山东大学学报(理学版)2025 年 2 月 第 60 卷 第 2 期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.60, No.2, 2025

E-mail:xblxb@sdu.edu.cn
http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn
Tel:+86-531-88366917

文章编号:1671-9352(2025)02-0014-05　　DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.320

阿贝尔范畴中的 n-弱内射对象

司慧如,姚海楼*
(北京工业大学理学部数学系, 北京 100124)

摘要:在阿贝尔范畴中引入了 n-超有限表现对象,利用 n-超有限表现对象刻画了 n-弱内射对象,得到了 n-弱内射对象的一些基本性质。定义了阿贝尔范畴中对象的 n-弱内射维数,讨论了短正合列中 3 个对象的 n-弱内射维数之间的关系以及余挠理论。
关键词:阿贝尔范畴;n-弱内射对象;n-弱内射维数
中图分类号:O153.3　　**文献标志码**:A
引用格式:司慧如,姚海楼.阿贝尔范畴中的 n-弱内射对象[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(2):14-18.

n-weak injective objects in Abelian category

SI Huiru, YAO Hailou*
(Department of Mathematics, Faculty of Science, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

Abstract: In the context of Abelian categories, the introduction of n-super finitely presented objects is employed to characterize n-weak injective objects, thereby some fundamental properties of n-weak injective objects are established. The n-weak injective dimensions of objects in an Abelian category is defined, and the connections between the n-weak injective dimensions of three objects in a short exact sequence and the cotorsion theory are discussed.
Key words: Abelian category; n-weak injective object; n-weak injective dimension

0 引言

在同调代数的研究中,模的内射性是最重要的内容之一。同时,作为内射模的推广,弱内射模的概念和相关问题也逐渐成为研究重点。Gao 等[1]引入了弱内射模的概念,利用超有限表现模代替有限表现模来刻画弱内射模的基本性质,从而将 FP-内射模在凝聚环上的一些同调结果推广到一般环上,并且引进了环 R 的超有限表现维数以及模的弱内射维数,得到了一些重要结果。Amini 等[2]通过 n-超有限表现模以及特殊超有限表现模讨论了 n-弱内射模,给出了 n-弱内射模的一些等价条件,并且在一般环 R 上,定义了模的 n-弱内射维数以及 n-超有限表现维数,研究了 n-弱内射维数至多是 k 的一类模。

在文献[3-4]中提出范畴论的概念,对阿贝尔范畴进行了研究。Popescu[5]详细讨论了阿贝尔范畴的相关理论,给出了阿贝尔范畴中的一些基本结果,并且引进了阿贝尔范畴中的一些特殊对象。阿贝尔范畴作为一种特殊的加法范畴,性质也更加的丰富,因此,在阿贝尔范畴中讨论一些对象的性质也逐步成为研究热点。

受此启发,本文在阿贝尔范畴中引入了 n-弱内射对象,对这些对象的基本性质进行了研究,并给出了阿贝尔范畴中对象的 n-弱内射维数,讨论了在短正合列中 3 个对象的 n-弱内射维数之间的关系。

收稿日期:2023-07-22; **网络出版时间**:2024-05-09 09:26:44
基金项目:国家自然科学基金资助项目(12071120)
第一作者:司慧如(1996—),女,硕士研究生,研究方向为代数表示论. E-mail:15237337087@163.com
* **通信作者**:姚海楼 (1963—), 男, 教授,博士生导师,博士,研究方向为代数表示论、同调代数、序代数等. E-mail:yaohl@bjut.edu.cn

1　预备知识

定义 1[6]　范畴 $\mathscr{A}$ 的一簇对象 $\{U_j\}_{j\in I}$,其中 I 为指标集,称为一簇生成子,若对于每一对不同的态射 $\alpha,\beta:A\to B$,存在态射 $\mu:U_j\to A$, $j\in I$,使得 $\alpha\mu\neq\beta\mu$。$\mathscr{A}$ 中的对象 U 称为生成子,如果 $\{U\}$ 为一簇生成子。

显然,如果 $\mathscr{A}$ 有无限直和(即上积)且 $\{U_j\}_{j\in I}$ 是 $\mathscr{A}$ 中的一簇生成子,则 $\coprod\limits_{j\in I}U_j$ 是 $\mathscr{A}$ 中的生成子。

定义 2[6]　设范畴 $\mathscr{A}$ 有无限直和,则 U 是生成子当且仅当对于任意对象 X 存在指标集 I 以及满态射 $U^I\to X$。

定义 3[6]　设范畴 $\mathscr{A}$ 为阿贝尔范畴且有一簇生成子 $\{U_j \mid j\in I\}$,其中 I 为指标集,$\mathscr{A}$ 中的一个对象 X 称作是关于 $\{U_j \mid j\in I\}$ 有限生成的,如果 X 是形如 $\bigoplus\limits_{j_k\in I_0}U_{j_k}$ 的有限上积的商对象,其中 I_0 为 I 的有限子集且 $1\leqslant k\leqslant n$。

定义 4[6]　设 $\mathscr{A}$ 是一个范畴,$\mathscr{B}$ 为集合范畴,$\mathscr{A}$ 中的对象 P 称为投射的,若函子 $H^P=\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(P,-):\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ 是一个满函子。或等价地,P 是投射的当且仅当对于 $\mathscr{A}$ 中的每一个图:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl] \arrow[d] \\ A \arrow[r, two heads] & A'' \end{tikzcd}$$

其中 $A\twoheadrightarrow A''$ 是一个满态射,都存在 $P\to A$ 使得上图交换。

定义 5　设 $\mathscr{A}$ 是有足够多投射对象的阿贝尔范畴,$\mathscr{A}$ 中的对象 A 称为超有限表现对象,若存在正合列

$$\cdots\to P_n\to P_{n-1}\cdots\to P_1\to P_0\to A\to 0,$$

其中 P_i 是 $\mathscr{A}$ 中有限生成的投射对象(i 为非负正整数)。

定义 6　设 $\mathscr{A}$ 是有足够多投射对象的阿贝尔范畴,M 是 $\mathscr{A}$ 中任意一个对象,如果对于任意的超有限表现对象 F,都有 $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(F,M)=0$,则称对象 M 是弱内射对象。

定义 7　设阿贝尔范畴 $\mathscr{A}$ 有足够多投射对象,$\mathscr{A}$ 中的对象 U 称为 n-超有限表现对象,若存在正合列

$$\cdots\to F_{n+1}\to F_n\cdots\to F_1\to F_0\to U\to 0,$$

其中 F_i 是有限生成投射对象,$i\geqslant n$。令 $K_i=\mathrm{Im}(F_{i+1}\to F_i)$,当 $i=n-1$,称对象 K_{n-1} 是特殊超有限表现对象。若 $\mathscr{A}$ 中的一个短正合列

$$0\to A\to B\to C\to 0$$

在函子 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(K,-)$ 作用下是正合的,其中 K 是 $\mathscr{A}$ 中任意特殊超有限表现对象,称此正合列是特殊超级纯正合列,且称对象 A 在 B 中是特殊超级纯的,同时,称对象 B 包含对象 A。

注 1　0-超有限表现对象就是定义 5 中的超有限表现对象,特殊超有限表现对象也是超有限表现对象,但反过来,超有限表现对象不一定是特殊超有限表现对象,文献[2]在环 R 上的模范畴给出了反例。

定义 8　设 $\mathscr{A}$ 是有足够多投射对象的阿贝尔范畴,M 是 $\mathscr{A}$ 中任意一个对象,若对于任意的 n-超有限表现对象 U,都有 $\mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathscr{A}}(U,M)=0$,则称对象 M 是 n-弱内射对象。

注 2　$\mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathscr{A}}(U,-)\cong\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(K_{n-1},-)$,其中 U 是任意的 n-超有限表现对象,K_{n-1} 是与之相关的特殊超有限表现对象。若 $n=0$,则 n-弱内射对象都是弱内射对象,n-超有限表现对象都是超有限表现对象。

注 3　每个 n-弱内射对象都是 m-弱内射对象,每个 n-超有限表现对象都是 m-超有限表现对象,$n\leqslant m$。

定义 9　设 $\mathscr{A}$ 是有足够多投射对象的阿贝尔范畴,M 是 $\mathscr{A}$ 中任意一个对象,M 的 n-弱内射维数记作

$$n\text{-wid}_{\mathscr{A}}(M)=\mathrm{Inf}\{k \mid \mathrm{Ext}^{k+1}_{\mathscr{A}}(K,M)=0, K\text{ 是任意特殊超有限表现对象}\},$$

若这样的 k 不存在,定义 $n\text{-wid}_{\mathscr{A}}(M)=\infty$。

将对象的 n-弱内射维数看成衡量其与 n-弱内射对象接近的程度。

定义 10　设 $\mathscr{A}$ 是阿贝尔范畴,M 是 $\mathscr{A}$ 中任意一个对象,若它的有限生成子对象是有限表现的,则称对象 M 是伪凝聚的。

定义 11　设 $\mathscr{A}$ 是阿贝尔范畴,若 $\mathscr{A}$ 中每一个投射对象是伪凝聚的,则称范畴 $\mathscr{A}$ 为伪凝聚范畴。

注 4　若 $n\text{-wid}_{\mathscr{A}}(M)\leqslant k$，则$\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{k+i}(K_{n-1},M)=0,\ i\geqslant 1$。

定理 1[7]　设 $\mathscr{A}$ 是有无限直和并且有直积的阿贝尔范畴，则有阿贝尔群同构：

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\varinjlim X_i,Y)\cong\varprojlim\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X_i,Y),$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,\varprojlim Y_i)\cong\varprojlim\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,Y_i)。$$

2　主要结果

定理 2　设 $\mathscr{A}$ 是存在直积的阿贝尔范畴，且 $\mathscr{A}$ 中有足够多的投射对象，若$\{M_i\}_{i\in I}$是 $\mathscr{A}$ 中的一簇对象，I 是指标集，那么 $\prod\limits_{i\in I}M_i$是 n-弱内射对象当且仅当 M_i 是 $\mathscr{A}$ 中的 n-弱内射对象。

证明　$\Rightarrow$：因为每个 M_i 都是 n-弱内射对象，对于 $\mathscr{A}$ 中任意 n-超有限表现对象 U，都有$\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{n+1}(U,M_i)=0$，所以有$\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{n+1}(U,\prod\limits_{i\in I}M_i)\cong\prod\limits_{i\in I}\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{n+1}(U,M_i)=0$，于是，$\prod\limits_{i\in I}M_i$ 是 n-弱内射对象。

$\Leftarrow$：因为 $\prod\limits_{i\in I}M_i$是 n-弱内射对象，所以$\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{n+1}(U,\prod\limits_{i\in I}M_i)\cong\prod\limits_{i\in I}\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{n+1}(U,M_i)=0$，从而 M_i 是 n-弱内射对象。

定理 3　设 $\mathscr{A}$ 是一个存在无限直和的伪凝聚范畴，且 $\mathscr{A}$ 中有足够多的投射对象，令$\{M_i\}_{i\in I}$是 $\mathscr{A}$ 中的一簇对象，那么$\bigoplus\limits_{i\in I}M_i$ 是 n-弱内射对象当且仅当每一个 M_i 都是 n-弱内射对象。

证明　令 U 是一个 n-超有限表现对象，其中 K_{n-1}是与之相关的特殊超有限表现对象，那么存在短正合列 $0\to K_n\to F_n\to K_{n-1}\to 0$，其中 F_n 是有限生成的投射对象，K_n 是超有限表现对象，因此，有下列交换图：

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(F_n,\bigoplus\limits_{i\in I}M_i) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(K_n,\bigoplus\limits_{i\in I}M_i) & \to & \mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^1(K_{n-1},\bigoplus\limits_{i\in I}M_i) & \to & 0,\\
\downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \downarrow & & \\
\bigoplus\limits_{i\in I}\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(F_n,M_i) & \to & \bigoplus\limits_{i\in I}\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(K_n,M_i) & \to & \bigoplus\limits_{i\in I}\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^1(K_{n-1},M_i) & \to & 0,
\end{array}$$

即$\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^1(K_{n-1},\bigoplus\limits_{i\in I}M_i)\cong\bigoplus\limits_{i\in I}\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^1(K_{n-1},M_i)$。由注 2 知，$\bigoplus\limits_{i\in I}M_i$ 是 n-弱内射对象当且仅当每一个 M_i 都是 n-弱内射对象。

定理 4　设 $\mathscr{A}$ 是有足够多投射对象的阿贝尔范畴，M 是 $\mathscr{A}$ 中的 n-弱内射对象，那么对任意的特殊超有限表现对象 K_{n-1}，都有$\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^i(K_{n-1},M)=0,i\geqslant 1$。

证明　令 U 是一个 n-超有限表现对象，其中 K_{n-1}是与之相关的特殊超有限表现对象，由注 3 可知，U 是 $\mathscr{A}$ 中的 $n+1$-超有限表现对象，K_n 是特殊超有限表现对象。同样由注 3 知，每个 n-弱内射对象都是 $n+1$-弱内射对象，因此$\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{n+2}(U,M)\cong\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^1(K_n,M)=0$。在 $\mathscr{A}$ 中存在短正合列

$$0\to K_n\to F_n\to K_{n-1}\to 0,$$

其中 F_n 是有限生成的投射对象，从而可得$\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^1(K_n,M)\cong\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^2(K_{n-1},M)$，因此$\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^2(K_{n-1},M)=0$。重复上面的过程，得到$\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^i(K_{n-1},M)=0,i\geqslant 1$。

定理 5　设 $\mathscr{A}$ 是有足够多投射对象的阿贝尔范畴，M 是 $\mathscr{A}$ 中任意一个对象，那么下列叙述是等价的：

（1）M 是 $\mathscr{A}$ 中的 n-弱内射对象；

（2）$\mathscr{A}$ 中任何短正合列 $0\to M\to B\to C\to 0$ 都是特殊超级纯正合列；

（3）M 在任意一个包含它的对象中都是特殊超级纯的；

（4）M 在任意一个包含它的内射对象中都是特殊超级纯的；

（5）M 在 $E(M)$ 中是特殊超级纯的。

证明　（1）$\Rightarrow$（2）。令 U 是 $\mathscr{A}$ 中的一个 n-超有限表现对象，其中 K_{n-1}是与之相关的特殊超有限表现对象。由注 2 知，$\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^1(K_{n-1},M)\cong\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{n+1}(U,M)=0$，因此，对于 $\mathscr{A}$ 中短正合列 $0\to M\to B\to C\to 0$，$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(K_{n-1},-)$是正合的。

（2）$\Rightarrow$（3）。令 N 是包含 M 的任意一个对象，那么有短正合列

$$0\to M\to N\to N/M\to 0,$$

由(2)可知,此正合列是特殊超级纯的,即 M 在 N 中是特殊超级纯的。

(3)⇒(4)⇒(5)是显然的。

(5)⇒(1)。由(5)可知,短正合列 $0\to M\to E(M)\to E(M)/M\to 0$ 是特殊超级纯的。如果 U 是 $\mathscr{A}$ 中的一个 n-超有限表现对象,其中 K_{n-1} 是与之相关的特殊超有限表现对象,则由(5)以及注 2 知 $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(K_{n-1},M)\cong\mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathscr{A}}(U,M)=0$,因此,$M$ 是 n-弱内射对象。

定理 6 设 $\mathscr{A}$ 是有足够多投射对象和内射对象的阿贝尔范畴,那么下列陈述是等价的:

(1) $\mathscr{A}$ 中的每个对象都是 n-弱内射对象;

(2) $\mathscr{A}$ 中每个特殊超有限表现对象都是 n-弱内射对象;

(3) $\mathscr{A}$ 中的短正合列 $0\to K_n\to F_n\to K_{n-1}\to 0$ 是一个特殊超级纯的分裂正合列,其中 K_{n-1} 是特殊超有限表现对象。

证明 (1)⇒(2)是显然的。

(2)⇒(3)。令 U 是一个 n-超有限表现对象,其中 K_{n-1} 是与之相关的特殊超有限表现对象,则有短正合列

$$0\to K_n\to F_n\to K_{n-1}\to 0。$$

因为 U 也是$(n+1)$-超有限表现对象,所以 K_n 是与之相关的特殊超有限表现对象。由(2)可知,K_n 也是 n-弱内射对象。由注 2 可知,$\mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathscr{A}}(U,K_n)\cong\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(K_{n-1},K_n)=0$。将函子 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(K_{n-1},-)$ 作用于上面的短正合列,可得短正合列

$$0\to\mathrm{Hom}(K_{n-1},K_n)\xrightarrow{g}\mathrm{Hom}(K_{n-1},F_n)\xrightarrow{f}\mathrm{Hom}(K_{n-1},K_{n-1})\to 0。$$

因为 f 是满态射,所以短正合列 $0\to K_n\to F_n\to K_{n-1}\to 0$ 是分裂的。又由定理 5 可知,此短正合列是特殊超级纯的分裂正合列。

(3)⇒(1)。假设正合列 $0\to K_n\to F_n\to K_{n-1}\to 0$ 是特殊超级纯的分裂正合列,那么 K_{n-1} 就是对象 F_n 的直和加项。因为 F_n 是 $\mathscr{A}$ 中的投射对象,所以 K_{n-1} 也是投射对象,即对于 $\mathscr{A}$ 中任意的对象 M,都有 $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(K_{n-1},M)=0$。又由注 2 可知,对于 $\mathscr{A}$ 中任意的 n-超有限表现对象 U 都有 $\mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathscr{A}}(U,M)\cong\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(K_{n-1},M)=0$,即 M 是 n-弱内射对象。

定理 7 设 $\mathscr{A}$ 是有足够多投射对象的阿贝尔范畴,$0\to A\to B\to C\to 0$ 是 $\mathscr{A}$ 中的短正合列,则有下面的结论:

(1) 若 $n\text{-wid}_{\mathscr{A}}(B)<n\text{-wid}_{\mathscr{A}}(C)$,则 $n\text{-wid}_{\mathscr{A}}(A)\leqslant n\text{-wid}_{\mathscr{A}}(C)+1$。

(2) 若 $n\text{-wid}_{\mathscr{A}}(B)=n\text{-wid}_{\mathscr{A}}(C)$,则 $n\text{-wid}_{\mathscr{A}}(A)\leqslant n\text{-wid}_{\mathscr{A}}(C)+1$。

(3) 若 $n\text{-wid}_{\mathscr{A}}(B)>n\text{-wid}_{\mathscr{A}}(C)$,则 $n\text{-wid}_{\mathscr{A}}(A)\leqslant n\text{-wid}_{\mathscr{A}}(B)$。

证明 假设 $n\text{-wid}_{\mathscr{A}}(B)=m$, $n\text{-wid}_{\mathscr{A}}(C)=k$,$K_{n-1}$ 是 $\mathscr{A}$ 中任意的特殊超有限表现对象。

(1) 当 $m<k$ 时,将函子 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(K_{n-1},-)$ 作用于上面的短正合列,得到正合列

$$\mathrm{Ext}^{k+1}_{\mathscr{A}}(K_{n-1},C)\to\mathrm{Ext}^{k+2}_{\mathscr{A}}(K_{n-1},A)\to\mathrm{Ext}^{k+2}_{\mathscr{A}}(K_{n-1},B)。$$

因为 $n\text{-wid}_{\mathscr{A}}(C)=k$,所以 $\mathrm{Ext}^{k+1}_{\mathscr{A}}(K_{n-1},C)=0$。又由注 4 可知,$\mathrm{Ext}^{k+2}_{\mathscr{A}}(K_{n-1},B)=0$,于是 $\mathrm{Ext}^{k+2}_{\mathscr{A}}(K_{n-1},A)=0$,即 $n\text{-wid}_{\mathscr{A}}(A)\leqslant k+1=n\text{-wid}_{\mathscr{A}}(C)+1$。

(2) 当 $m=k$ 时,证明同上。

(3) 当 $m>k$ 时,$k\leqslant m-1$。将函子 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(K_{n-1},-)$ 作用于上面的短正合列,得到正合列

$$\mathrm{Ext}^{m}_{\mathscr{A}}(K_{n-1},C)\to\mathrm{Ext}^{m+1}_{\mathscr{A}}(K_{n-1},A)\to\mathrm{Ext}^{m+1}_{\mathscr{A}}(K_{n-1},B),$$

因为 $\mathrm{Ext}^{m}_{\mathscr{A}}(K_{n-1},C)=\mathrm{Ext}^{m+1}_{\mathscr{A}}(K_{n-1},B)=0$,所以有 $\mathrm{Ext}^{m+1}_{\mathscr{A}}(K_{n-1},A)=0$,从而进一步有 $n\text{-wid}_{\mathscr{A}}(A)\leqslant m=n\text{-wid}_{\mathscr{A}}(B)$。

定理 8 设 $\mathscr{A}$ 是有足够多投射对象的阿贝尔范畴,$0\to A\to B\to C\to 0$ 是 $\mathscr{A}$ 中的短正合列,若对象 A、B 的 n-弱内射维数不超过 k,那么对象 C 的 n-弱内射维数也不超过 k。

证明 令 U 是一个 n-超有限表现对象,其中 K_{n-1} 是与之相关的特殊超有限表现对象,用函子 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(K_{n-1},-)$ 作用于上面的短正合列,可得正合列

$$\cdots\to\mathrm{Ext}^{k+1}_{\mathscr{A}}(K_{n-1},B)\to\mathrm{Ext}^{k+1}_{\mathscr{A}}(K_{n-1},C)\to\mathrm{Ext}^{k+2}_{\mathscr{A}}(K_{n-1},A)\to\cdots。$$

若对象 A、B 的 n-弱内射维数不超过 k,则

$$\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{k+2}(K_{n-1},A)=\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{k+1}(K_{n-1},B)=0,$$

因此$\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{k+1}(K_{n-1},C)=0$,所以,$C$ 的 n-弱内射维数也不超过 k。

定理 9 设 $\mathscr{A}$ 是有足够多投射对象的阿贝尔范畴,那么$({}^{\perp}\mathrm{WI}_k^n(\mathscr{A}),\mathrm{WI}_k^n(\mathscr{A}))$是一个遗传余挠对。其中$\mathrm{WI}_k^n(\mathscr{A})$是 $\mathscr{A}$ 中 n-弱内射维数不超过 k 的对象构成的对象类。

证明 首先证明$({}^{\perp}\mathrm{WI}_k^n(\mathscr{A}))^{\perp}=\mathrm{WI}_k^n(\mathscr{A})$。显然,$\mathrm{WI}_k^n(\mathscr{A})\subseteq({}^{\perp}\mathrm{WI}_k^n(\mathscr{A}))^{\perp}$。令 M 是$({}^{\perp}\mathrm{WI}_k^n(\mathscr{A}))^{\perp}$中的一个对象,$U$ 是 n-超有限表现对象,K_{n-1}是与之相关的特殊超有限表现对象,由注 4 可知,K_{n-1}在${}^{\perp}\mathrm{WI}_k^n(\mathscr{A})$中,即$\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{1}(K_{n-1},M)=0$。由注 2,$\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{n+1}(U,M)=0$,即对象 M 在$\mathrm{WI}_k^n(\mathscr{A})$中。令

$$0\to M_1\to M_2\to M_3\to 0$$

是 $\mathscr{A}$ 中的一个短正合列,并且 M_1,M_2 都在$\mathrm{WI}_k^n(\mathscr{A})$中,那么由定理 8 可知,$M_3$ 也在$\mathrm{WI}_k^n(\mathscr{A})$中,因此,$({}^{\perp}\mathrm{WI}_k^n(\mathscr{A}),\mathrm{WI}_k^n(\mathscr{A}))$是一个遗传余挠对。

参考文献:

[1] GAO Zhenghui, WANG Fanggui. Weak injective and weak flat modules[J]. Communications in Algebra, 2015, 43(9):3857-3868.

[2] AMINI M, AMZIL H, BENNIS D. Category of n-weak injective and n-weak flat modules with respect to special super presented modules[J]. Communications in Algebra, 2021, 49(11):4924-4939.

[3] EILENBERG S, MAC LANE S. General theory of natural equivalences[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1945, 58:231-294.

[4] GABRIEL P. Des categories Abeliennes[J]. Bulletin de la Société Mathématique de France, 1962, 90:323-448.

[5] POPESCU N. Abelian categories with applications to rings and modules[J]. Journal of Heart Transfer, 1973, 121(2):253-260.

[6] MITCHELL B. Theory of categories[M]. New York: Academic Press, 1965:1-237.

[7] 章璞. 三角范畴与导出范畴[M]. 北京:科学出版社,2015.
ZHANG Pu. Triangular category and derived category[J]. Beijing: Science Press, 2015.

[8] BLERL R. Homological dimension of discrete groups[M]. London: Mathematics Department, Queen Mary College, 1976.

[9] BREAZ S, ŽEMLIČKA J. The defect functor of a homomorphism and direct unions[J]. Algebras and Representation Theory, 2016, 19(1):181-208.

(编辑:陈丽萍)