山东大学学报(理学版)2024年2月 第59卷 第2期
Journal of Shandong University(Natural Science), Vol.59, No.2, 2024

E-mail:xblxb@sdu.edu.cn
http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn
Tel:+86-531-88366917

文章编号:1671-9352(2024)02-0008-06 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2022.551

形式三角矩阵环上的 Gorenstein FP-内射维数

张翠萍,董娇娇*,杨银银
(西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州 730070)

摘要:设 $T=\begin{pmatrix} A & 0 \\ U & B \end{pmatrix}$ 是形式三角矩阵环,其中 A、B 是环,U 是 (B,A)-双模, $M=\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 是左 T-模。证明若 T 是左 GFPI 封闭的左凝聚环,U_A 是平坦的,${}_BU$ 是有限表示的且 $\mathrm{pd}({}_BU)<\infty$,则以下式子成立:

(1) $\max\{\text{G-FP-id}(M_1),\ \text{G-FP-id}(M_2)\}\leqslant \text{G-FP-id}(M)$;

(2) $\text{G-FP-id}(M)\leqslant \max\{\text{G-FP-id}(M_1),\ \text{G-FP-id}(M_2)+1\}$;

(3) $\max\{l\text{G-FP-id}(A),\ l\text{G-FP-id}(B)\}\leqslant l\text{G-FP-id}(T)\leqslant \max\{l\text{G-FP-id}(A),\ l\text{G-FP-id}(B)+1\}$。

关键词:形式三角矩阵环; Gorenstein FP-内射模; Gorenstein FP-内射维数
中图分类号:O153.3 **文献标志码**:A
引用格式:张翠萍,董娇娇,杨银银.形式三角矩阵环上的 Gorenstein FP-内射维数[J]. 山东大学学报(理学版),2024,59(2):8-13.

Gorenstein FP-injective dimensions over formal triangular matrix rings

ZHANG Cuiping, DONG Jiaojiao*, YANG Yinyin
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, Gansu, China)

Abstract: Let $T=\begin{pmatrix} A & 0 \\ U & B \end{pmatrix}$ be a formal triangular matrix ring, where A and B are rings and U is a (B,A)-bimodule. Let $M=\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$ be a left T-module. The results are proved that if T is a left GFPI-closed and left coherent ring, U_A is flat, ${}_BU$ is finitely presented and $\mathrm{pd}({}_BU)<\infty$, then:

(1) $\max\{\text{G-FP-id}(M_1),\ \text{G-FP-id}(M_2)\}\leqslant \text{G-FP-id}(M)$;

(2) $\text{G-FP-id}(M)\leqslant \max\{\text{G-FP-id}(M_1),\ \text{G-FP-id}(M_2)+1\}$;

(3) $\max\{l\text{G-FP-id}(A),\ l\text{G-FP-id}(B)\}\leqslant l\text{G-FP-id}(T)\leqslant \max\{l\text{G-FP-id}(A),\ l\text{G-FP-id}(B)+1\}$.

Key words: formal triangular matrix ring; Gorenstein FP-injective module; Gorenstein FP-injective dimension

0 引言

2000年,Enochs 等[1]引入了 Gorenstein 投射(内射、平坦)模并研究了其性质,称左 R-模 M 是 FP-内射的,如果对任意有限表示左 R-模 N,有 $\mathrm{Ext}_R^1(N,M)=0$。2008年,Mao 等[2]介绍了 Gorenstein FP-内射模,并研究了这类模和 Gorenstein 平坦模之间的关系。2012年,Gao 等[3]给出了 Gorenstein FP-内射模的另一种定义,并讨论了其相关性质。

设 A、B 是环,U 是 (B,A)-双模,$T=\begin{pmatrix} A & 0 \\ U & B \end{pmatrix}$ 关于矩阵加法和乘法作成环,称为形式三角矩阵环。左 T-模

收稿日期:2022-10-19; 网络出版时间:2023-05-06 13:42:48
网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/37.1389.N.20230505.1007.004
第一作者简介:张翠萍(1974—),女,副教授,硕士生导师,博士,研究方向为环的同调理论. E-mail:zhangcp@nwnu.edu.cu
*通信作者简介:董娇娇(1995—),女,硕士研究生,研究方向为环的同调理论. E-mail:1442806165@qq.com

范畴中的对象可以用三元组 $M=\begin{pmatrix}M_1\\M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 来表示，其中 M_1 是左 A-模，M_2 是左 B-模，$\varphi^M:U\otimes_A M_1\to M_2$ 是 B-模同态。任意的 2 个左 T-模 $M=\begin{pmatrix}M_1\\M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 和 $N=\begin{pmatrix}N_1\\N_2\end{pmatrix}_{\varphi^N}$ 之间的态射为 $\begin{pmatrix}f_1\\f_2\end{pmatrix}$，其中 $f_1:M_1\to N_1$ 是 A-模同态，$f_2:M_2\to N_2$ 是 B-模同态，并且满足如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} U\otimes_A M_1 & \xrightarrow{1\otimes f_1} & U\otimes_A N_1 \\ {\scriptstyle\varphi^M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi^N} \\ M_2 & \xrightarrow{f_2} & N_2 \end{array}\quad 。$$

给定 T-模 $M=\begin{pmatrix}M_1\\M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}$，有 $\widetilde{\varphi^M}:M_1\to \mathrm{Hom}_B(U,M_2)$，其中 $\widetilde{\varphi^M}(x)(u)=\varphi^M(u\otimes x)$，$x\in M_1$，$u\in U$。关于该环的细节参见文献[4-5]。2013 年，Zhang[6] 研究了 Gorenstein 代数 T 上的 Gorenstein 投射模的结构。2020 年，Mao[7] 证明了若 ${}_BU$ 是有限表示的，则 $M=\begin{pmatrix}M_1\\M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 是 FP-内射左 T-模当且仅当 M_2 是 FP-内射左 B-模，$\mathrm{Ker}\,\widetilde{\varphi^M}$ 是 FP-内射左 A-模，并且 $\widetilde{\varphi^M}$ 是满同态。进而证明了若 A 和 B 是左凝聚环，U_A 是平坦的，${}_BU$ 是有限表示的，则 $\max\{\text{FP-id}(M_1),\ \text{FP-id}(M_2)\}\leqslant \text{FP-id}(M)\leqslant\max\{\text{FP-id}(M_1),\ \text{FP-id}(M_2)+1\}$。2022 年，杨银银等[8] 证明了若 T 是左凝聚环，${}_BU$ 是有限表示的且 $\mathrm{pd}({}_BU)<\infty$，则 $\mathrm{Ker}\,\widetilde{\varphi^M}$ 是 Gorenstein FP-内射左 A-模，M_2 是 Gorenstein FP-内射左 B-模，且 $\widetilde{\varphi^M}$ 是满同态。文献[9]给出右 GFPI-封闭环的定义，即称环 R 是右 GFPI-封闭环，如果所有的 Gorenstein FP-内射右 R-模类关于扩张封闭，证明了当 R 是右凝聚的右 GFPI-封闭环时，所有的 Gorenstein FP-内射右 R-模类是内射可解类。另外，当 R 是右凝聚的右 GFPI-封闭环时，给出了 Gorenstein FP-内射维数的若干等价刻画。文献[10]研究了形式三角矩阵环上的纯内射和纯投射模。文献[11]研究了左 T-模 $M=\begin{pmatrix}M_1\\M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 的 Gorenstein FP-内射性质。本文继续讨论这类模的相关性质及其维数。

1　预备知识

定义 1.1[3]　称左 R-模 M 是 Gorenstein FP 内射模，如果存在 FP-内射左 R-模的正合列

$$\mathscr{E}:\cdots\to E_{-1}\to E_0\to E_1\to\cdots,$$

使得 $M\cong\mathrm{Ker}(E_0\to E_1)$，且对任意投射维数有限的有限表示左 R-模 P，有 $\mathrm{Hom}_R(P,\mathscr{E})$ 正合。

定义 1.2[9]　称环 R 是左 GFPI-封闭环，如果 Gorenstein FP-内射左 R-模类关于扩张封闭。

引理 1.1[9]　设 R 是左凝聚环，若 R 是左 GFPI-封闭环，则 Gorenstein FP-内射左 R-模类是内射可解类。

引理 1.2[1]　设 A 和 B 是左凝聚环，U_A 是平坦的，${}_BU$ 是有限表示的，如果 M 是 FP-内射左 B-模，则 $\mathrm{Hom}_B(U,M)$ 是 FP-内射左 A-模。

2　形式三角矩阵环上的 Gorenstein FP-内射维数

首先给出几个引理，主要用于形式三角矩阵环上的 Gorenstein FP-内射维数的刻画。

引理 2.1　设 T 是左凝聚环，U_A 是平坦的，${}_BU$ 是有限表示的，且 $\mathrm{pd}({}_BU)<\infty$，若 M_2 是 Gorenstein FP-内射左 B-模，则 $\mathrm{Hom}_B(U,M_2)$ 是 Gorenstein FP-内射左 A-模。

证明　设 M_2 是 Gorenstein FP-内射左 B-模，则存在 FP-内射左 B-模的正合列

$$\mathscr{E}:\cdots\xrightarrow{f^{-1}}E_{-1}\xrightarrow{f^0}E_0\xrightarrow{f^1}E_1\xrightarrow{f^2}\cdots,$$

使得 $M_2\cong\mathrm{Ker}\,f^1$，且对任意投射维数有限的有限表示左 B-模 P，有 $\mathrm{Hom}_B(P,\mathscr{E})$ 正合，从而 $\mathrm{Hom}_B(U,\mathscr{E})$ 正

合,即有左 A-模的正合列

$$\Delta:\cdots\xrightarrow{f_*^{-1}}\mathrm{Hom}_B(U,E_{-1})\xrightarrow{f_*^0}\mathrm{Hom}_B(U,E_0)\xrightarrow{f_*^1}\mathrm{Hom}_B(U,E_1)\xrightarrow{f_*^2}\cdots,$$

使得 $\mathrm{Hom}_B(U,M_2)\cong\mathrm{Ker}(f_*^1)$。因为 T 是左凝聚环,所以由文献[10,定理 4.2]知,A 和 B 是左凝聚环。又因为 U_A 是平坦的,${}_BU$ 是有限表示的,所以由引理 1.2 知,$\mathrm{Hom}_B(U,E_i)$ 是 FP-内射左 A-模。设 H 是有限表示左 A-模,且 $\mathrm{pd}(H)=m<\infty$,下证$\mathrm{Hom}_A(H,\Delta)$正合,对 m 进行归纳。若 $m=0$,则显然成立;若 $m\geqslant 1$,则存在左 A-模的正合列 $0\to K\to L\to H\to 0$,其中 L 是有限生成投射左 A-模且 $\mathrm{pd}(K)\leqslant m-1$。因为 A 是左凝聚环,所以 K 是有限表示的。又因为对任意 i,$\mathrm{Hom}_B(U,E_i)$ 是 FP-内射左 A-模,所以 $\mathrm{Ext}_A^1(H,\mathrm{Hom}_B(U,E_i))=0$,故有以下行正合交换图:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathrm{Hom}_A(H,\mathrm{Hom}_B(U,E_{-1})) & \to & \mathrm{Hom}_A(L,\mathrm{Hom}_B(U,E_{-1})) & \to & \mathrm{Hom}_A(K,\mathrm{Hom}_B(U,E_{-1})) & \to & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathrm{Hom}_A(H,\mathrm{Hom}_B(U,E_0)) & \to & \mathrm{Hom}_A(L,\mathrm{Hom}_B(U,E_0)) & \to & \mathrm{Hom}_A(K,\mathrm{Hom}_B(U,E_0)) & \to & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathrm{Hom}_A(H,\mathrm{Hom}_B(U,E_1)) & \to & \mathrm{Hom}_A(L,\mathrm{Hom}_B(U,E_1)) & \to & \mathrm{Hom}_A(K,\mathrm{Hom}_B(U,E_1)) & \to & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

。

因为 L 是有限生成投射左 A-模,所以第 2 列正合。由归纳假设知第 3 列正合。由长正合引理知,第 1 列正合,故 $\mathrm{Hom}_B(U,M_2)$ 是 Gorenstein FP-内射左 A-模。

设 M 是左 A-模,则 $\begin{pmatrix}M\\0\end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 是左 T-模,其中 $\varphi^M=0$;设 N 是左 B-模,则 $\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_B(U,N)\\N\end{pmatrix}_{\varphi^N}$ 是左 T-模,其中φ^N:$U\otimes_A\mathrm{Hom}_B(U,N)\to N,\ u\otimes h\mapsto h(u),\ u\in U,\ h\in\mathrm{Hom}_B(U,N)$。

引理 2.2　设 T 是左凝聚环,${}_BU$ 是有限表示的,且 $\mathrm{pd}({}_BU)<\infty$,如果 T 是左 GFPI-封闭环,则 A 和 B 是左 GFPI-封闭环。

证明　设 $0\to M_1\to N_1\to L_1\to 0$ 是左 A-模的正合列,其中 M_1 和 L_1 是 Gorenstein FP-内射的,则有左 T-模的正合列

$$\Delta:\ 0\to\begin{pmatrix}M_1\\0\end{pmatrix}_{\varphi^M}\to\begin{pmatrix}N_1\\0\end{pmatrix}_{\varphi^N}\to\begin{pmatrix}L_1\\0\end{pmatrix}_{\varphi^L}\to 0。$$

由文献[8,命题 2.1]知,$\begin{pmatrix}M_1\\0\end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 和 $\begin{pmatrix}L_1\\0\end{pmatrix}_{\varphi^L}$ 是 Gorenstein FP-内射左 T-模。因为 T 是左 GFPI-封闭环,所以 $\begin{pmatrix}N_1\\0\end{pmatrix}_{\varphi^N}$ 是 Gorenstein FP-内射左 T-模。由文献[8,定理 2.1]知,N_1 是 Gorenstein FP-内射左 A-模,故 A 是左 GFPI-封闭环。

设 $0\to M_2\to N_2\to L_2\to 0$ 是左 B-模的正合列,其中 M_2 和 L_2 是 Gorenstein FP-内射左 B-模,因为${}_BU$ 是有限表示的,且 $\mathrm{pd}({}_BU)<\infty$,所以$\mathrm{Ext}_B^1(U,M_2)=0$,故而有左 A-模的正合列

$$0\to\mathrm{Hom}_B(U,M_2)\to\mathrm{Hom}_B(U,N_2)\to\mathrm{Hom}_B(U,L_2)\to 0,$$

进而有左 T-模的正合列

$$0\to\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_B(U,M_2)\\M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}\to\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_B(U,N_2)\\N_2\end{pmatrix}_{\varphi^N}\to\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_B(U,L_2)\\L_2\end{pmatrix}_{\varphi^L}\to 0。$$

由文献[8,命题 2.1]知,$\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_B(U,M_2)\\M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 和 $\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_B(U,L_2)\\L_2\end{pmatrix}_{\varphi^L}$ 是 Gorenstein FP-内射左 T-模。又因为 T 是

左 GFPI-封闭环,所以$\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_B(U,N_2)\\ N_2\end{pmatrix}_{\varphi^N}$是 Gorenstein FP-内射左 T-模。由文献[8,定理 2.1]知,N_2 是 Gorenstein FP-内射左 B-模,故 B 是左 GFPI-封闭环。

引理 2.3 设 R 是左 GFPI-封闭的左凝聚环,M 是左 R-模,序列 $0\to M\to L_0\to L_1\to\cdots\to L_{n-1}\to G\to 0$ 和 $0\to M\to E_0\to E_1\to\cdots\to E_{n-1}\to G'\to 0$是正合的,其中 L_i 是 Gorenstein FP-内射左 R-模,E_i 是内射左 R-模,$i=0,1,\cdots,n-1$,则 G 是 Gorenstein FP-内射左 R-模当且仅当 G'是 Gorenstein FP-内射左 R-模。

证明 由 E_i 的内射性知,有如下行正合的交换图:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}0&\longrightarrow&M&\longrightarrow&L_0&\longrightarrow&L_1&\longrightarrow\cdots\longrightarrow&L_{n-1}&\longrightarrow&G&\longrightarrow&0\\ &&\downarrow&&\downarrow&&\downarrow&&\downarrow&&\downarrow&&\\ 0&\longrightarrow&M&\longrightarrow&E_0&\longrightarrow&E_1&\longrightarrow\cdots\longrightarrow&E_{n-1}&\longrightarrow&G'&\longrightarrow&0\end{array}$$

易得正合列

$$0\to L_0\to E_0\oplus L_1\to\cdots\to E_{n-2}\oplus L_{n-1}\to E_{n-1}\oplus G\to G'\to 0,$$

其中 E_i 是内射左 R-模,L_i 是 Gorenstein FP-内射左 R-模,$0\leqslant i\leqslant n$。由文献[3,注记 2.2]知 E_i 是 Gorenstein FP-内射左 R-模,由引理 1.1 知 G'是 Gorenstein FP-内射左 R-模当且仅当 $G\oplus E_{n-1}$是 Gorenstein FP-内射左 R-模当且仅当 G 是 Gorenstein FP-内射左 R-模。

推论 2.1 设 R 是左 GFPI-封闭的左凝聚环,M 是左 R-模,序列 $0\to M\to Q^0\to Q^1\to\cdots\to Q^{n-1}\to G\to 0$ 和 $0\to M\to H^0\to H^1\to\cdots\to H^{n-1}\to G'\to 0$ 是正合的,其中 Q^i、H^i是 Gorenstein FP-内射左 R-模,$i=0,1,\cdots,n-1$,则 G 是 Gorenstein FP-内射左 R-模当且仅当 G'是 Gorenstein FP-内射左 R-模。

左 R-模 M 的 Gorenstein FP-内射维数定义为 $\text{G-FP-id}(M)=\inf\{n\mid$存在正合列 $0\to M\to E^0\to E^1\to\cdots\to E^{n-1}\to E^n\to 0$,其中 E^i 是 Gorenstein FP-内射左 R-模, $0\leqslant i\leqslant n\}$。如果这样的 n 不存在,记 $\text{G-FP-id}(M)=\infty$。环 R 的左整体 Gorenstein FP-内射维数定义为 $l\text{G-FP-id}(R)=\sup\{\text{G-FP-id}(M)\mid M$ 是任意左 R-模$\}$。

引理 2.4 设 R 是左 GFPI-封闭的左凝聚环,M 是左 R-模,n 是非负整数,则以下等价:

(1) $\text{G-FP-id}(M)\leqslant n$;

(2) 对任意的正合列 $0\to M\to H^0\to H^1\to\cdots\to H^{n-1}\to G\to 0$,其中 H^i是 Gorenstein FP-内射左 R-模,$i=0,1,\cdots,n-1$,G 是 Gorenstein FP-内射左 R-模。

证明 (1)⇒(2)。设 $\text{G-FP-id}(M)\leqslant n$,则存在左 R-模的正合列 $0\to M\to E^0\to E^1\to\cdots\to E^{n-1}\to E^n\to 0$,其中 E^i 是 Gorenstein FP-内射左 R-模,$i=0,1,\cdots,n$。由推论 2.1 知,G 是 Gorenstein FP-内射左 R-模。

(2)⇒(1)。$0\to M\to E^0\to E^1\to\cdots\to E^{n-1}\to E^n\to\cdots$是 M 的内射分解,令 $G=\mathrm{Ker}(E^n\to E^{n+1})$,则 G 是 Gorenstein FP-内射左 R-模,所以 $\text{G-FP-id}(M)\leqslant n$。

下面讨论形式三角矩阵环上的 Gorenstein FP-内射维数。

定理 2.1 设 T 是左 GFPI-封闭的左凝聚环,U_A 是平坦的,${}_BU$ 是有限表示的,且 $\mathrm{pd}({}_BU)<\infty$,$M=\begin{pmatrix}M_1\\ M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}$是左 T-模,则:

(1) $\max\{\text{G-FP-id}(M_1),\ \text{G-FP-id}(M_2)\}\leqslant\text{G-FP-id}(M)$;

(2) $\text{G-FP-id}(M)\leqslant\max\{\text{G-FP-id}(M_1),\ \text{G-FP-id}(M_2)+1\}$;

(3) $\max\{l\text{G-FP-id}(A),\ l\text{G-FP-id}(B)\}\leqslant l\text{G-FP-id}(T)\leqslant\max\{l\text{G-FP-id}(A),\ l\text{G-FP-id}(B)+1\}$。

证明 (1) 如果 $\text{G-FP-id}(M)=\infty$,显然成立。设 $\text{G-FP-id}(M)=n<\infty$,则存在左 T-模的正合列

$$0\to\begin{pmatrix}M_1\\ M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}\to\begin{pmatrix}E_1^0\\ E_2^0\end{pmatrix}_{\varphi^0}\to\begin{pmatrix}E_1^1\\ E_2^1\end{pmatrix}_{\varphi^1}\to\cdots\to\begin{pmatrix}E_1^n\\ E_2^n\end{pmatrix}_{\varphi^n}\to 0,$$

其中$\begin{pmatrix}E_1^i\\ E_2^i\end{pmatrix}_{\varphi^i}$是 Gorenstein FP-内射左 T-模, $i=0,1,\cdots,n$。由文献[8,定理 2.1]知,$\widetilde{\varphi^i}$是满同态,因此存在左 A-模的正合列 $0\to\mathrm{Ker}\,\widetilde{\varphi^i}\to E_1^i\to\mathrm{Hom}_B(U,E_2^i)\to 0$,其中 $\mathrm{Ker}\,\widetilde{\varphi^i}$是 Gorenstein FP-内射左 A-模,E_2^i 是 Gorenstein FP-内射左 B-模。由引理 2.1 知,$\mathrm{Hom}_B(U,E_2^i)$是 Gorenstein FP-内射左 A-模。又因为 T 是左 GFPI-封闭环,所以由引理 2.2 知,A 是左 GFPI-封闭环,因此,E_1^i 是 Gorenstein FP-内射左 A-模。由正合列 $0\to M_1\to E_1^0\to$

$E_1^1\to\cdots\to E_1^n\to 0$ 和 $0\to M_2\to E_2^0\to E_2^1\to\cdots\to E_2^n\to 0$，得 G-FP-id$(M_1)\leqslant n$，G-FP-id$(M_2)\leqslant n$。

（2）如果 $\max\{$G-FP-id(M_1)，G-FP-id$(M_2)+1\}=\infty$，显然成立。设 $\max\{$G-FP-id(M_1)，G-FP-id$(M_2)+1\}=m<\infty$，则存在正合列

$$0\to M_2\xrightarrow{f^0}H^0\xrightarrow{f^1}H^1\xrightarrow{f^2}H^2\to\cdots\xrightarrow{f^{m-1}}H^{m-1}\to 0,$$

其中 H^i 是 Gorenstein FP-内射左 B-模和正合列 $0\to M_1\xrightarrow{g^0}E^0$，其中 E^0 是 FP-内射左 A-模。令 $N_2^i=\mathrm{Im}\, f^i$ 和 $\beta^i:N_2^i\to H^i$ 是单同态，$i=1,2,\cdots,m-1$。定义 $h^0:M_1\to\mathrm{Hom}_B(U,H^0)\oplus E^0$，$x\mapsto h^0(x)=(f_*^0\widetilde{\varphi^M}(x),g^0(x))$，易知 h^0 单。令 $N_1^1=\mathrm{Coker}(h^0)$，于是有正合列

$$0\to\begin{pmatrix}M_1\\M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}\to\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_B(U,H^0)\oplus E^0\\H^0\end{pmatrix}_{\varphi^0}\to\begin{pmatrix}N_1^1\\N_2^1\end{pmatrix}_{\psi^1}\to 0,$$

其中 $\varphi^0:U\otimes(\mathrm{Hom}_B(U,H^0)\oplus E^0)\to H^0$，$u\otimes(\theta^0,e^0)\mapsto\theta^0(u)$。设有正合列 $0\to N_1^1\xrightarrow{g^1}E^1$，其中 E^1 是 FP-内射左 A-模，定义 $h^1:N_1^1\to\mathrm{Hom}_B(U,H^1)\oplus E^1$，$x\mapsto h^1(x)=(\beta_*^1\widetilde{\psi^1}(x),g^1(x))$，易知 h^1 单。令 $N_1^2=\mathrm{Coker}(h^1)$，则有正合列

$$0\to\begin{pmatrix}N_1^1\\N_2^1\end{pmatrix}_{\psi^1}\to\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_B(U,H^1))\oplus E^1\\H^1\end{pmatrix}_{\varphi^1}\to\begin{pmatrix}N_1^2\\N_2^2\end{pmatrix}_{\psi^2}\to 0,$$

其中 $\varphi^1:U\otimes(\mathrm{Hom}_B(U,H^1)\oplus E^1)\to H^1$，$u\otimes(\theta^1,e^1)\mapsto\theta^1(u)$。继续这个过程，得到正合列

$$0\to\begin{pmatrix}M_1\\M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}\to\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_B(U,H^0)\oplus E^0\\H^0\end{pmatrix}_{\varphi^0}\to\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_B(U,H^1)\oplus E^1\\H^1\end{pmatrix}_{\varphi^1}\to\cdots\to$$
$$\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_B(U,H^{m-1})\oplus E^{m-1}\\H^{m-1}\end{pmatrix}_{\varphi^{m-1}}\to\begin{pmatrix}N_1^m\\0\end{pmatrix}_{\varphi^m}\to 0。$$

因为 E^i 是 FP-内射左 A-模，所以由文献[3，注记 2.2]知，E^i 是 Gorenstein FP-内射左 A-模，故而由文献[8，定理 2.2]知，$\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_B(U,H^i)\oplus E^i\\H^i\end{pmatrix}_{\varphi^i}$ 是 Gorenstein FP-内射左 T-模。又因为 G-FP-id$(M_1)\leqslant m$，所以由推论 2.1 知，N_1^m 是 Gorenstein FP-内射左 A-模。由文献[8，命题 2.1]知，$\begin{pmatrix}N_1^m\\0\end{pmatrix}_{\varphi^m}$ 是 Gorenstein FP-内射左 T-模，因此 G-FP-id$(M)\leqslant m$。

（3）证明类似于（1）和（2）。

定理 2.2 设 T 是左 GFPI-封闭的左凝聚环，${}_BU$ 是有限表示的，且 $\mathrm{pd}({}_BU)<\infty$，$M=\begin{pmatrix}M_1\\M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 是左 T-模，则 G-FP-id$(M)\leqslant n$ 当且仅当 G-FP-id$(M_2)\leqslant n$，G-FP-id$(\mathrm{Ker}\,\widetilde{\varphi^M})\leqslant n$，并且如果 $K=\begin{pmatrix}K_1\\K_2\end{pmatrix}_{\varphi^K}$ 是 M 的第 n 次余合冲，则 $\widetilde{\varphi^K}$ 是满同态。

证明 ⇒。因为 G-FP-id$(M)\leqslant n$，所以存在正合列

$$\Delta:\ 0\to\begin{pmatrix}M_1\\M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}\to\begin{pmatrix}E_1^0\\E_2^0\end{pmatrix}_{\varphi^0}\to\begin{pmatrix}E_1^1\\E_2^1\end{pmatrix}_{\varphi^1}\to\cdots\to\begin{pmatrix}E_1^n\\E_2^n\end{pmatrix}_{\varphi^2}\to 0,$$

其中 $\begin{pmatrix}E_1^i\\E_2^i\end{pmatrix}_{\varphi^i}$ 是 Gorenstein FP-内射左 T-模，$i=0,1,\cdots,n$，进而有正合列

$$0\to M_2\to E_2^0\to E_2^1\to\cdots\to E_1^n\to 0。$$

因为 $\begin{pmatrix}E_1^i\\E_2^i\end{pmatrix}_{\varphi^i}$ 是 Gorenstein FP-内射左 T-模，所以由文献[8，定理 2.1]知，E_2^i 是 Gorenstein FP-内射左 B-模，故

G-FP-id(M_2)$\leqslant n$。用函子$\mathrm{Hom}_T\left(\begin{pmatrix}A\\0\end{pmatrix},-\right)$作用正合列$\Delta$,由文献[11,引理 4.1]得正合列

$$0\to \mathrm{Ker}\ \widetilde{\varphi^M}\to \mathrm{Ker}\ \widetilde{\varphi^0}\to \mathrm{Ker}\ \widetilde{\varphi^1}\to\cdots\to \mathrm{Ker}\ \widetilde{\varphi^n}\to 0。$$

因为$\begin{pmatrix}E_1^i\\E_2^i\end{pmatrix}_{\varphi^i}$是 Gorenstein FP-内射左 T-模,所以由文献[8,定理 2.1]知,Ker $\widetilde{\varphi^i}$是 Gorenstein FP-内射左 A-模,故 G-FP-id(Ker $\widetilde{\varphi^M}$)$\leqslant n$。

设$0\to\begin{pmatrix}M_1\\M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}\to\begin{pmatrix}L_1^0\\L_2^0\end{pmatrix}_{\bar\varphi^0}\to\begin{pmatrix}L_1^1\\L_2^1\end{pmatrix}_{\bar\varphi^1}\to\cdots$是 M 的内射分解,且 $K=\begin{pmatrix}K_1\\K_2\end{pmatrix}_{\varphi^K}$是 M 的第 n 次余合冲,则有正合列

$$\Lambda:\ 0\to\begin{pmatrix}M_1\\M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}\to\begin{pmatrix}L_1^0\\L_2^0\end{pmatrix}_{\bar\varphi^0}\to\begin{pmatrix}L_1^1\\L_2^1\end{pmatrix}_{\bar\varphi^1}\to\cdots\to\begin{pmatrix}L_1^{n-1}\\L_2^{n-1}\end{pmatrix}_{\bar\varphi^{n-1}}\to\begin{pmatrix}K_1\\K_2\end{pmatrix}_{\varphi^K}\to 0。$$

由推论 2.1 知$\begin{pmatrix}K_1\\K_2\end{pmatrix}_{\varphi^K}$是 Gorenstein FP-内射左 T-模。由文献[8,定理 2.1]得$\widetilde{\varphi^K}$是满同态。

$\Leftarrow$。只需证在上述正合列 Λ 中,$\begin{pmatrix}K_1\\K_2\end{pmatrix}_{\varphi^K}$是 Gorenstein FP-内射的。因为 G-FP-id(M_2)$\leqslant n$,所以由推论 2.1知 K_2 是 Gorenstein FP-内射的。用函子 $\mathrm{Hom}_T\left(\begin{pmatrix}A\\0\end{pmatrix},-\right)$作用正合列$\Lambda$,由文献[11,引理 4.1]得正合列

$$0\to \mathrm{Ker}\ \widetilde{\varphi^M}\to \mathrm{Ker}\ \widetilde{\bar\varphi^0}\to \mathrm{Ker}\ \widetilde{\bar\varphi^1}\to\cdots\to \mathrm{Ker}\ \widetilde{\bar\varphi^{n-1}}\to \mathrm{Ker}\ \widetilde{\varphi^K}\to 0,$$

其中 Ker $\widetilde{\bar\varphi^i}$是内射左 A-模,$i=0,1,\cdots,n-1$。因为 G-FP-id(Ker $\widetilde{\varphi^M}$)$\leqslant n$,所以由推论2.1知 Ker $\widetilde{\varphi^K}$是Gorenstein FP-内射的。由文献[8,定理 2.2]知$\begin{pmatrix}K_1\\K_2\end{pmatrix}_{\varphi^K}$是Gorenstein FP-内射左 T-模。

参考文献:

[1] ENOCHS E E, JENDA O M G. Relative homological algebra[M]. Walter De Gruyter: De Gruyter Expositions in Math, 2000.

[2] MAO Lixin, DING Nanqing. Gorenstein FP-injective and Gorenstein flat modules[J]. Journal of Algebra and Its Applications, 2008, 7(4):491-506.

[3] GAO Zenghui, WANG Fanggui. Coherent rings and Gorenstein FP-injective modules[J]. Communications in Algebra, 2012, 40(5):1669-1679.

[4] HAGHANY A, VARADARAJAN K. Study of formal triangular matrix rings[J]. Communications in Algebra, 1999, 27(11): 5507-5525.

[5] HAGHANY A, VARADARAJAN K. Study of modules over formal triangular matrix rings[J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2000, 147(1):41-58.

[6] ZHANG Pu. Gorenstein projective modules and symmetric recollements[J]. Journal of Algebra, 2013, 388:65-80.

[7] MAO Lixin. Duality pairs and FP-injective modules over formal triangular matrix rings[J]. Communications in Algebra, 2020, 48(12):5296-5310.

[8] 杨银银, 张翠萍. 形式三角矩阵环上的 Gorenstein FP-内射模[J].山东大学学报(理学版), 2022, 57(2):38-44.
YANG Yinyin, ZHANG Cuiping. Gorenstein FP-injective over formal triangular matrix rings[J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2022, 57(2):38-44.

[9] 杨燕妮, 杨刚. 关于 Gorenstein FP-内射模及维数[J].四川师范大学学报(自然科学版), 2016, 39(1):47-50.
YANG Yanni, YANG Gang. On Gorenstein FP-injective module and dimensions[J]. Journal of Sichuan Normal University (Natural Science), 2016, 39(1):47-50.

[10] HAGHANY A, MAZROOEI M, VEDADI M R. Pure projectivity and pure injectivity over formal triangular matrix rings[J]. Journal of Algebra and Its Applications, 2012, 11(6):1-13.

[11] MAO Lixin. Cotorsion pairs and approximation classes over formal triangular matrix rings[J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2020, 224:1-9.

(编辑:李艺)