山东大学学报(理学版)2025年1月 第60卷 第1期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.60, No.1, 2025

E-mail:xblxb@sdu.edu.cn
http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn
Tel:+86-531-88366917

文章编号:1671-9352(2025)01-0091-10 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.4.2024.013

模糊知识结构的一些性质

张纪平[1,4],吴伟志[2*],周缪娟[3],李进金[1,3]

(1.泉州师范学院数学与计算机科学学院, 福建 泉州 362000; 2.浙江海洋大学信息工程学院, 浙江 舟山 316022; 3.闽南师范大学数学与统计学院, 福建 漳州 363000; 4.福建省大数据管理新技术与知识工程重点实验室(泉州师范学院), 福建 泉州 362000)

摘要:基于模糊粗糙近似算子,提出上、下近似模糊知识状态的概念,讨论上、下近似模糊知识状态集族的表示法,获得上、下近似模糊知识状态集族形成模糊知识结构的充要条件。下近似模糊知识状态集族是模糊闭包空间的充要条件,上近似模糊知识状态集族是模糊知识空间的充要条件,证明同一对模糊粗糙近似算子诱导的模糊闭包空间与模糊知识空间是对偶的,探讨上、下近似模糊知识结构细关系。

关键词:模糊粗糙近似算子;模糊知识结构;模糊闭包空间;模糊知识空间;细关系

中图分类号:TP182 **文献标志码:**A

引用格式:张纪平,吴伟志,周缪娟,等.模糊知识结构的一些性质[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(1):91-100.

Some properties of the fuzzy knowledge structures

ZHANG Jiping[1,4], WU Weizhi[2*], ZHOU Miaojuan[3], LI Jinjin[1,3]

(1. School of Mathematics and Computer Science, Quanzhou Normal University, Quanzhou 362000, Fujian, China; 2. School of Information Engineering, Zhejiang Ocean University, Zhoushan 316022, Zhejiang, China; 3. School of Mathematics and Statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou 363000, Fujian, China; 4. Key Laboratory of New Technologies and Knowledge Engineering for Big Data Management in Fujian Province, Quanzhou Normal University, Quanzhou 362000, Fujian, China)

Abstract: Based on the fuzzy rough approximate operator, the concept of upper and lower approximate fuzzy knowledge states is proposed. A notation of upper and lower approximate fuzzy knowledge states is discussed. A necessary and sufficient conditions for upper and lower approximate fuzzy knowledge states family to form the fuzzy knowledge structure is obtained respectively. The lower approximate fuzzy knowledge state set family is a necessary and sufficient condition for the fuzzy closure space, and the upper approximate fuzzy knowledge state set family is a necessary and sufficient condition for the fuzzy knowledge space. It is also proven that the fuzzy closure space induced by the same pair of fuzzy rough approximation operators is dual to the fuzzy knowledge space, and the fine relationship of the upper and lower approximate fuzzy knowledge structures is explored.

Key words: fuzzy rough approximation operator; fuzzy knowledge structures; fuzzy closure space; fuzzy knowledge space; fine relation

0 引言

知识空间理论[1](knowledge space theory, KST)是一种数学心理学模型,是一套用于评估学习者的知识状态,并提供进一步学习指导的理论框架。目前,KST已成功应用于辅助学习和自适应测试等领域[2-7]。

知识结构是KST的重要概念之一,为建立特定领域或学科的知识之间的关系并评估学习者掌握的知识

收稿日期:2024-05-14;**网络出版时间:**2024-12-05 10:48:08

基金项目:国家自然科学基金资助项目(12371466, 12271191, 11871259);福建省自然科学基金资助项目(2023J01122, 2023J01125, 2023J05175, 2022J01306, 2022J05169)

第一作者:张纪平(1971—),男,副教授,硕士,研究方向为基础数学、模糊集理论及其应用等. E-mail: zhangmat@qq.com

***通信作者:**吴伟志(1964—),教授,博士生导师,博士,研究方向为粗糙集与概念格、知识空间理论、近似推理等研究. E-mail:wuwz@zjou.edu.cn

提供了依据。目前,构建知识结构的方法有多种,包括专家问询、样本数据分析等[8-11]。Doignon[12]基于问题与技能的关系,提出由技能映射构建知识结构的方法。Sun 等[13]考虑不同问题对技能熟练程度的不同要求,提出模糊技能映射,并给出模糊技能映射下构建知识结构的方法。

粗糙集理论[14](rough set theory, RST)是一种有效处理不确定性问题的数学工具,能够定量分析处理不精确、不一致以及不完整的信息与知识,已广泛应用于机器学习、模式识别、数据挖掘等领域[15-16]。文献[17-18]结合 RST 与 KST,使用粗糙集的方法构建知识结构。文献[19-20]借助粗糙集属性约简的思想,研究获取最小技能集的方法。Liu[21]利用双论域粗糙集方法等价刻画由技能映射诱导出的知识结构。

知识空间理论的核心假设是个体对于问题的回答只分为正确和错误,不适用于评价个体对于主观题的回答。针对这一局限性,可对 KST 进行多分推广。Schrepp[22]首次将 KST 推广到有 2 个以上回答选项的问题,但仅局限于响应类别是线性有序的。Bartl 等[23]从完备剩余格的角度研究了分级知识状态。Stefanutti 等[24]分别从线性有序集和完备格的角度推广 KST。文献[25-26]将拟序知识空间推广到多分情形。在教育学上,个体须掌握多少技能以及掌握技能的熟练度影响着解决问题的程度。为此,Zhou 等[27]提出一类特殊的多分知识结构,即用技能来构造模糊知识结构,这是进一步规划学习路径的前提和基础。

Dubois 等[28]结合模糊集和粗糙集,将 Pawlak 粗糙集推广到模糊粗糙集。杨海龙[29]提出双论域上的粗糙集模型的变换,包括双论域上的分明粗糙集模型的变换、双论域上的模糊粗糙集模型的变换等。本文基于双论域上的模糊粗糙集模型,提出模糊知识状态的概念,研讨上、下近似模糊知识状态集族表示以及形成模糊知识结构条件,特别地,探讨形成模糊闭包空间、模糊知识空间的条件以及模糊知识结构的细关系。

1 预备知识

定义 1[30] 设 A 是非空有限集合 Q 到$[0,1]$的一个映射,即 $A:Q\to[0,1]$, $q\to A(q)$,则称 A 是 Q 上的模糊集,$A(q)$表示 q 对模糊集 A 的隶属度。

记 $\mathscr{F}(Q)=\{A\mid A:Q\to[0,1]\}$为 Q 上的所有模糊子集构成的集族,非空有限集合 Q 到$[0,1]$的映射 A:

$$Q\to[0,1],\ A=\left\{\frac{A(q)}{q}\mid q\in Q\right\}。$$

$\mathscr{F}(Q)$上的数乘运算法则如下:对于 $A\in\mathscr{F}(Q)$, $\lambda\in[0,1]$,记 $\lambda A=\{\frac{\lambda\cdot A(q)}{q}\mid q\in Q\}$,则 $\lambda A\in\mathscr{F}(Q)$。

对 A, $B\in\mathscr{F}(Q)$, $\mathscr{F}(Q)$上的相等、并、交运算法则如下:

(1) $A=B\Leftrightarrow A(q)=B(q)$, $\forall q\in Q$;

(2) $(A\cup B)(q)=A(q)\vee B(q)=\max\{A(q),B(q)\}$, $\forall q\in Q$;

(3) $(A\cap B)(q)=A(q)\wedge B(q)=\min\{A(q),B(q)\}$, $\forall q\in Q$。

定义 2[31] 设 Q 与 S 是 2 个非空论域,称模糊子集 $R\in\mathscr{F}(Q\times S)$是从 Q 到 S 上的一个模糊二元关系(简称模糊关系),$R(q,s)$表示对象 q 与 s 之间有关系 R 的程度,其中$(q,s)\in Q\times S$。若 $\forall q\in Q$, $\bigvee_{s\in S}R(q,s)=1$,则称 R 是从 Q 到 S 上的串行模糊关系。

定义 3[31] 设 R 是 Q 上模糊关系,有以下界定:

(1) 若 $\forall q\in Q$, $R(q,q)=1$,则称 R 是自反的;(2) 若 $\forall q,q'\in U$, $R(q,q')=R(q',q)$,则称 R 是对称的;

定义 4[31] 设 R 是从 Q 到 S 上的一个模糊关系,称三元组(Q,S,R)为模糊近似空间, $\forall q\in Q$, $A\in\mathscr{F}(S)$,A 关于模糊近似空间(Q,S,R)的下近似 $\underline{R}(A)$与上近似 $\overline{R}(A)$是 Q 的一对模糊子集,其隶属函数分别定义为 $\underline{R}(A)(q)=\bigwedge_{s\in S}((1-R(q,s))\vee A(s))$, $\overline{R}(A)(q)=\bigvee_{s\in S}(R(q,s)\wedge A(s))$。

$\underline{R}$、$\overline{R}$ 是 $\mathscr{F}(S)$到 $\mathscr{F}(Q)$的集合算子,称 $\underline{R}$ 为模糊粗糙下近似算子,称 $\overline{R}$ 为模糊粗糙上近似算子,当 $\underline{R}(A)=\overline{R}(A)$时,称 A 关于(Q,S,R)是可定义的,称$(\underline{R}(A),\overline{R}(A))$是一个模糊粗糙集。若 R 是从 Q 到 S 上

的串行模糊关系，则称(Q,S,R)是串行模糊近似空间，相应的近似算子称为串行模糊粗糙近似算子；若 $Q=S$ 且 R 是 Q 上自反（对称）模糊关系，则称(Q,R)为自反（对称）模糊近似空间，相应的近似算子称为自反（对称）模糊粗糙近似算子。

定义 5[31]　对于 $A\in\mathscr{F}(Q)$，记 $A_\alpha=\{q\in Q\mid A(q)\geqslant\alpha\}$，$\alpha\in[0,1]$，$A_{\alpha+}=\{q\in Q\mid A(q)>\alpha\}$，$\alpha\in[0,1)$，称 A_α 为 A 的 α-水平集或 α-截集，$A_{\alpha+}$为 A 的 α-强水平集或 α-强截集。

命题 1[31]　设 R 是从 Q 到 S 上的模糊关系，$\forall A,B\in\mathscr{F}(S)$，$\forall A_j\in\mathscr{F}(S)$，$\forall j\in J$，$J$ 是任意指标集，$\forall M\in\mathscr{P}(S)$，$\forall(q,s)\in Q\times S$，$\forall\alpha\in[0,1]$，则由定义 4 所给出的模糊粗糙近似算子 $\overline{R}$ 与 $\underline{R}$ 满足下列性质：

(1) $\underline{R}(A)=\sim\overline{R}(\sim A)$；

(2) $\overline{R}(A)=\sim\underline{R}(\sim A)$；

(3) $\underline{R}(A\cup\hat{\alpha})=\underline{R}(A)\cup\hat{\alpha}$；

(4) $\overline{R}(A\cap\hat{\alpha})=\overline{R}(A)\cap\hat{\alpha}$；

(5) $\underline{R}(\bigcap_{j\in J}A_j)=\bigcap_{j\in J}\underline{R}(A_j)$；

(6) $\overline{R}(\bigcup_{j\in J}A_j)=\bigcup_{j\in J}\overline{R}(A_j)$；

(7) 若 $A\subseteq B$，则 $\underline{R}(A)\subseteq\underline{R}(B)$；

(8) 若 $A\subseteq B$，则 $\overline{R}(A)\subseteq\overline{R}(B)$；

(9) $\underline{R}(\bigcup_{j\in J}A_j)\supseteq\bigcup_{j\in J}\underline{R}(A_j)$；

(10) $\overline{R}(\bigcap_{j\in J}A_j)\subseteq\bigcap_{j\in J}\overline{R}(A_j)$；

(11) $\overline{R}(1_s)(q)=R(q,s)$；

(12) $\underline{R}(1_{S-\{s\}})(q)=1-R(q,s)$；

(13) $\overline{R}(1_M)(q)=\sup\{R(q,s)\mid s\in M\}$；

(14) $\underline{R}(1_M)(q)=\inf\{1-R(q,s)\mid s\notin M\}$。

注 1　由(3)得 $\underline{R}(S)=Q$，由(4)得 $\overline{R}(\varnothing)=\varnothing$。

注 2　$\hat{\alpha}$ 为隶属度恒取 α 的常数模糊集，1_s 表示单点集$\{s\}$的特征函数，$1_{S-\{s\}}$ 表示集合 $S-\{s\}$ 的特征函数。

命题 2[31]　设 R 是从 Q 到 S 上的模糊关系，则 R 是串行的当且仅当下列性质之一成立：

(1) $\underline{R}(\varnothing)=\varnothing$；

(2) $\overline{R}(S)=Q$；

(3) $\underline{R}(\hat{\alpha})=\hat{\alpha}$，$\forall\alpha\in[0,1]$；

(4) $\underline{R}(\hat{\alpha})=\hat{\alpha}$，$\forall\alpha\in[0,1]$；

(5) $\underline{R}(A)\subseteq\overline{R}(A)$，$\forall A\in\mathscr{F}(S)$。

命题 3[31]　设 R 是 Q 上模糊关系，则 R 是自反模糊关系当且仅当下列性质之一成立：(1) $\underline{R}(A)\subseteq A$，$\forall A\in\mathscr{F}(Q)$；(2) $A\subseteq\overline{R}(A)$，$\forall A\in\mathscr{F}(Q)$。

2　模糊粗糙近似算子构建的知识结构

本章定义模糊知识状态的概念，利用离散型分解定理得到上、下近似模糊知识状态集族表示法，并用模糊粗糙近似算子的性质得到上、下近似模糊知识状态集族形成模糊知识结构、模糊闭包空间、模糊知识空间的条件，特别地，同一模糊近似空间诱导的模糊闭包空间与诱导的模糊知识空间是对偶的。

定义 6[27]　设 Q 是非空有限问题域，映射 $K:Q\to[0,1]$称为模糊知识状态，对于 $q\in Q$，$K(q)$表示解决问题 q 的程度或关于问题 q 的响应值：如 $K(q)=0$，说明问题 q 没有被解决或没有被响应；如 $K(q)=1$，说明问题 q 已完全被解决或完全被响应；如对于任意 $q\in Q$，$K(q)=0$，则称 $K:Q\to[0,1]$是 0 值映射，记为空集 $\varnothing$；如对于任意 $q\in Q$，$K(q)=1$，记为全集 Q。设 $\mathscr{K}$ 是模糊知识状态构成的集族，如 $\mathscr{K}$ 包含空集$\varnothing$和全集

Q,则称$(Q,\mathscr{K})$是模糊知识结构。若$\mathscr{K}$是模糊知识结构且满足并封闭,则称$\mathscr{K}$是模糊知识空间;若$\mathscr{K}$是模糊知识结构且满足交封闭,则称$\mathscr{K}$是模糊闭包空间;若$\mathscr{K}$是模糊知识结构并且满足交和并封闭,则称$\mathscr{K}$是模糊拟序空间。

定义 7 设Q是非空有限问题域,S是非空有限技能域,R是从Q到S的一个模糊关系,即$R:Q\times S\to[0,1]$,(Q,S,R)称为一个模糊近似空间。

$\forall q\in Q$, $A\in\mathscr{F}(S)$, A的模糊粗糙下近似算子和模糊粗糙上近似算子分别定义为

(1) $\underline{R}(A)(q)=\bigwedge\limits_{s\in S}((1-R(q,s))\vee A(s))$;

(2) $\overline{R}(A)(q)=\bigvee\limits_{s\in S}(R(q,s)\wedge A(s))$。

称$\underline{K}=\underline{R}(A)$为$A$的下近似模糊知识状态;称$\underline{\mathscr{K}}=\{\underline{R}(A)\mid A\in\mathscr{F}(S)\}$为下近似模糊知识状态集族;称$\overline{K}=\overline{R}(A)$为$A$的上近似模糊知识状态;称$\overline{\mathscr{K}}=\{\overline{R}(A)\mid A\in\mathscr{F}(S)\}$为上近似模糊知识状态集族。

例 1 设(Q,S,R)是模糊近似空间,$Q=\{q_1,q_2,q_3,q_4\}$, $S=\{s_1,s_2,s_3,s_4\}$,二元关系R如表1所示。

表1 例1中的二元关系

Table 1 Binary relationship in example 1

R	s_1	s_2	s_3	s_4
q_1	0.3	0	0.2	0.1
q_2	0.8	0.5	0	0.6
q_3	0	0.7	0.6	0.3
q_4	0.4	0.9	0	0.5

对于$\mathscr{F}(S)$中的$\varnothing$、S、$\left\{\frac{0.8}{s_1},\frac{0.7}{s_2},\frac{0.5}{s_3},\frac{0.2}{s_4}\right\}$、$\left\{\frac{0.3}{s_1},\frac{0.4}{s_3},\frac{0.1}{s_4}\right\}$、$\left\{\frac{0.6}{s_1},\frac{0.9}{s_2},\frac{0.6}{s_3},\frac{0.3}{s_4}\right\}$,下近似模糊知识状态分别为$\left\{\frac{0.7}{q_1},\frac{0.2}{q_2},\frac{0.3}{q_3},\frac{0.1}{q_4}\right\}$、$Q$、$\left\{\frac{0.8}{q_1},\frac{0.4}{q_2},\frac{0.5}{q_3},\frac{0.5}{q_4}\right\}$、$\left\{\frac{0.7}{q_1},\frac{0.3}{q_2},\frac{0.3}{q_3},\frac{0.1}{q_4}\right\}$、$\left\{\frac{0.7}{q_1},\frac{0.4}{q_2},\frac{0.6}{q_3},\frac{0.5}{q_4}\right\}$;上近似模糊知识状态分别为$\varnothing$、$\left\{\frac{0.3}{q_1},\frac{0.8}{q_2},\frac{0.7}{q_3},\frac{0.9}{q_4}\right\}$、$\left\{\frac{0.3}{q_1},\frac{0.8}{q_2},\frac{0.7}{q_3},\frac{0.7}{q_4}\right\}$、$\left\{\frac{0.3}{q_1},\frac{0.3}{q_2},\frac{0.4}{q_3},\frac{0.3}{q_4}\right\}$、$\left\{\frac{0.3}{q_1},\frac{0.6}{q_2},\frac{0.7}{q_3},\frac{0.9}{q_4}\right\}$。

引理 1(离散型分解定理) 设Q是非空有限论域,$A\in\mathscr{F}(Q)$,则存在有限个数$\alpha_i\in[0,1]$, $i=1,2,\cdots,N$, $N\leqslant|Q|$,使得$A=\bigcup\limits_{i\in\{1,2,\cdots,N\}}(\widehat{\alpha_i}\cap A_{\alpha_i})$。

证明 对数集$\{A(q)\mid q\in Q\}$进行从小到大严格排序,记为$\alpha_0=0<\alpha_1<\alpha_2\cdots<\alpha_N\leqslant 1$, $N\leqslant|Q|$,对于$q\in Q$, $\exists j\in\{0,1,2,\cdots,N\}$, $A(q)=\alpha_j$,从而

$$A(q)=\alpha_j=\bigvee_{i\in\{0,1,2,\cdots,j\}}\alpha_i=\bigvee_{i\in\{0,1,2,\cdots,j\}}(\alpha_i\wedge 1_{A_{\alpha_i}}(q))=\bigvee_{i\in\{0,1,2,\cdots,N\}}(\alpha_i\wedge 1_{A_{\alpha_i}}(q))=\bigcup_{i\in\{0,1,2,\cdots,N\}}(\widehat{\alpha_i}\cap A_{\alpha_i})(q),$$

因此,$A=\bigcup\limits_{i\in\{0,1,2,\cdots,N\}}(\widehat{\alpha_i}\cap A_{\alpha_i})$。

记号 1 设(Q,S,R)是模糊近似空间,对$s\in S$,记$h_s=|\{R(q,s)\in(0,1]:q\in Q\}|\leqslant|Q|$, $w_i\in\{1,2,3,\cdots,|Q|\}$,$\alpha_i(s)=\begin{cases}0, & i=0\\ R(q_{w_i},s), & 1\leqslant i\leqslant h_s\end{cases}$,那么,按隶属度的大小将$\{R(q,s)\in(0,1]:q\in Q\}$进行的严格递增排序为$0<R(q_{w_1},s)<R(q_{w_2},s)<\cdots<R(q_{w_{(h_s-1)}},s)<R(q_{w_{h_s}},s)\leqslant 1$,即$\alpha_0(s)=0<\alpha_1(s)<\alpha_2(s)<\cdots<\alpha_{h_s-1}(s)<\alpha_{h_s}(s)\leqslant 1$。

由引理1,可得$R(q,s)=\bigcup\limits_{i\in\{0,1,2,\cdots,h_s\}}(\widehat{\alpha_i(s)}\wedge 1_{R_{\alpha_i(s)}})(q)$,其中$R_{\alpha_{i(s)}}$是$R(q,s)$在非空有限问题域$Q$上的$\alpha_i(s)$-截集。

定理 1 设(Q,S,R)是模糊近似空间,(Q,S,R)诱导的上近似模糊知识状态集族为$\overline{\mathscr{K}}$,对于$A\in\mathscr{F}(S)$,记$\overline{\mathscr{K}_s}(A)=\bigvee\limits_{i\in\{0,1,2,\cdots,h_s\}}((\widehat{\alpha_i(s)}\wedge 1_{R_{\alpha_i(s)}})\wedge A(s))$,则$\overline{\mathscr{K}}=\{\bigcup\limits_{s\in S}\overline{\mathscr{K}_s}(A)\mid A\in\mathscr{F}(S)\}$。

证明 注意到$R(q,s)=\bigvee\limits_{i\in\{0,1,2,\cdots,h_s\}}(\widehat{\alpha_i(s)}\wedge 1_{R_{\alpha_i(s)}})(q)$, $R_{\alpha_{i(s)}}$是$R(q,s)$在非空有限问题域Q上的

$\alpha_i(s)$-截集,则对于 $A\in\mathscr{F}(S)$, $q\in Q$,有

$$\begin{aligned}\bar{R}(A)(q)&=\bigvee_{s\in S}(R(q,s)\wedge A(s))=\bigvee_{s\in S}((\bigvee_{i\in\{0,1,2,\cdots,h_s\}}(\widehat{\alpha_i(s)}\wedge 1_{R_{\alpha_i(s)}})(q))\wedge A(s))\\&=\bigvee_{s\in S}(\bigvee_{i\in\{0,1,2,\cdots,h_s\}}(\widehat{\alpha_i(s)}\wedge 1_{R_{\alpha_i(s)}})(q)\wedge A(s)))\\&=\bigvee_{s\in S}(\bigvee_{i\in\{0,1,2,\cdots,h_s\}}(((\widehat{\alpha_i(s)}\wedge 1_{R_{\alpha_i(s)}})\wedge A(s))(q))=\bigvee_{s\in S}\overline{\mathscr{K}_s}(A)(q),\end{aligned}$$

因此,$\overline{\mathscr{K}}=\{\bigcup_{s\in S}\overline{\mathscr{K}_s}(A)\mid A\in\mathscr{F}(S)\}$。

注 3　当 R 是从 Q 到 S 的一个串行模糊关系,$\varnothing$、$Q\in\overline{\mathscr{K}}$,这表明 $\overline{\mathscr{K}}$ 是一个是模糊知识结构。

记号 2　设(Q,S,R)是模糊近似空间,对 $s\in S$,记 $h_s=|\{R(q,s)\in(0,1]:q\in Q\}|\leqslant|Q|$, $w_i\in\{1,2,3,\cdots,|Q|\}$, $\beta_i(s)=\begin{cases}0, & i=0\\1-R(q_{w_i},s), & 1\leqslant i\leqslant h_s\end{cases}$,按隶属度的大小将$\{1-R(q,s)\in(0,1]:q\in Q\}$进行的严格递增排序为 $0<1-R(q_{w_1},s)<1-R(q_{w_2},s)<\cdots<1-R(q_{w_{(h_s-1)}},s)<1-R(q_{w_{h_s}},s)\leqslant 1$,即 $\beta_0(s)=0<\beta_1(s)<\beta_2(s)<\cdots<\beta_{h_s-1}(s)<\beta_{h_s}(s)\leqslant 1$。

由引理 1,可得 $R(q,s)=\bigvee_{i\in\{0,1,2,\cdots,h_s\}}(\widehat{\beta_i(s)}\wedge 1_{R_{\beta_i(s)}})(q)$,这里 $R_{\beta_{i(s)}}$ 是 $R(q,s)$ 在非空有限问题域 Q 上的 $\beta_i(s)$-截集。

定理 2　设(Q,S,R)是模糊近似空间,(Q,S,R)诱导的下近似模糊知识状态集族为 $\underline{\mathscr{K}}$。记 $\underline{\mathscr{K}_s}(A)=\bigwedge_{i\in\{0,1,2,\cdots,h_s\}}((1-(\widehat{\beta_i(s)}\wedge 1_{R_{\beta_i(s)}}))\vee A(s))$,则 $\underline{\mathscr{K}}=\{\bigcap_{s\in S}\underline{\mathscr{K}_s}(A)\mid A\in\mathscr{F}(S)\}$。

证明　注意到 $R(q,s)=\bigvee_{i\in\{0,1,2,\cdots,h_s\}}(\widehat{\beta_i(s)}\wedge 1_{R_{\beta_i(s)}})(q)$,$R_{\beta_{i(s)}}$是 $R(q,s)$ 在非空有限问题域 Q 上的 $\beta_i(s)$-截集,则对于 $A\in\mathscr{F}(S)$, $q\in Q$,有

$$\begin{aligned}\underline{R}(A)(q)&=\bigwedge_{s\in S}((1-R(q,s))\vee A(s))=\bigwedge_{s\in S}((1-\bigvee_{i\in\{0,1,2,\cdots,h_s\}}(\widehat{\beta_i(s)}\wedge 1_{R_{\beta_i(s)}})(q))\vee A(s))\\&=\bigwedge_{s\in S}((\bigwedge_{i\in\{0,1,2,\cdots,h_s\}}(1-(\widehat{\beta_i(s)}\wedge 1_{R_{\beta_i(s)}}(q))))\vee A(s))\\&=\bigwedge_{s\in S}(\bigwedge_{i\in\{0,1,2,\cdots,h_s\}}((1-(\widehat{\beta_i(s)}\wedge 1_{R_{\beta_i(s)}}))\vee A(s))(q))=\bigwedge_{s\in S}\underline{\mathscr{K}_s}(A)(q),\end{aligned}$$

因此,$\underline{\mathscr{K}}=\{\bigcap_{s\in S}\underline{\mathscr{K}_s}(A)\mid A\in\mathscr{F}(S)\}$。

注 4　当 R 是从 Q 到 S 的一个串行模糊关系,$\varnothing$, $Q\in\underline{\mathscr{K}}$,表明 $\underline{\mathscr{K}}$ 是一个是模糊知识结构。

定理 3　设(Q,S,R)是模糊近似空间,$\underline{\mathscr{K}}$ 是模糊闭包空间当且仅当 R 是 Q 到 S 的一个串行模糊关系。

证明　充分性。由于 $\underline{\mathscr{K}}$ 是模糊闭包空间,因此 $\varnothing\in\underline{\mathscr{K}}$,表明 $\exists A\in\mathscr{F}(S)$,对 $\forall q\in Q$,有 $\underline{R}(A)(q)=\varnothing(q)=0$。由于 $\underline{R}(A)(q)=\bigwedge_{s\in S}((1-R(q,s))\vee A(s))$,表明 $\exists s'\in S$, $(1-R(q,s'))\vee A(s')=0$, $R(q,s')=1$,因此,R 是从 Q 到 S 的一个串行模糊关系。

必要性。R 是从 Q 到 S 的一个模糊串行关系,则由注 1、命题 2 的(2)知,$\varnothing,Q\in\underline{\mathscr{K}}$。又由命题 1 的(5)知 $\underline{R}(\bigcap_{i\in I}A_i)=\bigcap_{i\in I}\underline{R}(A_i)$, $A_i\in\mathscr{F}(S)$,那么 $\underline{\mathscr{K}}$ 是交封闭的,于是,$\underline{\mathscr{K}}$ 是模糊闭包空间。

例 2　设(Q,S,R)是模糊近似空间,其中 $Q=\{q_1,q_2,q_3,q_4,q_5\}$, $S=\{s_1,s_2,s_3,s_4\}$, 二元关系 R 如表 2 所示。

表 2　例 2 中的二元关系

Table 2　Binary relationship in example 2

R	s_1	s_2	s_3	s_4
q_1	0.3	1.0	0.2	0.1
q_2	0.8	0.5	1.0	0.6
q_3	1.0	0.7	0.6	0.3
q_4	0.4	0.9	1.0	0.5

对于 $\mathscr{F}(S)$ 中的 $\varnothing$、S、$\left\{\frac{0.8}{s_1},\frac{0.7}{s_2},\frac{0.5}{s_3},\frac{0.2}{s_4}\right\}$、$\left\{\frac{0.3}{s_1},\frac{0.4}{s_3},\frac{0.1}{s_4}\right\}$、$\left\{\frac{0.6}{s_1},\frac{0.9}{s_2},\frac{0.6}{s_3},\frac{0.3}{s_4}\right\}$,下近似模糊知识状态分别为 $\varnothing$、Q、$\left\{\frac{0.7}{q_1},\frac{0.4}{q_2},\frac{0.5}{q_3},\frac{0.5}{q_4}\right\}$、$\left\{\frac{0.3}{q_2},\frac{0.3}{q_3},\frac{0.1}{q_4}\right\}$、$\left\{\frac{0.7}{q_1},\frac{0.4}{q_2},\frac{0.6}{q_3},\frac{0.5}{q_4}\right\}$。

定理 4 设 (Q,S,R) 是模糊近似空间,$\overline{\mathscr{K}}$ 是模糊知识空间当且仅当 R 是从 Q 到 S 的一个串行模糊关系。

证明 *充分性*。由于 $\overline{\mathscr{K}}$ 是模糊知识空间,因此 $Q\in\overline{\mathscr{K}}$,这表明 $\exists A\in\mathscr{F}(S)$,对 $\forall q\in Q$,有 $\underline{R}(A)(q)=Q(q)=1$。由于 $\bar{R}(A)(q)=\bigvee\limits_{s\in S}(R(q,s)\wedge A(s))$,表明 $\exists s'\in S$, $(R(q,s')\wedge A(s'))=1$, $R(q,s')=1$,因此,R 是从 Q 到 S 的一个串行模糊关系。

必要性。由于 R 是从 Q 到 S 的一个模糊串行关系,因此由注 1、命题 2 的(1)知,Q, $\varnothing\in\underline{\mathscr{K}}$。又由命题 1 的(6)知 $\bar{R}(\bigcup\limits_{i\in I}A_i)=\bigcup\limits_{i\in I}\bar{R}(A_i)$,那么 $\overline{\mathscr{K}}$ 是并封闭的,于是,$\overline{\mathscr{K}}$ 是模糊知识空间。

例 3 设 (Q,S,R) 是模糊近似空间,其中 $Q=\{q_1,q_2,q_3,q_4,q_5\}$, $S=\{s_1,s_2,s_3,s_4\}$, 二元关系 R 如表 2 所示。

对于 $\mathscr{F}(S)$ 中的 $\varnothing$、S、$\left\{\frac{0.8}{s_1},\frac{0.7}{s_2},\frac{0.5}{s_3},\frac{0.2}{s_4}\right\}$、$\left\{\frac{0.3}{s_1},\frac{0.4}{s_3},\frac{0.1}{s_4}\right\}$、$\left\{\frac{0.6}{s_1},\frac{0.9}{s_2},\frac{0.6}{s_3},\frac{0.3}{s_4}\right\}$,上近似模糊知识状态分别为 $\varnothing$、Q、$\left\{\frac{0.7}{q_1},\frac{0.8}{q_2},\frac{0.8}{q_3},\frac{0.7}{q_4}\right\}$、$\left\{\frac{0.3}{q_1},\frac{0.4}{q_2},\frac{0.4}{q_3},\frac{0.4}{q_4}\right\}$、$\left\{\frac{0.9}{q_1},\frac{0.6}{q_2},\frac{0.7}{q_3},\frac{0.9}{q_4}\right\}$。

定理 5 设 (Q,S,R) 是模糊近似空间,R 是 Q 到 S 上的一个串行模糊关系,则 (Q,S,R) 诱导的模糊知识空间 $\overline{\mathscr{K}}$ 与 (Q,S,R) 诱导的模糊闭包空间 $\underline{\mathscr{K}}$ 是对偶的,即 $\overline{\mathscr{K}}=\{\sim\underline{K}\mid\underline{K}\in\underline{\mathscr{K}}\}$,且 $\underline{\mathscr{K}}=\{\sim\overline{K}\mid\overline{K}\in\overline{\mathscr{K}}\}$。

证明 根据命题 1 的(1)、(2),$A\in\mathscr{F}(S)$,有 $\bar{R}(A)=\sim\underline{R}(\sim A)$,$\underline{R}(A)=\sim\bar{R}(\sim A)$,因此 $\overline{\mathscr{K}}=\{\sim\underline{K}\mid\underline{K}\in\underline{\mathscr{K}}\}$,且 $\underline{\mathscr{K}}=\{\sim\overline{K}\mid\overline{K}\in\overline{\mathscr{K}}\}$,表明 (Q,S,R) 诱导的模糊知识空间 $\overline{\mathscr{K}}$ 与 (Q,S,R) 诱导的模糊闭包空间 $\underline{\mathscr{K}}$ 是对偶的。

定理 6 设 Q 是非空有限问题域,若 R 是 Q 上的自反模糊关系,则 $\{A\mid A\in\mathscr{F}(Q),\ A=\underline{R}(A)\}$ 是一个模糊拟序空间。

证明 记 $\mathscr{L}=\{A\mid A\in\mathscr{F}(Q),\ A=\underline{R}(A)\}$,由于 R 是 Q 上的自反模糊关系,因此也是一个串行关系,由定理 1, $\{\underline{R}(A)\mid A\in\mathscr{F}(Q)\}$ 是一个模糊闭包空间。根据命题 3 的(1), $A_i\in\mathscr{L}$, $i\in I$,有

(1) $\underline{R}(\bigcap\limits_{i\in I}A_i)=\bigcap\limits_{i\in I}\underline{R}(A_i)=\bigcap\limits_{i\in I}A_i$, $\bigcap\limits_{i\in I}A_i\in\mathscr{L}$;

(2) $\bigcup\limits_{i\in I}A_i=\bigcup\limits_{i\in I}\underline{R}(A_i)\subseteq\underline{R}(\bigcup\limits_{i\in I}A_i)\subseteq\bigcup\limits_{i\in I}A_i$, $\underline{R}(\bigcup\limits_{i\in I}A_i)=\bigcup\limits_{\in I}A_i$, $\bigcup\limits_{i\in I}A_i\in\mathscr{L}$,

因此,$\mathscr{L}$ 是即交封闭又并封闭的,是一个模糊拟序空间。

定理 7 Q 是非空有限问题域,若 R 是 Q 上的自反模糊关系,则 $\{A\mid A\in\mathscr{F}(Q),\ A=\bar{R}(A)\}$ 是一个模糊拟序空间。

证明 记 $\mathscr{H}=\{A\mid A\in\mathscr{F}(Q),\ A=\bar{R}(A)\}$,由于 R 是 Q 上的自反模糊关系,因此也是一个串行关系,由定理 1,$\{\bar{R}(A)\mid A\in\mathscr{F}(Q)\}$ 是一个模糊知识空间。根据命题 3 的(2),$A_i\in\mathscr{H}$, $i\in I$,有

(1) $\bar{R}(\bigcup\limits_{i\in I}A_i)=\bigcup\limits_{i\in I}\bar{R}(A_i)=\bigcup\limits_{i\in I}A_i$, $\bigcup\limits_{i\in I}A_i\in\mathscr{H}$;

(2) $\bigcap\limits_{i\in I}A_i=\bigcap\limits_{i\in I}\bar{R}(A_i)\supseteq\bar{R}(\bigcap\limits_{i\in I}A_i)\supseteq\bigcap\limits_{i\in I}A_i$, $\bar{R}(\bigcap\limits_{i=1}A_i)=\bigcap\limits_{i=1}A_i$,$\bigcap\limits_{i=1}A_i\in\mathscr{H}$,

因此,$\mathscr{H}$ 是即交封闭又并封闭的,是一个模糊拟序空间。

3 模糊知识结构间的细关系

本章定义 2 个或多个模糊闭包空间的细于概念、模糊知识空间的加细概念,探讨模糊闭包空间、模糊知识空间良好的细关系。

以下模糊关系 $R_i(i=1,2,\cdots,n)$，R 是从 Q 到 S 的串行模糊关系。

定义 8　设(Q,S,R_1)、(Q,S,R_2)是模糊近似空间，它们的模糊粗糙下近似算子诱导的模糊闭包空间分别为$\underline{\mathscr{K}_1}$、$\underline{\mathscr{K}_2}$，若 $\forall \underline{K_2} \in \underline{\mathscr{K}_2}$，都存在$\underline{K_1} \in \underline{\mathscr{K}_1}$，使得$\underline{K_1} \subseteq \underline{K_2}$，则称$\underline{\mathscr{K}_1}$细于$\underline{\mathscr{K}_2}$，记作$\underline{\mathscr{K}_1} \prec \underline{\mathscr{K}_2}$。

例 4　设(Q,S,R_1)、(Q,S,R_2)是模糊近似空间，其中 $Q=\{q_1,q_2,q_3\}$，$S=\{s_1,s_2,s_3\}$，二元关系 R_1、R_2 如表 3、4 所示，$R_1 \subseteq R_2$。

表 3　例 4 中的二元关系

Table 3　Binary relationship in example 4

R_1	s_1	s_2	s_3
q_1	0.3	**1.0**	0.2
q_2	0.8	0.5	**1.0**
q_3	**1.0**	0.7	0.6

表 4　例 4 中的二元关系

Table 4　Binary relationship in example 4

R_2	s_1	s_2	s_3
q_1	0.3	**1.0**	0.2
q_2	0.8	**0.9**	1.0
q_3	**1.0**	0.7	0.6

对于$\mathscr{F}(S)$中的 $A=\left\{\dfrac{0.3}{s_1},\dfrac{0}{s_2},\dfrac{0.4}{s_3}\right\}$按定义 7 或定理 1，计算可得$(Q,S,R_1)$、$(Q,S,R_2)$的模糊粗糙下近似算子诱导的知识状态分别为$\underline{R_1}(A)=\left\{\dfrac{0}{q_1},\dfrac{0.3}{q_2},\dfrac{0.3}{q_3}\right\}$，$\underline{R_2}(A)=\left\{\dfrac{0}{q_1},\dfrac{0.1}{q_2},\dfrac{0.3}{q_3}\right\}$，从而$\underline{R_1}(A) \supseteq \underline{R_2}(A)$。

注 5　对于$\mathscr{F}(S)$中的任一 A，亦有$\underline{R_1}(A) \supseteq \underline{R_2}(A)$，详见推论 2。

定理 8　设(Q,S,R_1)、(Q,S,R_2)、(Q,S,R)是模糊近似空间，它们的模糊粗糙下近似算子诱导的模糊闭包空间分别为$\underline{\mathscr{K}_1}$、$\underline{\mathscr{K}_2}$、$\underline{\mathscr{K}}$。若 $R=R_1 \cup R_2$，则 $\underline{\mathscr{K}}=\{\underline{R_1}(A) \cap \underline{R_2}(A) \mid \underline{R_1}(A) \in \underline{\mathscr{K}_1},\ \underline{R_2}(A) \in \underline{\mathscr{K}_2}\}$。

证明　记$\underline{\mathscr{K}}'=\{\underline{R_1}(A) \cap \underline{R_2}(A) \mid \underline{R_1}(A) \in \underline{\mathscr{K}_1},\ \underline{R_2}(A) \in \underline{\mathscr{K}_2}\}$，则 $\underline{K} \in \underline{\mathscr{K}}$，当且仅当 $\exists A \in \mathscr{F}(S)$，使得 $\underline{R}(A)=\underline{K}$，即 $\forall q \in Q$，$\underline{K}(q)=\underline{R}(A)(q)=\bigwedge\limits_{s \in S}((1-R(q,s)) \vee A(s))=\bigwedge\limits_{s \in S}((1-(R_1 \cup R_2)(q,s)) \vee A(s))=\bigwedge\limits_{s \in S}((1-(R_1(q,s) \vee R_2(q,s))) \vee A(s))=\bigwedge\limits_{s \in S}(((1-R_1(q,s)) \wedge (1-R_2(q,s))) \vee A(s))=\bigwedge\limits_{s \in S}(((1-R_1(q,s)) \vee A(s)) \wedge ((1-R_2(q,s)) \vee A(s)))=(\bigwedge\limits_{s \in S}((1-R_1(q,s)) \vee A(s))) \wedge (\bigwedge\limits_{s \in S}((1-R_2(q_1,s)) \vee A(s)))=\underline{R_1}(A)(q) \wedge \underline{R_2}(A)(q)=(\underline{R_1}(A) \cap \underline{R_2}(A))(q)$，因此，$\underline{\mathscr{K}}=\underline{\mathscr{K}}'$。

由定理 8 得推论 1。

推论 1　设(Q,S,R_i)、(Q,S,R)是模糊近似空间，它们的模糊粗糙下近似算子诱导的模糊闭包空间分别为 $\underline{\mathscr{K}_i}$、$\underline{\mathscr{K}}$。若 $R=\bigcup\limits_{i \in J} R_i$，则 $\underline{\mathscr{K}}=\{\underline{\bigcap\limits_{i \in J} R_i}(A) \mid R_i(A) \in \underline{\mathscr{K}_i}\}$。

推论 2　设(Q,S,R_1)、(Q,S,R_2)是模糊近似空间，它们的模糊粗糙下近似算子诱导的模糊闭包空间分别为$\underline{\mathscr{K}_1}$、$\underline{\mathscr{K}_2}$，若 $R_1 \subseteq R_2$，则$\underline{\mathscr{K}_2}$细于$\underline{\mathscr{K}_1}$，即$\underline{\mathscr{K}_2} \prec \underline{\mathscr{K}_1}$。

证明　$\underline{\mathscr{K}_1}=\{\underline{R_1}(A) \mid A \in \mathscr{F}(S)\}$。由于 $R_1 \subseteq R_2$，则有 $R_2=R_1 \cup R_2$，因此，依定理 5 有

$$\underline{\mathscr{K}_2}=\{\underline{R_1}(A) \cap \underline{R_2}(A) \mid \underline{R_1}(A) \in \underline{\mathscr{K}_1},\ \underline{R_2}(A) \in \underline{\mathscr{K}_2},\ A \in \mathscr{F}(S)\}。$$

又 $\forall A \in \mathscr{F}(S)$，有$\underline{R_1}(A) \cap \underline{R_2}(A) \subseteq \underline{R_1}(A)$，因此，$\underline{\mathscr{K}_2} \prec \underline{\mathscr{K}_1}$。

定义 9　设(Q,S,R_1)、(Q,S,R_2)是模糊近似空间，它们的模糊粗糙上近似算子诱导的模糊知识空间分别为$\overline{\mathscr{K}_1}$、$\overline{\mathscr{K}_2}$，若 $\forall \overline{K_1} \in \overline{\mathscr{K}_1}$，都存在$\overline{K_2} \in \overline{\mathscr{K}_2}$，使得$\overline{K_1} \subseteq \overline{K_2}$，则称$\overline{\mathscr{K}_1}$加细$\overline{\mathscr{K}_2}$，记作$\overline{\mathscr{K}_1} \prec^* \overline{\mathscr{K}_2}$。

例 5　设(Q,S,R_1)、(Q,S,R_2)是模糊近似空间，其中 $Q=\{q_1,q_2,q_3\}$，$S=\{s_1,s_2,s_3\}$，R_1 如表 3 所示，R_2 如表 4 所示，$R_1 \subseteq R_2$。对于 $F(S)$ 中的 $A=\left\{\dfrac{0.6}{s_1},\dfrac{0.9}{s_2},\dfrac{0.6}{s_3}\right\}$按定义 7 或定理 1，计算可得$(Q,S,R_1)$、$(Q,S,R_2)$的模糊粗糙下近似算子诱导的知识状态分别为$\overline{R_1}(A)=\left\{\dfrac{0.9}{q_1},\dfrac{0.6}{q_2},\dfrac{0.7}{q_3}\right\}$，$\overline{R_2}(A)=\left\{\dfrac{0.9}{q_1},\dfrac{0.9}{q_2},\dfrac{0.7}{q_3}\right\}$，从而$\overline{R_1}(A) \subseteq \overline{R_2}(A)$。

注 6　对于$\mathscr{F}(S)$中的任一 A，亦有$\overline{R_1}(A) \subseteq \overline{R_2}(A)$，详见推论 4。

定理 9　设(Q,S,R_1)、(Q,S,R_2)、(Q,S,R)是模糊近似空间，它们的模糊粗糙上近似算子诱导的模糊知识空间分别为$\overline{\mathscr{K}_1}$、$\overline{\mathscr{K}_2}$、$\overline{\mathscr{K}}$，若 $R=R_1 \cup R_2$，则 $\overline{\mathscr{K}}=\{\overline{R_1}(A) \cup \overline{R_2}(A) \mid \overline{R_1}(A) \in \overline{\mathscr{K}_1},\ \overline{R_2}(A) \in \overline{\mathscr{K}_2}\}$。

证明　记$\overline{\mathscr{K}}'=\{\overline{R_1}(A) \cup \overline{R_2}(A) \mid \overline{R_1}(A) \in \overline{\mathscr{K}_1},\overline{R_2}(A) \in \overline{\mathscr{K}_2}\}$。$\overline{K} \in \overline{\mathscr{K}}$ 当且仅当 $\exists A \in \mathscr{F}(S)$，使得

$\overline{R}(A)=\overline{K}$。根据命题 1 的(2)与定理 8,$\overline{R}(A)=\sim(\underline{R}(\sim A))=\sim(\underline{R_1}(\sim A)\cap\underline{R_2}(\sim A))=\overline{R_1}(A)\cup\overline{R_2}(A)$,从而$\overline{K}=\overline{R_1}(A)\cup\overline{R_2}(A)$成立,因此,$\overline{K}=\overline{\mathscr{K}'}$。

由定理 9 得推论 3、4。

推论 3　设$(Q,S,R_i)(i=1,2,\cdots,n)$、$(Q,S,R)$是模糊近似空间,它们的模糊粗糙上近似算子诱导的模糊知识空间分别为$\overline{\mathscr{K}_i}$、$\overline{\mathscr{K}}$。若 $R=\bigcup\limits_{i=1}^{n}R_i$,则 $\overline{\mathscr{K}}=\{\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{R_i}(A)\mid\overline{R_i}(A)\in\overline{\mathscr{K}_i}\}$。

推论 4　设(Q,S,R_1)、(Q,S,R_2)是模糊近似空间,(Q,S,R_1)、(Q,S,R_2)诱导的模糊知识空间分别为$\overline{\mathscr{K}_1}$、$\overline{\mathscr{K}_2}$,若 $R_1\subseteq R_2$,则$\overline{\mathscr{K}_1}$加细$\overline{\mathscr{K}_2}$,记作$\overline{\mathscr{K}_1}\prec^*\overline{\mathscr{K}_2}$。

证明　$\overline{\mathscr{K}_1}=\{\overline{R_1}(A)\mid A\in\mathscr{F}(S)\}$。由于 $R_1\subseteq R_2$,则有 $R_2=R_1\cup R_2$,因此,由定理 9,有

$$\overline{\mathscr{K}_2}=\{\overline{R_1}(A)\cup\overline{R_2}(A)\mid\overline{R_1}(A)\in\overline{\mathscr{K}_1},\ \overline{R_2}(A)\in\overline{\mathscr{K}_2}\}。$$

又由于$\forall\mathscr{A}\in\mathscr{F}(S)$,有$\overline{R_1}(A)\subseteq\overline{R_1}(A)\cup\overline{R_2}(A)$,因此,$\overline{\mathscr{K}_1}$加细$\overline{\mathscr{K}_2}$,记作$\overline{\mathscr{K}_1}\prec^*\overline{\mathscr{K}_2}$。

定理 10　设(Q,S,R_1)、(Q,S,R_2)、(Q,S,R)是模糊近似空间,它们的模糊粗糙上近似算子诱导的模糊闭包空间分别为$\underline{\mathscr{K}_1}$、$\underline{\mathscr{K}_2}$、$\underline{\mathscr{K}}$,若 $R=R_1\cap R_2$,则$\{\underline{R_1}(A)\cup\underline{R_2}(A)\mid\underline{R_1}(A)\in\underline{\mathscr{K}_1},\ \underline{R_2}(A)\in\underline{\mathscr{K}_2}\}\prec^*\underline{\mathscr{K}}$。

证明　对$\forall\underline{K}\in\underline{\mathscr{K}}$,则$\exists A\in\mathscr{F}(S)$,使得 $\underline{R}(A)=\underline{K}$。由于 $R=R_1\cup R_2$,则$\forall q\in Q$,

$$\begin{aligned}\underline{R}(A)(q)&=\bigwedge_{s\in S}((1-R(q,s))\vee A(s))=\bigwedge_{s\in S}((1-(R_1\cap R_2)(q,s))\vee A(s))\\&=\bigwedge_{s\in S}((1-(R_1(q,s)\vee R_2(q,s)))\vee A(s))\\&=\bigwedge_{s\in S}(((1-R_1(q,s))\vee(1-R_2(q,s)))\vee A(s))\\&=\bigwedge_{s\in S}(((1-R_1(q,s))\vee A(s))\vee((1-R_2(q,s))\vee A(s)))\\&\geqslant(\bigwedge_{s\in S}((1-R_1(q,s))\vee A(s)))\vee(\bigwedge_{s\in S}((1-R_2(q_1,s))\vee A(s)))\\&\geqslant\underline{R_1}(A)(q)\vee\underline{R_2}(A)(q)=(\underline{R_1}(A)\cup\underline{R_2}(A))(q),\end{aligned}$$

因此,$\underline{R_1}(A)\cup\underline{R_2}(A)\subseteq\underline{R}(A)$。又$\underline{R_1}(A)\in\underline{\mathscr{K}_1}$, $\underline{R_2}(A)\in\underline{\mathscr{K}_1}$, $\forall\underline{K}\in\underline{\mathscr{K}}$, 则$\underline{R_1}(A)\cup\underline{R_2}(A)\subseteq\underline{K}$ 成立,即$\{\underline{R_1}(A)\cup\underline{R_2}(A)\mid\underline{R_1}(A)\in\underline{\mathscr{K}_1},\ \overline{R_2}(A)\in\overline{\mathscr{K}_2}\}\prec\underline{\mathscr{K}}$。

定理 10 可推广至如下一般情形。

推论 5　设(Q,S,R_i)、(Q,S,R)是模糊近似空间,它们的模糊粗糙上近似算子诱导的模糊闭包空间分别为 $\underline{\mathscr{K}_i}$、$\underline{\mathscr{K}}$, $i=1,2,\cdots,n$,若 $R=\bigcap\limits_{i=1}^{n}R_i$,则$\{\bigcup\limits_{i=1}^{n}\underline{R_i}(A)\mid\underline{R_i}(A)\in\underline{\mathscr{K}_i}\}\prec\underline{\mathscr{K}}$。

定理 11　设(Q,S,R_1)、(Q,S,R_2)、(Q,S,R)是模糊近似空间,它们的模糊粗糙上近似算子诱导的模糊知识空间分别为$\overline{\mathscr{K}_1}$、$\overline{\mathscr{K}_2}$、$\overline{\mathscr{K}}$,若 $R=R_1\cap R_2$,则 $\overline{\mathscr{K}}\prec^*\{\overline{R_1}(A)\cap\overline{R_2}(A)\mid\overline{R_1}(A)\in\overline{\mathscr{K}_1},\overline{R_2}(A)\in\overline{\mathscr{K}_2}\}$。

证明　对 $\overline{K}\in\overline{\mathscr{K}}$,则$\exists A\in F(S)$,使得 $\overline{R}(A)=\overline{K}$。由于 $R=R_1\cup R_2$,且根据命题 1 的(2)知, $\overline{R}(A)=\sim(\underline{R}(\sim A))\subseteq\sim(\underline{R_1}(\sim A)\cup\underline{R_2}(\sim A))=\overline{R_1}(A)\cap\overline{R_2}(A)$,又$\overline{R_1}(A)\in\overline{\mathscr{K}_1}$, $\overline{R_2}(A)\in\overline{\mathscr{K}_2}$, $\forall\overline{K}\in\overline{\mathscr{K}}$,因此有$\overline{K}\subseteq\overline{R_1}(A)\cap\overline{R_2}(A)$成立,即

$$\overline{\mathscr{K}}\prec^*\{\overline{R_1}(A)\cap\overline{R_2}(A)\mid\overline{R_1}(A)\in\overline{\mathscr{K}_1},\ \overline{R_2}(A)\in\overline{\mathscr{K}_2}\}。$$

定理 11 可推广至如下一般情形。

推论 6　设(Q,S,R_i)、(Q,S,R)是模糊近似空间,它们的模糊粗糙上近似算子诱导的模糊知识空间分别为$\overline{\mathscr{K}_i}$、$\overline{\mathscr{K}}$, $i=1,2,\cdots,n$,若 $R=\bigcup\limits_{i=1}^{n}R_i$,则 $\overline{\mathscr{K}}\prec^*\{\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{R_i}(A)\mid\overline{R_i}(A)\in\overline{\mathscr{K}_i}\}$。

4　结语

模糊近似空间(Q,S,R)的下近似模糊知识状态集族是模糊闭包空间,模糊近似空间(Q,S,R)的上近似模糊知识状态集族是模糊知识空间的一个充要条件是 R 是从 Q 到 S 的一个串行模糊关系,本文从细关系角度揭示 2 个或多个模糊闭包空间、模糊知识空间的之间联系。本文获得的这些性质将进一步丰富和发展模糊知识结构理论,并将应用于学习评价和能力评估以及对学习者进行个性化学习推荐。后续研究将利用定

理 1、2 的知识状态表示法,进一步阐明模糊知识结构模型和多分知识结构模型的紧密联系。

参考文献:

[1] DOIGNON J P, FALMAGNE J C. Spaces for the assessment of knowledge[J]. International Journal of Man-Machine Studies, 1985, 23(2):175-196.

[2] 刘艳花,杨贯中. 基于扩展知识空间理论的技能自适应测试过程[J]. 计算机系统应用, 2010, 19(7):69-73.
LIU Yanhua , YANG Guanzhong. Adaptive test process based on extension of knowledge space theory[J]. Computer Systems and Applications, 2010, 19(7):69-73.

[3] 刘译蓬. 基于知识空间理论的认知诊断自适应测试选题方法研究[D]. 锦州:渤海大学, 2019.
LIU Yipeng. Research on selection method of cognitive diagnosis adaptive test based on knowledge space theory[D]. Jinzhou: Bohai University, 2019.

[4] 谈成群,谢深泉. 超文本教学系统中学生知识的自适应测评研究[J]. 计算机工程与设计, 2007, 28(20):5072-5075.
TAN Chengqun, XIE Shenquan. Adaptive assessment of students' knowledge in hypertext tutoring system[J]. Computer Engineering and Design, 2007, 28(20):5072-5075.

[5] FALMAGNE J C, DOIGNON J P. Learning spaces: interdisciplinary applied mathematics[M]. Berlin: Springer, 2011:417.

[6] 李金海,张瑞,智慧来,等. 知识空间理论综述[J]. 模式识别与人工智能, 2024, 37(2):106-127.
LI Jinhai, ZHANG Rui, ZHI Huilai, et al. Review of knowledge space theory[J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2024, 37(2):106-127.

[7] 王大利,许晴媛,李进金,等. 知识点网络下的知识评估和学习路径选择[J]. 南京大学学报(自然科学版), 2023, 59(4):629-643.
WANG Dali, XU Qingyuan, LI Jinjin, et al. Knowledge assessment and learning paths selection under knowledge point network[J]. Journal of Nanjing University (Natural Science), 2023, 59(4):629-643.

[8] FALMAGNE J C, KOPPEN M, VILLANO M, et al. Introduction to knowledge spaces: how to build, test, and search them[J]. Psychological Review, 1990, 97(2):201-224.

[9] KOPPEN M, DOIGNON J P. How to build a knowledge space by querying an expert[J]. Journal of Mathematical Psychology, 1990, 34(3):311-331.

[10] HELLER J. A formal framework for characterizing querying algorithms[J]. Journal of Mathematical Psychology, 2004, 48(1):1-8.

[11] SCHREPP M. A method for the analysis of hierarchical dependencies between items of a questionnaire[J]. Methods of Psychological Research Online, 2003, 19:43-79.

[12] DOIGNON J P. Knowledge spaces and skill assignments[M]. New York: Springer, 1994.

[13] SUN Wen, Li Jinjin, GE Xun, et al. Knowledge structures delineated by fuzzy skill maps[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2021, 407:50-66.

[14] PAWLAK Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer Information Science, 1982, 11(5):341-356.

[15] XIAO Jiayu, ZHANG Qinghua, AI Zhihua, et al. A fast neighborhood classifier based on hash bucket with application to medical diagnosis[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2022, 148:117-132.

[16] JIN Chenxia, MI Jusheng, LI Fachao, et al. A novel probabilistic hesitant fuzzy rough set based multi-criteria decision-making method[J]. Information Sciences, 2022, 608:489-516.

[17] 王国胤,姚一豫,于洪. 粗糙集理论与应用研究综述[J]. 计算机学报, 2009, 32(7):1229-1246.
WANG Guoyin, YAO Yiyu, YU Hong. A survey on rough set theory and applications[J]. Chinese Journal of Computers, 2009, 32(7):1229-1246.

[18] YAO Yiyu, MIAO Duoqian, XU Feifei. Granular structures and approximations in rough sets and knowledge spaces[M]//ABRAHAM A, FALCÓN R, BELLO R. Rough Set Theory(A True Landmark in Data Analysis). Heidelberg: Springer, 2009:71-84.

[19] 高纯,王睿智. 知识空间理论析取模型下最小技能集的生成[J]. 计算机科学与探索, 2010, 4(12):1109-1114.
GAO Chun, WANG Ruizhi. The formation of minimal skill set in disjunctive model of knowledge space theory[J]. Journal of Frontiers of Computer Science and Technology, 2010, 4(12):1109-1114.

[20] 杨桃丽,李进金,李招文,等. 基于技能构建知识结构的两种精度模型与技能子集约简[J]. 模式识别与人工智能, 2022, 35(8):671-687.
YANG Taoli, LI Jinjin, LI Zhaowen, et al. Two kinds of variable precision models based on skill for constructing knowledge

structures and skill subset reduction[J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2022, 35(8):671-687.
[21] LIU Guilong. Rough set approaches in knowledge structures[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2021, 138: 78-88.
[22] SCHREPP M. A generalization of knowledge space theory to problems with more than two answer alternatives[J]. Journal of Mathematical Psychology, 1997, 41(3):237-243.
[23] BARTL E, BELOHLAVEK R. Knowledge spaces with graded knowledge states[J]. Information Sciences, 2011, 181(8): 1426-1439.
[24] STEFANUTTI L, ANSELM P, CHIUSOLE D, et al. On the polytomous generalization of knowledge space theory[J]. Journal of Mathematical Psychology, 2020, 94:102306.
[25] HELLER J. Generalizing quasi-ordinal knowledge spaces to polytomous items[J]. Journal of Mathematical Psychology, 2021, 101:102515.
[26] SUN Wen, LI Jinjin, LIN Fucai, et al. Constructing polytomous knowledge structures from fuzzy skills[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2023,461:108395.
[27] ZHOU Yinfeng, LI Jinjin, WANG Hongkun, et al. Skills and fuzzy knowledge structures[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2022, 42(3):2629-2645.
[28] DUBOIS D, PRADE H. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets[J]. International Journal of General Systems, 1990, 17(2/3):191-209.
[29] 杨海龙. 双论域粗糙集理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2016:33-41.
YANG Hailong. Rough set theory and methods for bi-theoretical domains[M]. Beijing: Science Press, 2016:33-41.
[30] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3):338-353.
[31] 吴伟志,米据生. 粗糙集的数学结构[M]. 北京: 科学出版社, 2019:44-57.
WU Weizhi, MI Jusheng. Mathematical structures of rough sets[M]. Beijing: Science Press, 2019:44-57.

(编辑:陈丽萍)

(上接第 90 页)

[15] 魏玲,曹丽,祁建军,等. 形式概念分析中的概念约简与概念特征[J]. 中国科学(信息科学), 2020, 50(12): 1817-1833.
WEI Ling, CAO Li, QI Jianjun, et al. Concept reduction and concept characteristics in formal concept analysis[J]. Scientia Sinica Informationis, 2020, 50(12):1817-1833.
[16] 谢小贤,李进金,陈东晓,等. 基于布尔矩阵的保持二元关系不变的概念约简[J]. 山东大学学报(理学版), 2020, 55(5): 32-45.
XIE Xiaoxian, LI Jinjin, CHEN Dongxiao, et al. Concept reduction of preserving binary relations based on Boolean matrix [J]. Journal of Shandong University(Natural Science), 2020, 55(5):32-45.
[17] 王霞,彭致华,李俊余,等. 一种基于概念可辨识矩阵的概念约简方法[J]. 计算机科学, 2021, 48(1): 125-130.
WANG Xia, PENG Zhihua, LI Junyu, et al. Method of concept reduction based on concept discernibility matrix[J]. Computer Science, 2021, 48(1):125-130.
[18] ZHAO Siyu, QI Jianjun, LI Junan, et al. Concept reduction in formal concept analysis based on representative concept matrix [J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2023, 14(4):1147-1160.
[19] 魏玲,赵思雨,祁建军. 对称形式背景及其概念约简[J]. 西北大学学报(自然科学版), 2023, 53(5): 794-802.
WEI Ling, ZHAO Siyu, QI Jianjun. Symmetric formal context and its concept reduct[J]. Journal of Northwest University (Natural Science Edition), 2023, 53(5):794-802.
[20] 朱朵朵,任睿思,赵思雨,等. 基于不完备背景的 3 类 SE-ISI 概念约简[J]. 西北大学学报(自然科学版), 2023, 53(5): 821-829.
ZHU Duoduo, REN Ruisi, ZHAO Siyu, et al. Three types of SE-ISI concept reduction based on incomplete contexts[J]. Journal of Northwest University(Natural Science Edition), 2023, 53(5):821-829.
[21] 李炎,赵思雨,任睿思,等. 保持规则前件信息的概念约简[J]. 西北大学学报(自然科学版), 2023, 53(5):803-811.
LI Yan, ZHAO Siyu, REN Ruisi, et al. Concept reduction preserving antecedent information of rules[J]. Journal of Northwest University(Natural Science Edition), 2023, 53(5):803-811.

(编辑:陈丽萍)