出 $W_n\square P_m$ 的一个具体 $(r+1,r)$-染色，以此说明 $\chi_r(W_n\square P_m)\leqslant r+1$。定义映射 $c_{32}:V(W_n\square P_m)\to\{0,1,2,3,\cdots,r\}$，矩阵 $\boldsymbol{A}_{32}$ 如下所示：

$$
\boldsymbol{A}_{32}=\begin{bmatrix}
0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & k-2 & k-1 & k & 1 & 2 & 3 & \cdots & r-1 & 1 & 2 & \cdots & r-1 & \cdots\\
r & 3 & 4 & 5 & \cdots & k & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & 2 & 3 & 4 & \cdots & 2 & \cdots\\
0 & 5 & 6 & 7 & \cdots & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots & 4 & 5 & 6 & \cdots & 4 & \cdots\\
r & 7 & 8 & 9 & \cdots & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \cdots & 6 & 7 & 8 & \cdots & 6 & \cdots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots
\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}_{m\times(n+1)},
$$

其中，$i\neq 1$ 时，第 $j+1$ 行第 i 列的元素等于第 j 行第 $i+2$ 列的元素，如把第一行的元素整体向前移动 2 个单位得到第 2 行元素，第 1 行第 1、2 列的元素按照原来的顺序移动到第 2 行第 n，$n+1$ 列元素，依次进行下去。$c_{3t}(v_i,u_j)=a_{i+1,j}\in\boldsymbol{A}_{3t}(0\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m,\ 1\leqslant t\leqslant 2)$。$c_{3t}(v_i,u_j)\neq c_{3t}(v_0,u_j)(i\neq 0)$，$c_{3t}(v_i,u_j)\neq c_{3t}(v_i,u_{j+1})$，$c_{3t}(v_i,u_j)\neq c_{3t}(v_{i+1},u_j)$，$c_{3t}(v_n,u_j)\neq c_{3t}(v_1,u_j)$，则 c_{3t} 是 $W_n\square P_m$ 的一个正常 $(r+1)$-染色。又因为 $|c_{3t}(N_{W_n\square P_m}((v_i,u_j)))|=4(j\in\{1,m\},\ i\neq 0)$，$|c_{3t}(N_{W_n\square P_m}((v_i,u_j)))|=5(j\notin\{1,m\},\ i\neq 0)$，$|c_{3t}(N_{W_n\square P_m}((v_0,u_j)))|=r$，$4\leqslant d((v_i,u_j))\leqslant 5(i\neq 0)$，$d((v_i,u_j))=\Delta>r$，所以得 $|c_{3t}(N_{W_n\square P_m}((v_i,u_j)))|\geqslant\min\{d((v_i,u_j)),r\}$，因此，$c_{3t}$ 是 $W_n\square P_m$ 的一个 $(r+1,r)$-染色，故 $\chi_r(W_n\square P_m)\leqslant r+1$。综上可得 $\chi_r(W_n\square P_m)=r+1$。

情况 2 $\Delta\leqslant r$。由性质 1 得 $\chi_r(W_n\square P_m)=\chi_\Delta(W_n\square P_m)$。由性质 2，$\chi_r(W_n\square P_m)\geqslant\min\{r,\Delta\}+1=\Delta+1$。本文给出 $W_n\square P_m$ 的一个具体 $(\Delta+1,r)$-染色，以此说明 $\chi_r(W_n\square P_m)\leqslant\Delta+1$。定义映射 $c_{33}:V(W_n\square P_m)\to\{0,1,2,3,\cdots,\Delta\}$，矩阵 $\boldsymbol{A}_{33}$ 如下所示：

$$
\boldsymbol{A}_{33}=\begin{bmatrix}
0 & 1 & 2 & \cdots & \Delta-4 & \Delta-3 & \Delta-2 \\
\Delta-1 & 3 & 4 & \cdots & \Delta-2 & 1 & 2 \\
\Delta & 5 & 6 & \cdots & 2 & 3 & 4 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 1 & 2 & \cdots & \Delta-4 & \Delta-3 & \Delta-2 \\
\Delta-1 & 3 & 4 & \cdots & \Delta-2 & 1 & 2 \\
\Delta & 5 & 6 & \cdots & 2 & 3 & 4 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}_{m\times(n+1)},
$$

其中 $c_{33}(v_i,u_j)=a_{i+1,j}\in\boldsymbol{A}_{33}(0\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m)$。因为 $c_{33}(v_i,u_j)\neq c_{33}(v_0,u_j)(i\neq 0)$，$c_{33}(v_i,u_j)\neq c_{33}(v_i,u_{j+1})$，$c_{33}(v_i,u_j)\neq c_{33}(v_{i+1},u_j)$，$c_{33}(v_n,u_j)\neq c_{33}(v_1,u_j)$,所以 c_{33} 是 $W_n\square P_m$ 的一个正常$(\Delta+1)$-染色。$|c_{33}(N_{W_n\square P_m}((v_i,u_j)))|=4(j\in\{1,m\},i\neq 0)$，$|c_{33}(N_{W_n\square P_m}((v_i,u_j)))|=5(j\notin\{1,m\},i\neq 0)$，$|c_{33}(N_{W_n\square P_m}((v_0,u_j)))|=\Delta(j\notin\{1,m\})$，$|c_{33}(N_{W_n\square P_m}((v_0,u_j)))|=d((v_0,u_j))=\Delta-1(j\in\{1,m\})$,则 $|c_{33}(N_{W_n\square P_m}((v_i,u_j)))|\geqslant\min\{d((v_i,u_j)),r\}$,故 c_{33} 是 $W_n\square P_m$ 的一个$(\Delta+1,\Delta)$-染色。综上可得 $\chi_r(W_n\square P_m)=\Delta+1$。综上,定理得证。

参考文献:

[1] LAI H, LIN J N, POON H. Upper bounds of dynamic chromatic number[J]. ARS Combinatoria, 2003, 68(1):193-201.

[2] LAI H J, LIN J L, MONTGOMERY B, et al. Conditional colorings of graphs[J]. Discrete Mathematics, 2006, 306(16):1997-2004.

[3] AKBARI S, GHANBARI M, JAHANBEKAM S. On the dynamic coloring of Cartesian product graphs[J]. ARS Combinatoria, 2014, 114:161-168.

[4] KANG R, MÜLLER T, WEST D B. On r-dynamic coloring of grids[J]. Discrete Applied Mathematics, 2015, 186(C):286-290.

[5] KALIRAJ K, NARESH KUMAR H, VERNOLD VIVIN J. On dynamic colouring of Cartesian product of complete graph with some graphs[J]. Journal of Taibah University for Science, 2020, 14(1):168-171.

[6] LIANG L M, LIU F X, WU B. On r-hued coloring of product graphs[J]. RAIRO-Operations Research, 2022, 56(6):3845-3852.

[7] JAHANBEKAM S, KIM J, SUIL O, et al. On r-dynamic coloring of graphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 2016, 206(C):65-72.

[8] SHAO R, ZUO L. r-hued coloring of Cartesian product of path with its square[J]. Advances in Mathematics(China), 2019(48):21-28.

(编辑:祁业卿)