

奇异同谱图的构造

梁超凡, 刘奋进*, 李玉超, 柳顺义

(长安大学理学院, 陕西 西安 710064)

摘要: 2个图称为奇异同谱的, 如果它们有相同的非零奇异值及重数。奇异同谱较同谱弱, 但比等能量强。利用 t -联(阴影)冠图图运算及分块矩阵技巧, 构造一类新的奇异同谱图, 对研究等能量图的结构及图谱性质具有重要意义。

关键词: 特征值; 奇异同谱; 分块矩阵; 等能量

中图分类号: O157.5 **文献标志码:** A

引用格式: 梁超凡, 刘奋进, 李玉超, 等. 奇异同谱图的构造[J]. 山东大学学报(理学版), 2024, 59(2): 65-70.

Construction of singularly cospectral graphs

LIANG Chaofan, LIU Fenjin*, LI Yuchao, LIU Shunyi

(School of Sciences, Chang'an University, Xi'an 710064, Shaanxi, China)

Abstract: Two graphs are called singularly cospectral if they have the same nonzero singular value with the same multiplicity. Singularly cospectral is weaker than cospectral but stronger than equienergetic. A new construction of singularly cospectral graph is derived using the operation of t -join (shadow) corona of a graph and the technique of block matrix which has great significance for studying the structural and spectral properties of equienergetic graphs.

Key words: eigenvalue; singularly cospectral; block matrix; equienergetic

0 引言

本文仅考虑简单无向图。设图 G 的顶点集为 $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 边集为 $E(G)$ 。图 G 的邻接矩阵定义为 $A(G) = (a_{ij})$, 其中 $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } v_i \sim v_j, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$ 邻接矩阵 $A(G)$ 的特征值即为图 G 的特征值。方阵 A 的奇异值定义为 A^*A 的特征值的算术平方根, 其中 A^* 是 A 的共轭转置。易见对称矩阵 A 的奇异值恰好是矩阵 A 的特征值的绝对值。图 G 的特征多项式定义为 $P_G(x) = |xI - A(G)|$, 其中 I 是单位矩阵。图 G 的谱为 $A(G)$ 的所有特征值构成的多重集, 记为 $\text{Spec}(G)$ 。假设 $A(G)$ 的不同特征值为 $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_s$, 其重数分别为 m_1, m_2, \dots, m_s , 则 G 的谱记为

$$\text{Spec}(G) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_s \\ m_1 & m_2 & \dots & m_s \end{pmatrix}.$$

图能量的研究起源于有机化学, 1978年 Gutman^[1] 首先将图 G 的能量 $\mathcal{E}(G)$ 定义为图 G 特征值的绝对值之和, 即

收稿日期: 2022-11-09; 网络出版时间: 2023-05-06 13:09:03

网络出版地址: <https://link.cnki.net/urlid/37.1389.N.20230504.1654.004>

基金项目: 陕西省自然科学基金资助项目(2021JM-149, 2021JQ-219, 2022JM-019); 中央高校科研基本业务费专项资金资助项目(300102121104)

第一作者简介: 梁超凡(1996—), 女, 硕士研究生, 研究方向为图谱与代数图论. E-mail: 18875047255@163.com

* 通信作者简介: 刘奋进(1982—), 男, 副教授, 博士, 研究方向为图谱与代数图论. E-mail: fenjinliu@163.com

$$\mathcal{E}(G) = \sum_{i=1}^s m_i |\lambda_i|.$$

如果 $\mathcal{E}(G) = \mathcal{E}(H)$, 则称 2 个不同构的图 G 和图 H 等能量。如果 2 个图具有相同的谱, 则称它们是同谱的。

为了进一步研究图的能量, Nikiforov^[2] 引入了奇异同谱的定义。如果 2 个图具有相同的非零奇异值及重数, 则称这 2 个图是奇异同谱的。显然同谱一定奇异同谱, 反之不然。奇异同谱图的非零特征值的绝对值相同, 因此, 奇异同谱图自然是等能量的。Nikiforov^[2] 提出了 2 个图是奇异同谱的充要条件的问题。与被充分研究的同谱图不同(研究结果可以参考文献[3-7]), 很少有文献关注到奇异同谱图。Conde 等^[8] 通过给出奇异同谱的一些等价条件, 在一定程度上回答了 Nikiforov 的问题。此外, 他们还提出了一个寻找非同谱的奇异同谱图的问题。

本文进一步研究了 Conde 等^[8]、Indulal 和 Vijayakumar^[9] 的结果, 定义了 t -联(阴影)冠图, 并给出一种新的奇异同谱图的构造, 所有新构造的奇异同谱图都有助于非同谱等能量图的研究。

1 预备知识

引理 1.1 是著名的矩阵 Schur 补, 用于计算主对角块其中之一可逆的分块矩阵的行列式。

引理 1.1^[10] 设 M, Q 为方阵, 其中 Q 非奇异, 设 N, P 为矩阵, 则

$$\begin{vmatrix} M & N \\ P & Q \end{vmatrix} = |Q| |M - NQ^{-1}P|.$$

引理 1.2^[11] 设 G 是 n 阶连通 r -正则图, A 是它的邻接矩阵, 假设 A 有 m 个不同的特征值 $\lambda_1 = r, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, 那么多项式

$$\varphi(x) = n \frac{(x - \lambda_2)(x - \lambda_3) \cdots (x - \lambda_m)}{(r - \lambda_2)(r - \lambda_3) \cdots (r - \lambda_m)},$$

满足 $\varphi(A) = J$, 其中 J 是 n 阶的方阵, 其中每个元素都是 1。

由引理 1.2 易见, 对于所有的 $\lambda_i \neq r$, 有 $\varphi(r) = n, \varphi(\lambda_i) = 0$ 。

2 分块矩阵构造奇异同谱图

多年来, 构造非同谱等能量图是图能量研究的一个热点问题, 相关结论见参考文献[12-17]。通过三阶分块矩阵, Indulal 和 Vijayakumar^[9] 构造了许多对具有相同能量的图。在这一节中, 我们将他们的方法推广到任意阶的分块矩阵, 并构造新的奇异同谱图。

定义 2.1 设 G 是顶点集为 $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 的 r -正则图。引入 t 个顶点集, 其中每个顶点集都有 n 个孤立点 $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_n}$ ($i=1, 2, \dots, t$), 并使每个 u_{i_j} ($i=1, 2, \dots, t; j=1, 2, \dots, n$) 都和 G 的所有顶点相连; 然后引入一组 n 个孤立顶点 w_1, w_2, \dots, w_n , 使得 w_i 和 v_i ($i=1, 2, \dots, n$) 相连; 所得的图称为 G 的 t -联冠图, 记为 $J_t^c(G)$ 。

我们可以由小的正则奇异同谱图和 t -联冠图构造新的奇异同谱图。

定理 2.1 设 G_1 和 G_2 是一对 r -正则的 n 阶奇异同谱图, 则 $J_t^c(G_1)$ 和 $J_t^c(G_2)$ 是奇异同谱的。

证明 设 A, J, I 分别是图 G 的邻接矩阵、全 1 矩阵、单位矩阵, 则 $J_t^c(G)$ 的邻接矩阵为

$$A(J_t^c(G)) = \begin{pmatrix} A & J & \cdots & J & I \\ J & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ J & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ I & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{(t+2)n},$$

$J_t^c(G)$ 的特征多项式为

$$P_{J_t^c}(x) = \begin{vmatrix} xI-A & -J & \cdots & -J & -I \\ -J & xI & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -J & \mathbf{0} & \cdots & xI & \mathbf{0} \\ -I & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & xI \end{vmatrix}_{(t+2)n} \circ$$

由引理 1.1,

$$\begin{aligned} P_{J_t^c}(x) &= x^n \cdot \det \left(\begin{pmatrix} xI-A & -J & \cdots & -J \\ -J & xI & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -J & \mathbf{0} & \cdots & xI \end{pmatrix}_{(t+1)n} - \frac{1}{x} \begin{pmatrix} -I \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}_{(t+1)n,n} \begin{pmatrix} -I & \cdots & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{n,(t+1)n} \right) \\ &= x^n \cdot \det \left(\begin{pmatrix} xI-A & -J & \cdots & -J \\ -J & xI & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -J & \mathbf{0} & \cdots & xI \end{pmatrix}_{(t+1)n} - \frac{1}{x} \begin{pmatrix} I & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{(t+1)n} \right) \\ &= x^n \cdot \det \left(\begin{pmatrix} xI-A-\frac{1}{x}I & -J & \cdots & -J \\ -J & xI & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -J & \mathbf{0} & \cdots & xI \end{pmatrix}_{(t+1)n} \right) \\ &= x^{2n} \cdot \det \left(\begin{pmatrix} xI-A-\frac{1}{x}I & -J & \cdots & -J \\ -J & xI & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -J & \mathbf{0} & \cdots & xI \end{pmatrix}_m - \frac{1}{x} \begin{pmatrix} J^2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{pmatrix}_m \right) \\ &= x^{2n} \cdot \det \left(\begin{pmatrix} xI-A-\frac{1}{x}I-\frac{1}{x}J^2 & -J & \cdots & -J \\ -J & xI & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -J & \mathbf{0} & \cdots & xI \end{pmatrix}_m \right) \\ &\dots \\ &= x^m \cdot \det \left(\begin{pmatrix} xI-A-\frac{1}{x}I-\frac{t-1}{x}J^2 & -J \\ -J & xI \end{pmatrix}_{2n} \right) = x^{(t+1)n} \cdot \det \left(\left(xI-A-\frac{1}{x}I-\frac{t-1}{x}J^2 \right) - \frac{1}{x}(-J)(-J) \right) \\ &= x^{(t+1)n} \cdot \det \left(xI-A-\frac{1}{x}I-\frac{t}{x}J^2 \right) = x^m \cdot \det(x^2I-Ax-I-tnJ) \circ \end{aligned}$$

假设 A 的不同的特征值为 $\lambda_1=r, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, 其重数分别为 m_1, m_2, \dots, m_s . 由引理 1.2 可得, $J=\varphi(A)$,

$$\varphi(x) = n \frac{(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)\cdots(x-\lambda_s)}{(r-\lambda_2)(r-\lambda_3)\cdots(r-\lambda_s)},$$

则 $x^m \cdot \det(x^2I-Ax-I-tnJ) = x^m \cdot \det(x^2I-Ax-I-tn\varphi(A))$. 记 $g(\alpha) = -\alpha x - tn\varphi(\alpha) + (x^2-1)$ 则 $\det(x^2I-Ax-I-tn\varphi(A)) = g(\lambda_1)^{m_1} g(\lambda_2)^{m_2} \cdots g(\lambda_s)^{m_s}$, $g(A)$ 的不同特征值为 $g(\lambda_1) = g(r), g(\lambda_2), \dots, g(\lambda_s)$.

有

$$g(\lambda_i) = -\lambda_i x - tn\varphi(\lambda_i) + (x^2-1) = x^2 - \lambda_i x - (tn\varphi(\lambda_i) + 1), \tag{2.1}$$

对式(2.1)关于未知数 x 求解, 解得 $x = \frac{\lambda_i \pm \sqrt{\lambda_i^2 + 4(tn\varphi(\lambda_i) + 1)}}{2} (i=1, 2, \dots, s)$. 又因为

$$\varphi(\lambda_i) = \begin{cases} n, & \text{如果 } i=1, \\ 0, & \text{如果 } 2 \leq i \leq s, \end{cases}$$

所以可以得到 $J_t^c(G)$ 的谱为:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{r \pm \sqrt{r^2 + 4(t^2 + 1)}}{2} & \frac{\lambda_2 \pm \sqrt{\lambda_2^2 + 4}}{2} & \cdots & \frac{\lambda_s \pm \sqrt{\lambda_s^2 + 4}}{2} \\ & 2 & 2 & & 2 \\ tm & m_1 & m_2 & \cdots & m_s \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

假设 G_1 和 G_2 的特征值分别为 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n; \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ 。因为 G_1 和 G_2 是奇异同谱的,有 $\{\mu_1^2, \mu_2^2, \dots, \mu_n^2\} = \{\nu_1^2, \nu_2^2, \dots, \nu_n^2\}$, 所以

$$\sqrt{r^2 + 4(t^2 + 1)} + \sum_{i=2}^n \sqrt{\mu_i^2 + 4} = \sqrt{r^2 + 4(t^2 + 1)} + \sum_{i=2}^n \sqrt{\nu_i^2 + 4}.$$

由式(2.2), $J_t^C(G_1)$ 和 $J_t^C(G_2)$ 的谱分别为:

$$\text{Spec}(J_t^C(G_1)) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{r \pm \sqrt{r^2 + 4(t^2 + 1)}}{2} & \frac{\mu_2 \pm \sqrt{\mu_2^2 + 4}}{2} & \cdots & \frac{\mu_n \pm \sqrt{\mu_n^2 + 4}}{2} \\ & 2 & 2 & & 2 \\ tm & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{Spec}(J_t^C(G_2)) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{r \pm \sqrt{r^2 + 4(t^2 + 1)}}{2} & \frac{\nu_2 \pm \sqrt{\nu_2^2 + 4}}{2} & \cdots & \frac{\nu_n \pm \sqrt{\nu_n^2 + 4}}{2} \\ & 2 & 2 & & 2 \\ tm & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

对于 G_1 的任意特征值 μ_i , 存在 G_2 的一个特征值 ν_j , 使得 $\mu_i = \pm \nu_j$ 。如果 $\mu_i = \nu_j$, 很显然 $\frac{\mu_i + \sqrt{\mu_i^2 + 4}}{2} = \frac{\nu_j + \sqrt{\nu_j^2 + 4}}{2}$; 否则, $\frac{\mu_i + \sqrt{\mu_i^2 + 4}}{2} = -\frac{\nu_j - \sqrt{\nu_j^2 + 4}}{2} (i \neq 1)$, 因此 $J_t^C(G_1)$ 和 $J_t^C(G_2)$ 是奇异同谱的。根据奇异同谱的定义, 可以立即得到如下推论:

推论 2.1 设 G_1 和 G_2 是一对 r -正则的 n 阶奇异同谱图, 则 $J_t^C(G_1)$ 和 $J_t^C(G_2)$ 是等能量的。

下面举例说明定理 2.1。

例 2.1 设 G_1 和 G_2 是一对 4-正则的图, 如图 1 所示, 很容易验证它们是奇异同谱的。根据定理 2.1 可知, $J_1^C(G_1)$ 和 $J_1^C(G_2)$ 是奇异同谱的, 如图 2 所示。

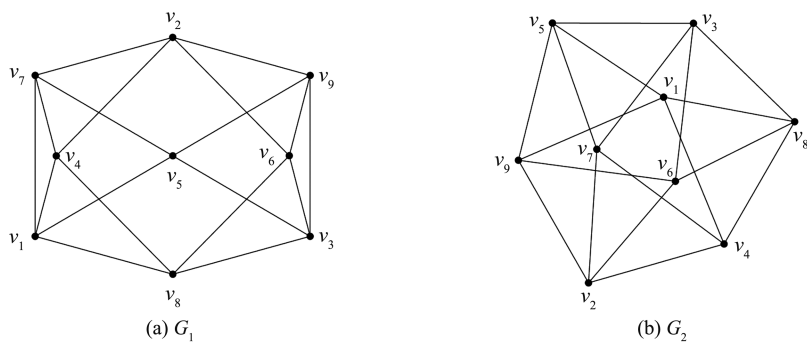


图 1 一对 4-正则的奇异同谱图 G_1 和 G_2
Fig.1 A pair of 4-regular singularly cospectral graphs G_1 and G_2

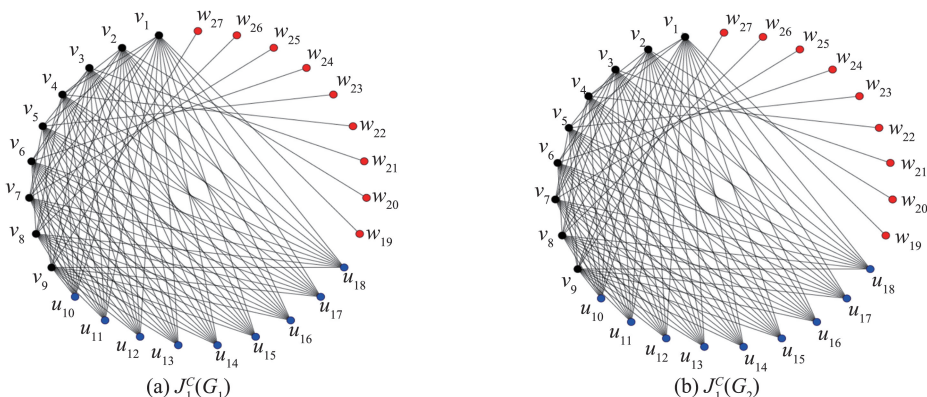


图 2 $J_1^C(G_1)$ 和 $J_1^C(G_2)$
Fig.2 $J_1^C(G_1)$ and $J_1^C(G_2)$

定义 2.2 设 G 是顶点集为 $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 的图。引入 t 个顶点集, 其中每个顶点集都有 n 个孤立点 $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_n} (i=1, 2, \dots, t)$, 并使每个 u_{i_j} 都和 v_j 在 G 中的邻点相连, 对于每个 $i, j (i=1, 2, \dots, t; j=1, 2, \dots, n)$ 。然后引入一组 n 个孤立顶点 w_1, w_2, \dots, w_n , 使得 w_i 和 $v_i (i=1, 2, \dots, n)$ 相连。所得的图称为 G 的 t -阴影冠图, 记为 $S_t^C(G)$ 。我们也可以由小的奇异同谱图和 t -阴影冠图构造新的奇异同谱图。

定理 2.2 设 G_1 和 G_2 是一对 n 阶奇异同谱图, 则 $S_t^C(G_1)$ 和 $S_t^C(G_2)$ 是奇异同谱的。

证明 遵循定理 2.1 中的符号。 $S_t^C(G)$ 的邻接矩阵可以表示为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{A} & \cdots & \mathbf{A} & \mathbf{I} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{(t+2)n}$$

与定理 2.1 的证明类似, 可以得到 $S_t^C(G_1)$ 和 $S_t^C(G_2)$ 的谱:

$$\text{Spec}(S_t^C(G_1)) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\mu_1 \pm \sqrt{(1+4t)\mu_1^2 + 4}}{2} & \cdots & \frac{\mu_n \pm \sqrt{(1+4t)\mu_n^2 + 4}}{2} \\ tn & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{Spec}(S_t^C(G_2)) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\nu_1 \pm \sqrt{(1+4t)\nu_1^2 + 4}}{2} & \cdots & \frac{\nu_n \pm \sqrt{(1+4t)\nu_n^2 + 4}}{2} \\ tn & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

因为 G_1 和 G_2 是奇异同谱的, 所以对于 G_1 的任意特征值 μ_i , 存在 G_2 的一个特征值 ν_j , 使得 $\mu_i = \pm \nu_j$ 。如果 $\mu_i = \nu_j$, 很显然 $\frac{\mu_i + \sqrt{(1+4t)\mu_i^2 + 4}}{2} = \frac{\nu_j + \sqrt{(1+4t)\nu_j^2 + 4}}{2}$; 否则, $\frac{\mu_i + \sqrt{(1+4t)\mu_i^2 + 4}}{2} = -\frac{\nu_j - \sqrt{(1+4t)\nu_j^2 + 4}}{2}$, 因此

$S_t^C(G_1)$ 和 $S_t^C(G_2)$ 是奇异同谱的。 t -阴影冠图可以用来构造等能量图。

推论 2.2 设 G_1 和 G_2 是一对 n 阶奇异同谱图, 则 $S_t^C(G_1)$ 和 $S_t^C(G_2)$ 是等能量的。

用下面的例子来说明定理 2.2, 以此结束本文。

例 2.2 设 H_1 和 H_2 (见图 3) 是一对奇异同谱图, 根据定理 2.2 可知, $S_1^C(H_1)$ 和 $S_1^C(H_2)$ (见图 4) 是奇异同谱的。

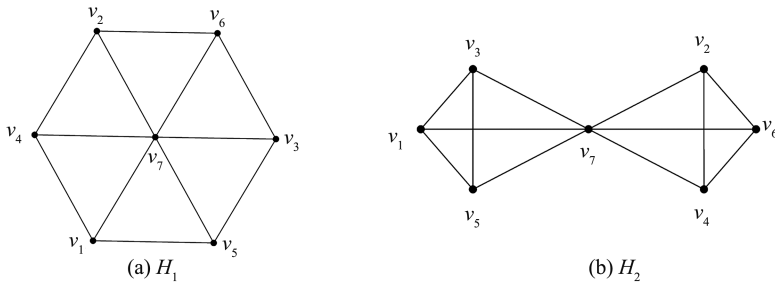


图 3 一对奇异同谱图 H_1 和 H_2
Fig.3 A pair of singularly cospectral graphs H_1 and H_2

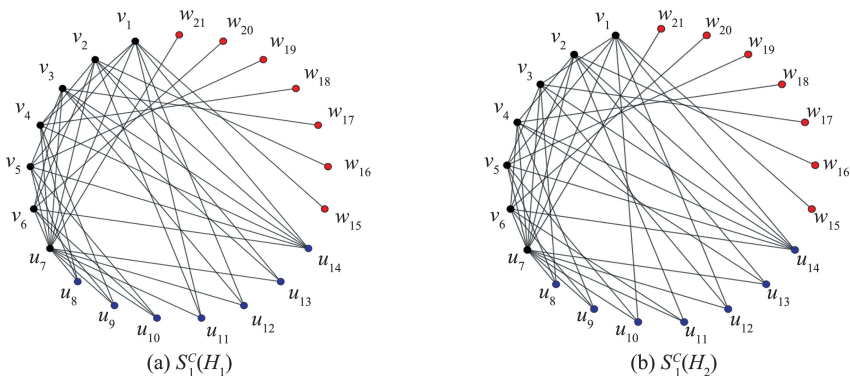


图 4 $S_1^C(H_1)$ 和 $S_1^C(H_2)$
Fig.4 $S_1^C(H_1)$ and $S_1^C(H_2)$

参考文献:

- [1] GUTMAN I. The energy of a graph[J]. Graz Forschungszentrum Mathematisch Statistische Sektion Berichte, 1978, 103:1-22.
- [2] NIKIFOROV V. Beyond graph energy: norms of graphs and matrices[J]. Linear Algebra and its Applications, 2016, 506:82-138.
- [3] ABIAD A, ALFARO C A. Enumeration of cospectral and coinvariant graphs[J]. Applied Mathematics and Computation, 2021, 408:126348.
- [4] GODSIL C D, MCKAY B D. Constructing cospectral graphs[J]. Aequationes Mathematicae, 1982, 25(1):257-268.
- [5] JI Y, GONG S, WANG W. Constructing cospectral bipartite graphs[J]. Discrete Mathematics, 2020, 343(10):112020.
- [6] KANNAN M R, PRAGADA S, WANKHEDE H. On the construction of cospectral nonisomorphic bipartite graphs[J]. Discrete Mathematics, 2022, 345(8):112916.
- [7] QIU L, JI Y, WANG W. On a theorem of Godsil and McKay concerning the construction of cospectral graphs[J]. Linear Algebra and its Applications, 2020, 603:265-274.
- [8] CONDE C, DRATMAN E, GRIPPO L N. Finding singularly cospectral graphs[J]. Linear and Multilinear Algebra, 2023, 71(3):496-512.
- [9] INDULAL G, VIJAYAKUMAR A. On a pair of equienergetic graphs[J]. MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, 2006, 55(1):83-90.
- [10] CVETKOVIĆ D M, DOOB M, SACHS H. Spectra of graphs: theory and application[M]. New York: Academic Press, 1980.
- [11] CVETKOVIĆ D M, ROWLINSON P, SIMIĆ S. An introduction to the theory of graph spectra[M]. New York: Cambridge University Press, 2010.
- [12] BALAKRISHNAN R. The energy of a graph[J]. Linear Algebra and its Applications, 2004, 387(1):287-295.
- [13] BONIFÁCIO A S, VINAGRE C T M, DE ABREU N M M. Constructing pairs of equienergetic and non-cospectral graphs[J]. Applied Mathematics Letters, 2008, 21(4):338-341.
- [14] BRANKOV V, STEVANOVIC D P, GUTMAN I. Equienergetic chemical trees[J]. Journal of the Serbian Chemical Society, 2004, 69(7):549-554.
- [15] JOSEPH S P. A graph operation and its applications in generating orderenergetic and equienergetic graphs[J]. MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, 2022, 87(3):703-715.
- [16] RAMANE H S, GUTMAN I, WALIKAR H B, et al. Equienergetic complement graphs[J]. Kragujevac Journal of Science, 2005, 27:67-74.
- [17] RAMANE H S, WALIKAR H B, RAO S B, et al. Spectra and energies of iterated line graphs of regular graphs[J]. Applied Mathematics Letters, 2005, 18(6):679-682.

(编辑:李艺)