文章编号:1671-9352(2025)08-0001-05 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.477

齐次树上关于倍测度的分数次极大算子的有界性

叶晓峰,熊守龙,姜智聪
(华东交通大学理学院, 江西 南昌 330013)

摘要:定义分数次极大算子,并找到它的一个与极大算子相关的控制函数,由极大算子的弱(1,1)型得到分数次极大算子在齐次树上的有界性。

关键词:齐次树;分数次极大算子;倍测度
中图分类号:O177 **文献标志码**:A
引用格式:叶晓峰,熊守龙,姜智聪.齐次树上关于倍测度的分数次极大算子的有界性[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(8):1-5.

Boundedness of fractional maximal operators with doubling measure on homogeneous trees

YE Xiaofeng, XIONG Shoulong, JIANG Zhicong
(School of Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, Jiangxi, China)

Abstract: We defined the fractional maximal operators and found a control function related to the maximal operators. We obtain the boundedness of fractional maximal operators on homogeneous trees from the weak (1,1) type of maximal operators.
Key words: homogeneous trees; fractional maximal operator; doubling measure

0 引言

当赋予齐次树自带的图距离和计数测度时,它不是全局加倍的,所以为了让齐次树有倍测度, Mari 等在文献[1]中赋予齐次树 Gromove 距离和一个非负递减的有限测度 μ_α。同时定义了齐次树上的伯格曼空间和 L^p 空间,并研究了伯格曼投影的有界性等问题。Gromov 距离使得齐次树上的球成为了扇区,由此,Monti 在文献[2]中定义了齐次树上的极大算子 M 和极大平均震动算子 $M^{\#}$,并证明了极大算子在齐次树上 L^p 空间的有界性等问题,同时也定义了在测度 μ_α 下的 H^1 空间和 BMO 空间。早在 1930 年 Hardy 和 Littlewood[3] 给出了 Hardy-Littlewood 极大函数的概念,Wiener 在 1939 年将其引入了 n 维欧氏空间。此后,随着欧氏空间的广泛应用和调和分析的发展,齐次树现已成为比较成熟的理论,这些经典理论和一些相关算子在一般的 L^p 空间中的有界性已经被文献[4]研究。在这基础上本文定义在齐次树上倍测度 μ_α 下的分数次极大算子和一类积分算子,并证明了它们在 L^p 空间的有界性。在文献[5]中 Levi 和 Santagat 定义了在齐次树上非倍测度下的分数次极大算子,研究了它在洛伦兹空间的有界性。Carbonaro 和 Mauceri 等[6-7] 定义并研究了倍测度和非倍测度下度量空间的 H^1 空间和 BMO 空间。

齐次树上的组合拉普拉斯算子的有界性已经在文献[8]中得到证明。Arditti 等[9] 研究了齐次树上通常图距离和一个加权测度下的 H^1 空间和 BMO 空间。经典的 Hardy-Littlewood 极大算子和分数次极大算子主要是在 n 维欧氏空间中的应用,随着这一理论的完善,本文注意到该理论可以适当定义并应用于齐次树中对其加以研究。本文主要结论是分数次极大算子在齐次树上的有界性。

收稿日期:2023-11-13; **网络出版时间**:2024-12-02 15:41:59
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11661035)
第一作者:叶晓峰(1980—),男,副教授,博士,研究方向为调和分析. E-mail:xiaofye@163.com

1 预备知识

首先简单地介绍一下 q-齐次树，$q>1$。q-齐次树是一个连通的且无圈的图，设 X 是 q-齐次树，对于 $x\in X$，其中 x 为齐次树上的任意一个顶点，且该树的每一个顶点都有 $q+1$ 个顶点与它相邻。齐次树自带图距离 $d:X\times X\to\mathbf{N}$，也就是齐次树上连接任意2个顶点的最短路径的边数。本文固定一个原点 $o\in X$，对于任意的 $x,y\in X$，$d(x,y)$ 就是连接 x 和 y 的最短路径的长度，$|x|=d(o,x)$。对于任意的 $x\in X$，用 $S(x,n)$ 和 $B(x,n)$ 分别表示齐次树上以 x 为球心，$n\in\mathbf{N}$ 为半径的球面和球体：

$$S(x,n)=\{y\in X:d(x,y)=n\},\quad B(x,n)=\{y\in X:d(x,y)\leqslant n\}。$$

定义一个满射的函数 $p:X\backslash\{o\}\to X$，对于任意的 $x\in X\backslash\{o\}$，$|p(x)|=|x|-1$，使得 $p^{\ell}:X\backslash B(o,\ell-1)\to X$。齐次树上点 $x\in X$ 的扇区为

$$T_x:=\{y\in X:x=p^{\ell}(y),\quad \ell=|y|-|x|,\quad \ell\in\mathbf{N}\}\subseteq X,$$

那么知道对于任意的 $x\in X$，$p^{|x|}(x)=o$，且 $T_o=X$。固定2个顶点 $x,y\in X$，称 $x\wedge y$ 为 x 和 y 离原点最近的汇聚点，且 $x\wedge y=p^{|x|-|x\wedge y|}(x)=p^{|y|-|x\wedge y|}(y)$，在这里赋予齐次树另一个距离 Gromov 距离，定义如下：

$$\rho(x,y):=\begin{cases}0, & x=y,\\ \mathrm{e}^{-|x\wedge y|}, & x\neq y。\end{cases}$$

那么齐次树上距离 ρ 下定义的球体 $B_{\rho}(x,r)$ 就是齐次树的扇区：

$$B_{\rho}(x,r):=\{y\in X:\rho(x,y)<r\}=\begin{cases}\{x\}, & 0<r\leqslant \mathrm{e}^{-|x|},\\ T_{p^{|x|+\lfloor \log r\rfloor}(x)}, & \mathrm{e}^{-|x|}<r\leqslant 1,\\ X, & r>1。\end{cases}\tag{1}$$

同时在此基础上赋予齐次树一个非负递减测度 μ_{α}，使得齐次树 X 满足倍测度的条件，定义如下：

$$\mu_{\alpha}(x):=q^{-\alpha|x|},\quad x\in X。$$

定义 $L^p_{\alpha}(X)=L^p(X)$ 且

$$\|f\|_{p,\alpha}:=\Big(\sum_{x\in X}|f(x)|^p q^{-\alpha}|x|\Big)^{\frac{1}{p}}<\infty,\quad 1\leqslant p<\infty,$$

$$\|f\|_{\infty,\alpha}:=\sup_{x\in X}|f(x)|<\infty。$$

引理1[1] 三元组 (X,ρ,μ_{α}) 对于 $\alpha>1$ 是全局加倍的，并且双倍条件常数为 $C_{\alpha}=\max\{q^{\alpha}+1,1-q^{1-\alpha}\}$，也就是说

$$\mu_{\alpha}(B_{\rho}(x,2r))\leqslant C_{\alpha}\mu_{\alpha}(B_{\rho}(x,r)),\quad x\in X,\quad r>0。\tag{2}$$

下一步本文对齐次树做一个划分，使得齐次树满足下面定理的条件。

引理2[1] 对于任意的 $m\in\mathbf{N}$，存在 $I_m\in\mathbf{N}$ 使得 $D_{k,m}\subseteq X$，对于每一个 $k\in\mathscr{T}_m:=\{0,\cdots,I_m\}$，使得集族 $\mathscr{D}$ 定义如下：

$$\mathscr{D}:=\{D_{m,k}\subseteq X:m\in\mathbf{N},\ k\in\mathscr{T}_m\},$$

满足

(i) 对于任意的 $m\in\mathbf{N}$，集族 $\mathscr{D}_m:=\{D_{m,k}:k\in\mathscr{T}_m\}$ 是 X 的一个划分；

(ii) 当 $m>0$ 时，划分 $\mathscr{D}_m$ 是划分 $\mathscr{D}_{m-1}$ 更细一级，也就是说对于任意的 $k'\in\mathscr{T}_{m-1}$，那么存在 $\mathscr{T}_{m,k'}\subseteq\mathscr{T}_m$，使得

$$D_{k',m-1}=\bigsqcup_{k\in I_{m,k'}}D_{k,m};$$

(iii) 对于任意的 $k\in\mathscr{T}_m$ 和 $k'\in\mathscr{T}_{m-1}$，那么存在 $D_{k,m}\subseteq D_{k',m-1}$，有

$$\mu_{\alpha}(D_{k,m})\leqslant\mu_{\alpha}(D_{k',m-1})\leqslant C_{\alpha}\mu_{\alpha}(D_{k,m});$$

(iv) 对于任意的 $v\in X$，$\{v\}\subseteq X$，使得 $m\geqslant|v|$。

下一步定义一些齐次树上的函数。

定义 1　齐次数上关于测度 μ_α 和集族 $\mathscr{D}$ 的 Hardy-Littlewood 极大函数 M

$$Mf(x)=\sup_{\substack{x\in D\\ D\in\mathscr{D}}}\frac{1}{\mu_\alpha(D)}\sum_{z\in D}|f(z)|q^{-\alpha|z|},\quad f:X\to\mathbf{C}。$$

定义 2　分数次 H-L 极大函数 M^η, $\eta\in(0,1)$

$$M^\eta f(x)=\sup_{\substack{x\in D\\ D\in\mathscr{D}}}\frac{1}{\mu_\alpha^\eta(D)}\sum_{z\in D}|f(z)|q^{-\alpha|z|},\quad f:X\to\mathbf{C}。$$

定义 3　齐次数上关于测度 μ_α 的积分算子 I_a, $a>0$

$$I_af=\sum_{y\in X}\frac{1}{||x|-|y||^a}f(y)q^{-\alpha|y|},\quad f:X\to\mathbf{C}。$$

定义 4　设 f 为齐次树 X 上的一个可测函数。f 的分布函数为 $E_f(\lambda)$,定义如下

$$E_f(\lambda)=\mu_\alpha\{x\in X:|f(x)|>\lambda\}。$$

定义 5　弱 $L^p(0<p<\infty)$空间就是关于测度 μ-使得下列范数有限的函数空间:

$$\|f\|_{L^{p,\infty}}=\inf\left\{c>0:E_f(\lambda)\leqslant\frac{c^p}{\lambda^p},\forall\lambda>0\right\}$$

$$=\sup\{\gamma E_f(\gamma)^{\frac{1}{p}}:\gamma>0\}。$$

如果 $p=1$,那么弱 L^∞ 空间就是 $L^\infty(X;\mu)$空间。

2　定理 1 及其证明

定理 1　分数次极大算子 M^η, $\eta\in(0,1)$, $f\in L_\alpha^p$, $1\leqslant p<\frac{1}{1-\eta}$, $\frac{1}{q_1}=\frac{1}{p}+\eta-1$, M^η是弱(p,q_1)型,并且在 $1<p_t<p$, $\frac{1}{\eta}<q_t<\frac{p}{1+p(\eta-1)}$时是强$(p_t,q_t)$型。

定理 2[10](Marcinkiewicz 内插定理)　设(X,μ),(Y,ν)是 2 个测度空间,T 是次线性算子,满足

$$E_{Tf}(\lambda)=\{x\in X:|Tf(x)|>\lambda\},\quad 0<p_0<p_1\leqslant\infty,$$

$$\|f\|_p=\left\{\int_X|f(x)|^p\mathrm{d}\mu(x)\right\}^{\frac{1}{p}}=\left\{\sum_{x\in X}|f(x)|^pq^{-\alpha|x|}\right\}^{\frac{1}{p}},$$

$$\nu(E_{Tf}(\lambda))\leqslant\left(\frac{A_0\|f\|_{p_0}}{\lambda}\right)^{p_0},\quad \nu(E_{Tf}(\lambda))\leqslant\left(\frac{A_1\|f\|_{p_1}}{\lambda}\right)^{p_1},$$

那么对于所有的 $p_0<p<p_1$,有如下估计:

$$\|T(f)\|_{L^p(Y)}\leqslant A\|f\|_{L^p(X)},$$

$$A=2\left(\frac{p}{p-p_0}+\frac{p}{p_1-p}\right)^{\frac{1}{p}}A_0^{\frac{1/p-1/p_1}{1/p_0-1/p_1}}A_1^{\frac{1/p_0-1/p}{1/p_0-1/p_1}}。$$

定理 3[11](Marcinkiewicz 内插定理一般情形)　设 $1\leqslant p_i\leqslant q_i\leqslant\infty$, $i=0,1$, $q_0\neq q_1$, T 是次线性算子,(X,μ),(Y,ν)是 2 个测度空间,若有

$$\|f\|_p=\left\{\int_X|f(x)|^p\mathrm{d}\mu(x)\right\}^{\frac{1}{p}}=\left\{\sum_{x\in X}|f(x)|^pq^{-\alpha|x|}\right\}^{\frac{1}{p}},$$

$$\nu(E_{Tf}(\lambda))\leqslant\left(\frac{A_0\|f\|_{p_0}}{\lambda}\right)^{p_0},\quad \nu(E_{Tf}(\lambda))\leqslant\left(\frac{A_1\|f\|_{p_1}}{\lambda}\right)^{p_1},$$

则

$$\|Tf\|_p\leqslant C_t\|f\|_p,\quad t\in(0,1),$$

其中 $C_t \leqslant KC_0^{1-t}C_1^t$, $K=K(p_0,q_0,p_1,q_1)$, $p_0<p<p_1$, $q_0<q<q_1$ 且当 $t\to 0$ 或 1 时, $K\to+\infty$。

经过引理 2 对齐次树的分解后可以得到以下结果。

定理 4[2]　H-L 极大函数 M 是弱(1,1)型,且当 $1<p\leqslant\infty$,在 L^p 有界。

极大算子 M 在 L_α^∞ 有界和 M 是弱(1,1)型可由式(3)得

$$|Mf(x)|\leqslant\|f\|_{\infty,\alpha},\quad x\in X,$$
$$\mu_\alpha(E_{Mf}(\lambda))\leqslant\frac{\|f\|_{1,\alpha}}{\lambda},\tag{3}$$

那么极大算子 M 在 L_α^p for $1<p<\infty$ 的有界性可以由定理 2 得到。

定理 1 的证明　先证 M^η 是弱 (p,q_1) 型,当 $1<p<\dfrac{1}{1-\eta}$ 时,由 Hölder 不等式,不妨设 $0<\varepsilon<1$ 且取 $\varepsilon=1+p(\eta-1)$,那么

$$\frac{\varepsilon}{p}=\eta+\frac{1}{p}-1=\frac{1}{q_1},$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_\alpha^\eta(D)}\sum_{y\in D}|f(y)|q^{-\alpha|y|}&\leqslant\mu_\alpha^{-\eta}(D)\mu_\alpha^{1-\frac{1}{p}}(D)\Big(\sum_{y\in D}|f(y)|^pq^{-\alpha|y|}\Big)^{\frac{1}{p}}\\&=\mu_\alpha^{1-\frac{1}{p}-\eta}(D)\Big(\sum_{y\in D}|f(y)|^pq^{-\alpha|y|}\Big)^{\frac{1}{p}+\eta-1-\eta+1}\\&=(\|f\chi_D\|_{p,\alpha}^p)^{1-\eta}\mu_\alpha^{1-\frac{1}{p}-\eta}(D)\Big(\sum_{y\in D}|f(y)|^pq^{-\alpha|y|}\Big)^{\frac{1}{p}+\eta-1}\\&=C_{p,\eta}\mu_\alpha^{-\frac{1}{q_1}}(D)\Big(\sum_{y\in D}|f(y)|^pq^{-\alpha|y|}\Big)^{\frac{1}{q_1}},\end{aligned}$$

从而有 $M^\eta f(x)\leqslant C_{p,\eta}M(|f|^p)^{\frac{1}{q_1}}$。设 $E_{M^\eta f}(\lambda)=\{x\in X:M^\eta f(x)>\lambda\}$,因此,

$$\mu_\alpha(E_{M^\eta f}(\lambda))\leqslant\mu_\alpha(\{x\in X:C_{p,r}M(|f|^p)^{\frac{1}{q_1}}>\lambda\})。$$

由定理 4 可知 H-L 极大算子 M 是弱(1,1)型,因此由式(3)可知

$$\mu_\alpha(\{x\in X:M(|f|^p)>\lambda^{q_1}\})\leqslant\frac{C\||f|^p\|_{1,\alpha}}{\lambda^{q_1}}=\frac{C\|f\|_{p,\alpha}^p}{\lambda^{q_1}},$$

从而可知

$$\mu_\alpha(E_{M^\eta f}(\lambda))\leqslant\frac{C\|f\|_{p,\alpha}^p}{\lambda^{q_1}}=\left(\frac{C\|f\|_{p,\alpha}^{\frac{p}{q_1}-1}\|f\|_{p,\alpha}}{\lambda}\right)^{q_1}=\left(\frac{C}{\lambda}\|f\|_{p,\alpha}\right)^{q_1}。$$

当 $p=1$,且 $p<\dfrac{1}{1-\eta}$ 时,取 $\dfrac{1}{q_1}=\eta$,得

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_\alpha^\eta(D)}\sum_{y\in D}|f(y)|q^{-\alpha|y|}&=\mu_\alpha^{-\eta}(D)\Big(\sum_{y\in D}|f(y)|q^{-\alpha|y|}\Big)^{1-\eta+\eta}\\&=(\|f\chi_D\|_{1,\alpha})^{1-\eta}\mu_\alpha^{-\eta}(D)\Big(\sum_{y\in D}|f(y)|q^{-\alpha|y|}\Big)^{\eta}\\&=C_\eta\mu_\alpha^{-\frac{1}{q_1}}(D)\Big(\sum_{y\in D}|f(y)|q^{-\alpha|y|}\Big)^{\frac{1}{q_1}},\end{aligned}$$

那么有 $M^\eta f(x)=C_\eta M(f)^{\frac{1}{q_1}}$,由定理 3 可知

$$\begin{aligned}\mu_\alpha(E_{M^\eta f}(\lambda))=\mu_\alpha(\{x\in X:CM(f)>\lambda^{q_1}\})&\leqslant\frac{C\|f\|_{1,\alpha}}{\lambda^{q_1}}\\&=\left(\frac{C\|f\|_{1,\alpha}^{\frac{1}{q_1}-1}\|f\|_{1,\alpha}}{\lambda}\right)^{q_1}。\end{aligned}$$

因此综合上述,当 $1\leqslant p<\dfrac{1}{1-\eta}$ 时,分数次 H-L 极大算子 M^η,是弱 (p,q_1) 型,并且在这个定理中,当 $p=$

$1/(1-\eta)$时，此时 $q_1=\infty$，那么$M^{\eta}f(x)\leqslant C_{p,\eta}\|f\|_{p,\alpha}$, i.e.

$$\|M^{\eta}f(x)\|_{\infty,\alpha}\leqslant C_{p,\eta}\|f\|_{p,\alpha}。$$

由定理 3 可以直接得到，当 $1<p_t<p$，$\frac{1}{\eta}<q_t<\frac{p}{1+p(\eta-1)}$时，$M$ 是强(p_t,q_t)型。

参考文献：

[1] DE MARI F, MONTI M, VALLARINO M. Harmonic Bergman projectors on homogeneous trees[J]. Potential Analysis, 2024, 61:153-182.

[2] MONTI M. $H^1$and BMO spaces for exponentially decreasing measures on homogeneous trees[EB/OL]. (2023-01-18)[2024-07-03]. https://doi.org/10.48550/arXiv.2301.07600.

[3] HARDY G H, LITTLEWOOD J E. A maximal theorem with function-theoretic applications[J]. Acta Mathematica, 1930, 54(1):81-116.

[4] COIFMAN R R, WEISS G. Extensions of Hardy spaces and their use in analysis[J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1977, 83(4):569-645.

[5] LEVI M, SANTAGATI F. Hardy−Littlewood fractional maximal operators on homogeneous trees[EB/OL]. (2022-11-21)[2024-07-03]. https://doi.org/10.48550/arXiv.2211.11871.

[6] CARBONARO A, MAUCERI G, MEDA S. H^1 and BMO for certain locally doubling metric measure spaces[J]. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze, 2009, 8(3):543-582.

[7] CARBONARO A, MAUCERI G, MEDA S. H^1 and BMO for certain nondoubling metric measure spaces[EB/OL]. (2008-08-01)[2024-07-03]. https://doi.org/10.48550/arXiv.0808.0146.

[8] COWLING M, MEDA S, SETTI A. An overview of harmonic analysis on the group of isometries of a homogeneous tree[J]. Expositiones mathematicae, 1998, 16(5):385-423.

[9] ARDITTI L, TABACCO A, VALLARINO M. BMO spaces on weighted homogeneous trees[J]. The Journal of Geometric Analysis, 2021, 31(9):8832-8849.

[10] ARDITTI L. Analysis on weighted homogeneous trees[D]. Torino: Politecnico di Torino, 2018.

[11] LOFSTROM J B J, BERGH J. Interpolation spaces[EB/OL]. (2020-02-01)[2024-07-03]. https://www.tesble.com/10.1007/978-3-642-66451-9.

（编辑：胡春燕）