山东大学学报(理学版)2025 年 2 月 第 60 卷 第 2 期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.60, No.2, 2025

E-mail:xblxb@sdu.edu.cn
http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn
Tel:+86-531-88366917

文章编号:1671-9352(2025)02-0024-10　　DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.352

完全二部图 $K_{1,n}$、$K_{2,n}$、$K_{3,n}$ 的点被多重集可区别的 E-全染色

郭亚勤,陈祥恩*
(西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州 730070)

摘要:利用反证法和色集合事先分配法,探讨了完全二部图 $K_{1,n}$、$K_{2,n}$和 $K_{3,n}$的点被多重集可区别的 E-全染色,确定了以上图的点被多重集可区别的 E-全色数。
关键词:色集合;完全二部图;多重集;E-全染色;E-全色数
中图分类号:O157.5　　**文献标志码**:A
引用格式:郭亚勤,陈祥恩. 完全二部图 $K_{1,n}$、$K_{2,n}$、$K_{3,n}$的点被多重集可区别的 E-全染色[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(2):24-33,40.

E-total colorings of complete bipartite graphs $K_{1,n}$, $K_{2,n}$ and $K_{3,n}$ which are vertex-distinguished by multiple sets

GUO Yaqin, CHEN Xiang'en*
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, Gansu, China)

Abstract: The E-total colorings of complete bipartite graphs $K_{1,n}$, $K_{2,n}$ and $K_{3,n}$ which vertex-distinguished by multiple sets are discussed by using the method of proof by contradiction and the pre-assignment of chromatic sets, the vertex-distinguishing E-total chromatic numbers of these graphs are determined.
Key words: chromatic set; complete bipartite graph; multiple set; E-total coloring; E-total chromatic number

0　引言及预备知识

关于图的点可区别一般边染色和图的点可区别正常边染色,目前已经有许多结论[1-3]。2008 年,Zhang 等[4]探讨了图的点可区别全染色。2011 年,Chen 等[5]提出图的点可区别 E-全染色,之后学者对图的点可区别 E-全染色展开了更多研究[6-7]。文献[8]主要对任意 2 个不同顶点被非多重色集合可区别的一般边染色的研究进展作了简单的介绍。曹静等[9]探讨了轮与扇的点被多重集可区别的 E-全染色。利用反证法和色集合事先分配法,本文研究完全二部图 $K_{1,n}$、$K_{2,n}$、$K_{3,n}$的点被多重集可区别的 E-全染色,并确定这些图的点被多重集可区别的 E-全色数。

所谓图 G 的一个 E-全染色是指若干种颜色对于图 G 的顶点和边的一个分配,使得任意相邻的顶点被分配以不同的颜色,并且每一条边与关联的点被分配以不同的颜色。

设 f 是图 G 的一个 E-全染色,x 是图 G 的任意一个顶点,把在 f 下点 x 的颜色以及与点 x 关联边的颜色构成的(多重)集合称为点 x 在 f 下的(多重)色集合,记为 $\tilde{C}_f(x)$ 或者 $\tilde{C}(x)$。

设 f 是图 G 的 E-全染色,且对任意 $u,v\in V(G)$,一旦 $u\neq v$,就有 $\tilde{C}(u)\neq\tilde{C}(v)$,则称 f 是点被多重集可区别的。

收稿日期:2023-08-14; **网络出版时间**:2024-05-21 18:00:12
第一作者:郭亚勤(1998—),女,硕士研究生,研究方向为图论及其应用. E-mail:guoyaqin20220901@163.com
* **通信作者**:陈祥恩(1965—),男,教授,研究方向为图论及其应用. E-mail:chenxe@nwnu.edu.cn

对图 G 进行点被多重集可区别的 E-全染色所需要的最少的颜色数目,称为图 G 的点被多重集可区别的 E-全色数,记为$\tilde{\chi}_{vt}^{e}(G)$,亦即

$$\tilde{\chi}_{vt}^{e}(G)=\min\{k\mid \text{图 } G \text{ 存在可用的颜色有 } k \text{ 种的点被多重集可区别的 E-全染色}\}。$$

本文用 $K_{m,n}$表示完全二部图,其中

$$V(K_{m,n})=\{u_1,u_2,\cdots,u_m,v_1,v_2,\cdots,v_n\}=X\cup Y;$$
$$V(X)=\{u_1,u_2,\cdots,u_m\},\quad V(Y)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\};$$
$$E(K_{m,n})=\{u_iv_j\mid i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n\}。$$

定义映射 $h:V\cup E\to\{1,2,\cdots,k\}$,通常情况进行染色时,所用的 k 种颜色用$\{1,2,\cdots,k\}$来表示。

l-E-全染色是指可用的颜色有 l 种的 E-全染色,可用的颜色有 l 种的点被多重集可区别的 E-全染色称为点被多重集可区别的 l-E-全染色,其中 $l\in\{1,2,\cdots,k\}$。

1　准备工作

引理 1[10]　从 n 个互不相同元素中取 r 个构成的重复组合的个数为$\binom{n+r-1}{r}$。

从 n 个互不相同元素中取出 r 个作成的重复组合称为 r-组合。r-组合也是前述 n 个互不相同元素构成的集合的含有 r 个元素的多重子集合,所以 r-组合也称为 r-多重子集或者 r-子集。

引理 2[10]　$\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1}$。

2　主要结论及其证明

定理 1　若$\binom{k-2}{2}<n\leqslant\binom{k-1}{2}$, $k\geqslant3$,则$\tilde{\chi}_{vt}^{e}(K_{1,n})=k$。

证明　先证 $K_{1,n}$不存在可用的颜色有 $k-1$ 种的点被多重集可区别的 E-全染色。假设 $K_{1,n}$存在可用的颜色有 $k-1$ 种的点被多重集可区别的 E-全染色,不妨给 X 中的点 u_1 染以颜色 1,这时 $K_{1,n}$中的所有边及 Y 中所有顶点都不能染以颜色 1,故 Y 中每个顶点在 f 下的色集合为$\{2,3,\cdots,k-1\}$的 2-子集,且“至少有一种颜色在该 2-子集里只出现一次”,这样的 2-子集(不重复)共有$\binom{k-2}{2}$个。由于$\binom{k-2}{2}<n$ 且$|V(Y)|=n$,因此上述所有的 2-子集(不重复)不能区分 Y 中的 n 个顶点,矛盾。

再证 $K_{1,n}$存在可用的颜色有 k 种的点被多重集可区别的 E-全染色。不妨给 X 中的顶点 u_1 染以颜色 1,则$\{2,3,\cdots,k\}$的形如$\{a,b\}$的 2-子集共有$\binom{k-1}{2}$个,其中 a、b 互异。将这$\binom{k-1}{2}$个 2-子集排成一个序列,且让 Y 中的顶点 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 依次对应该序列中的第 1、2、⋯、n 个 2-子集。

当 $n=1$ 时,在上述给出的染色下,$K_{1,1}$中的 2 个点的色集合分别是$\{1,2\}$、$\{3,2\}$,显然这 2 个色集合是互不相同的。

当 $n\geqslant2$ 时,Y 中每个点的色集合刚好是事先对应于这个点的色集合,Y 中不同顶点对应的色集合是不同的,所以 Y 中任意 n 个点彼此可区别。X 中点的色集合与 Y 中点的色集合的元素个数不同,因此 X 中每个点与 Y 中每个点可区别。

最终,可得到 $K_{1,n}$的点被多重集可区别的 k-E-全染色。

易知$\tilde{\chi}_{vt}^{e}(K_{2,2})=4$。

定理 2　若$\binom{k-2}{2}+\binom{k-1}{3}<n\leqslant\binom{k-1}{2}+\binom{k}{3}$, $4\leqslant k\leqslant5$,则$\tilde{\chi}_{vt}^{e}(K_{2,n})=k$。

证明　先证 $K_{2,n}$不存在可用的颜色有 $k-1$ 种的点被多重集可区别的 E-全染色。假设 $K_{2,n}$存在可用的颜色有 $k-1$ 种的点被多重集可区别的 E-全染色 h,分以下 2 种情形进行讨论。

情形 1 $h(u_1)=h(u_2)$。

不妨设 $h(u_1)=h(u_2)=1$。这时 $K_{2,n}$的所有边及 Y 中的所有顶点都不能染以颜色 1,故 Y 中的每个顶点在 h 下的色集合为$\{2,3,\cdots,k-1\}$的 3-子集,且“至少有一种颜色在该 3-子集里只出现一次”,这样的 3-子集共有$\binom{k-2}{3}+2\binom{k-2}{2}=\binom{k-1}{3}+\binom{k-2}{2}$个。由于$\binom{k-2}{2}+\binom{k-1}{3}<n$ 且$|V(Y)|=n$,因此所有这样的 3-子集不能区分 Y 中的 n 个顶点,矛盾。

情形 2 $h(u_1)\neq h(u_2)$。

不妨设 $h(u_1)=1$, $h(u_2)=2$。这时,对每个 $s\in\{3,4,\cdots,k-1\}$, 有$\{1,s,s\}$、$\{2,s,s\}$、$\{s,1,1\}$、$\{s,2,2\}$、$\{1,2,2\}$、$\{2,1,1\}$都不能是 Y 中顶点的色集合,则可以成为 Y 中的顶点在 h 下的色集合的$\{1,2,\cdots,k-1\}$的 3-子集有以下 2 类:

(1) 所含 3 种颜色互不相同。

(2) 所含 3 种颜色里刚好有 2 种颜色相同,并且这 3 种颜色都不能是 1 和 2。

属于第 1 类的 3-子集共有$\binom{k-1}{3}$个,属于第 2 类的 3-子集共有 $2\binom{k-3}{2}$个,所以能够成为 Y 中顶点的色集合的 3-子集共有$\binom{k-1}{3}+2\binom{k-3}{2}$个。由于当 $4\leqslant k\leqslant 5$ 时,有$\binom{k-1}{3}+2\binom{k-3}{2}<\binom{k-2}{2}+\binom{k-1}{3}<n$,因此所有那样的 3-子集不能区分 Y 中的 n 个顶点,矛盾。

再证 $K_{2,n}$存在可用的颜色有 k 种的点被多重集可区别的 E-全染色。不妨给 X 中的顶点 u_1、u_2 都染以颜色 1,则$\{2,3,\cdots,k\}$的形如$\{a,b,c\}$的 3-子集共有$\binom{k-1}{3}$个,其中 a、b、c 互异。先将形如$\{a,b,c\}$的$\binom{k-1}{3}$个 3-子集排成一个序列,在此序列的基础上,将$\{2,3,\cdots,k\}$的形如$\{a,b,b\}$的 $2\binom{k-1}{2}$个 3-子集排成一个序列放在上述形如$\{a,b,c\}$的 3-子集的后面,此时这 2 个序列共同构成一个有$\binom{k-1}{3}+2\binom{k-1}{2}=\binom{k}{3}+\binom{k-1}{2}$个 3-子集的新的序列,且让 Y 中的顶点 v_1、v_2、$\cdots$、v_n 依次对应新的序列中的第 1、2、$\cdots$、n 个 3-子集,具体染色方案如下:

(1) 当 v_j 对应的 3-子集形如$\{s,t,r\}$时,其中 $s,t,r\in\{2,3,\cdots,k\}$且互不相同,用颜色 s、t、r 分别染点 v_j 和边 u_1v_j、u_2v_j。

(2) 当 v_j 对应的 3-子集形如$\{s,t,t\}$时,其中 $s,t\in\{2,3,\cdots,k\}$且互不相同,用颜色 s、t、t 分别染点 v_j 和边 u_1v_j、u_2v_j。

此时 Y 中每个点的色集合刚好是事先对应于这个点的色集合,Y 中不同顶点对应的色集合是不同的,所以 Y 中任意 n 个点彼此可区别。

下面证明 $\tilde{C}(u_1)\neq\tilde{C}(u_2)$。令 $\tilde{C}(u_i)=\{f(u_i),f(u_iv_1),\cdots,f(u_iv_n)\}$, $i=1,2$,其中 $f(u_1v_1)\neq f(u_2v_1)$,若 $\tilde{C}(u_1)=\tilde{C}(u_2)$,只须交换颜色 $f(u_1v_1)$ 和 $f(u_2v_1)$,此时 Y 中顶点 v_1 及其他顶点 v_j 对应的色集合都不变,并且 $\tilde{C}(u_1)$里面多了一种颜色 $f(u_2v_1)$,少了一种颜色 $f(u_1v_1)$,同时 $\tilde{C}(u_2)$里面多了一种颜色 $f(u_1v_1)$,少了一种颜色 $f(u_2v_1)$,就可以得到 $\tilde{C}(u_1)\neq\tilde{C}(u_2)$。

定理 3 若$\binom{k-1}{3}+2\binom{k-3}{2}<n\leqslant\binom{k}{3}+2\binom{k-2}{2}$, $k\geqslant 6$,则$\chi_{vt}^{e}(K_{2,n})=k$。

证明 先证 $K_{2,n}$不存在可用的颜色有 $k-1$ 种的点被多重集可区别的 E-全染色。假设 $K_{2,n}$存在可用的颜色有 $k-1$ 种的点被多重集可区别的 E-全染色 h,分以下 2 种情形进行讨论。

情形 1 $h(u_1)=h(u_2)$。

不妨设 $h(u_1)=h(u_2)=1$。这时 $K_{2,n}$的所有边及 Y 中的所有顶点都不能染以颜色 1,故 Y 中的每个顶点在 h 下的色集合为$\{2,3,\cdots,k-1\}$的 3-子集,且“至少有一种颜色在该 3-子集里只出现一次”,这样的 3-子集共有$\binom{k-2}{3}+2\binom{k-2}{2}=\binom{k-1}{3}+\binom{k-2}{2}$个,当 $k\geqslant 6$ 时,有$\binom{k-1}{3}+\binom{k-2}{2}\leqslant\binom{k-1}{3}+2\binom{k-3}{2}<n$,故所有这样的 3-子

集不能区分 Y 中的 n 个顶点,矛盾。

情形 2　$h(u_1)\neq h(u_2)$。

不妨设 $h(u_1)=1$, $h(u_2)=2$。这时,对每个 $s\in\{3,4,\cdots,k-1\}$,有$\{1,s,s\}$、$\{2,s,s\}$、$\{s,1,1\}$、$\{s,2,2\}$、$\{1,2,2\}$、$\{2,1,1\}$都不能是 Y 中顶点的色集合,则可以成为 Y 中的顶点在 h 下的色集合的$\{1,2,\cdots,k-1\}$的 3-子集有以下 2 类:

(1) 所含 3 种颜色互不相同。

(2) 所含 3 种颜色里刚好有 2 种颜色相同,并且这 3 种颜色都不能是 1 和 2。

属于第 1 类的 3-子集共有$\binom{k-1}{3}$个,属于第 2 类的 3-子集共有 $2\binom{k-3}{2}$个,所以能够成为 Y 中顶点的色集合的 3-子集共有$\binom{k-1}{3}+2\binom{k-3}{2}$个。由于$\binom{k-1}{3}+2\binom{k-3}{2}<n$,因此所有那样的 3-子集不能区分 Y 中的 n 个顶点,矛盾。

再证 $K_{2,n}$存在可用的颜色有 k 种的点被多重集可区别的 E-全染色。不妨给 X 中的顶点 u_1、u_2 分别染以颜色 1、2,则$\{1,2,\cdots,k\}$的形如$\{a,b,c\}$的 3-子集共有$\binom{k}{3}$个,其中 a、b、c 互异。先将$\{1,2,\cdots,k\}$的形如$\{a,b,c\}$的$\binom{k}{3}$个 3-子集排成一个序列,在此序列的基础上,再将形如$\{a,b,b\}$的 $2\binom{k-2}{2}$个 3-子集排成一个序列放在形如$\{a,b,c\}$的 3-子集的后面,此时这 2 个序列共同构成一个有$\binom{k}{3}+2\binom{k-2}{2}$个 3-子集的新的序列,且让 Y 中的顶点 v_1、v_2、$\cdots$、v_n 依次对应新的序列中的第 1、2、$\cdots$、n 个 3-子集,具体染色方案如下:

(1) 当 v_j 对应的 3-子集形如$\{s,t,r\}$时,其中 $s,t,r\in\{3,4,\cdots,k\}$且互不相同,用颜色 s、t、r 分别染点 v_j 和边 u_1v_j、u_2v_j。

(2) 当 v_j 对应的 3-子集形如$\{s,1,2\}$时,其中 $s\in\{3,4,\cdots,k\}$,用颜色 s、1、2 分别染点 v_j 和边 u_2v_j、u_1v_j。

(3) 当 v_j 对应的 3-子集形如$\{s,t,1\}$时,其中 $s,t\in\{3,4,\cdots,k\}$且互不相同,用颜色 s、t、1 分别染点 v_j 和边 u_1v_j、u_2v_j。

(4) 当 v_j 对应的 3-子集形如$\{s,t,2\}$时,其中 $s,t\in\{3,4,\cdots,k\}$且互不相同,用颜色 s、t、2 分别染点 v_j 和边 u_2v_j、u_1v_j。

(5) 当 v_j 对应的 3-子集形如$\{s,t,t\}$时,其中 $s,t\in\{3,4,\cdots,k\}$且互不相同,用颜色 s、t、t 分别染点 v_j 和边 u_1v_j、u_2v_j。

此时 Y 中每个点的色集合刚好是事先对应于这个点的色集合,Y 中不同顶点对应的色集合是不同的,所以 Y 中任意 n 个点彼此可区别。

下面证明 $\widetilde{C}(u_1)\neq\widetilde{C}(u_2)$。令 $\widetilde{C}(u_i)=\{f(u_i),f(u_iv_1),\cdots,f(u_iv_n)\}$, $i=1,2$,其中 $f(u_1v_1)\neq 1$, $f(u_2v_1)\neq 2$,且 $f(u_1v_1)\neq f(u_2v_1)$,若 $\widetilde{C}(u_1)=\widetilde{C}(u_2)$,只须交换颜色 $f(u_1v_1)$ 和 $f(u_2v_1)$,此时 Y 中顶点 v_1 和其他顶点 v_j 对应的色集合都不变,并且 $\widetilde{C}(u_1)$里面多了一种颜色 $f(u_2v_1)$,少了一种颜色 $f(u_1v_1)$,同时 $\widetilde{C}(u_2)$里面多了一种颜色 $f(u_1v_1)$,少了一种颜色 $f(u_2v_1)$,就可以得到 $\widetilde{C}(u_1)\neq\widetilde{C}(u_2)$。

定理 4　若$\binom{k+1}{4}+\binom{k}{3}-\binom{k-2}{2}-5k+13<n\leqslant\binom{k+2}{4}+\binom{k+1}{3}-\binom{k-1}{2}-5k+8$, $4\leqslant k\leqslant 8$, $n\geqslant 3$,则$\chi_{vt}^{e}(K_{3,n})=k$。

证明　先证 $K_{3,n}$不存在可用的颜色有 $k-1$ 种的点被多重集可区别的 E-全染色。假设 $K_{3,n}$存在可用的颜色有 $k-1$ 种的点被多重集可区别的 E-全染色 h,分以下 3 种情形进行讨论。

情形 1　$h(u_1)=h(u_2)=h(u_3)$。

不妨设 $h(u_1)=h(u_2)=h(u_3)=1$。这时 $K_{3,n}$的所有边及 Y 中的所有顶点都不能染以颜色 1,故 Y 中的每个顶点在 h 下的色集合为$\{2,3,\cdots,k-1\}$的 4-子集,且“至少有一种颜色在该 4-子集里只出现一次”,这样的 4-子集共有$\binom{k-2}{4}+3\binom{k-2}{3}+2\binom{k-2}{2}=\binom{k}{4}+\binom{k-1}{3}$个,则

$$\begin{aligned}&\binom{k}{4}+\binom{k-1}{3}-\left[\binom{k+1}{4}+\binom{k}{3}-\binom{k-2}{2}-5k+13\right]\\&=\binom{k}{4}+\binom{k-1}{3}-\binom{k+1}{4}-\binom{k}{3}+\binom{k-2}{2}+5k-13\\&=-\left[\binom{k+1}{4}-\binom{k}{4}\right]-\left[\binom{k}{3}-\binom{k-1}{3}\right]+\binom{k-2}{2}+5k-13\\&=-\binom{k}{3}-\binom{k-1}{2}+\binom{k-2}{2}+5k-13\\&=-\binom{k}{3}-\left[\binom{ck-1}{2}-\binom{k-2}{2}\right]+5k-13\\&=-\binom{k}{3}-\binom{k-2}{1}+5k-13\\&=\frac{-k^3+3k^2+22k-66}{6}=\frac{(k-3)(-k^2+22)}{6}。\end{aligned}$$

当 $k=4$ 时,$\frac{(k-3)(-k^2+22)}{6}=1>0$, $1<n\leqslant 10$,显然 $k-1=4-1=3$ 种颜色不可以区分 $K_{3,2}$、$K_{3,3}$、$K_{3,4}$、$K_{3,5}$、$K_{3,6}$、$K_{3,7}$、$K_{3,8}$、$K_{3,9}$、$K_{3,10}$中的顶点;当 $5\leqslant k\leqslant 8$ 时,$\frac{(k-3)(-k^2+22)}{6}<0$,即有

$$\binom{k}{4}+\binom{k-1}{3}<\binom{k+1}{4}+\binom{k}{3}-\binom{k-2}{2}-5k+13。$$

由于$\binom{k+1}{4}+\binom{k}{3}-\binom{k-2}{2}-5k+13<n$,因此$\binom{k}{4}+\binom{k-1}{3}<n$,所有那样的 4-子集不能区分 Y 中的 n 个顶点,矛盾。

情形 2　$h(u_1)=h(u_2)\neq h(u_3)$。

不妨设 $h(u_1)=h(u_2)=1$, $h(u_3)=2$。这时,对每个 $s,t\in\{3,4,\cdots,k-1\}$,有$\{1,2,2,2\}$、$\{1,s,s,s\}$、$\{2,1,1,1\}$、$\{2,s,s,s\}$、$\{s,1,1,1\}$、$\{s,2,2,2\}$、$\{s,2,1,1\}$、$\{s,t,1,1\}$、$\{1,2,s,s\}$都不能是 Y 中顶点的色集合,故不可以成为 Y 中顶点的色集合的 4-子集的数量为

$$\begin{aligned}&1+\binom{k-3}{1}+1+\binom{k-3}{1}+\binom{k-3}{1}+\binom{k-3}{1}+\binom{k-3}{1}+\binom{k-3}{2}+\binom{k-3}{1}\\&=6k-16+\binom{k-3}{2}=\binom{k-2}{2}+5k-13,\end{aligned}$$

则能够成为 Y 中顶点的色集合的 4−子集的数量为

$$\begin{aligned}&\binom{k-1}{4}+3\binom{k-1}{3}+2\binom{k-1}{2}-\left[\binom{k-2}{2}+5k-13\right]\\&=\left[\binom{k-1}{4}+\binom{k-1}{3}\right]+2\left[\binom{k-1}{3}+\binom{k-1}{2}\right]-\binom{k-2}{2}-5k+13\\&=\binom{k}{4}+2\binom{k}{3}-\binom{k-2}{2}-5k+13\\&=\left[\binom{k}{4}+\binom{k}{3}\right]+\binom{k}{3}-\binom{k-2}{2}-5k+13\\&=\binom{k+1}{4}+\binom{k}{3}-\binom{k-2}{2}-5k+13。\end{aligned}$$

由于$\binom{k+1}{4}+\binom{k}{3}-\binom{k-2}{2}-5k+13<n$,因此所有那样的 4-子集不能区分 Y 中的 n 个顶点,矛盾。

情形 3　$h(u_1)\neq h(u_2)\neq h(u_3)$。

不妨设 $h(u_1)=1$, $h(u_2)=2$, $h(u_3)=3$。这时,对每个 $s\in\{4,5,\cdots,k-1\}$,有 $\{1,2,2,2\}$、$\{1,3,3,3\}$、$\{1,s,s,s\}$、$\{2,1,1,1\}$、$\{2,3,3,3\}$、$\{2,s,s,s\}$、$\{3,1,1,1\}$、$\{3,2,2,2\}$、$\{3,s,s,s\}$、$\{s,1,1,1\}$、$\{s,2,2,2\}$、$\{s,3,3,3\}$、$\{1,2,3,3\}$、$\{1,2,s,s\}$、$\{2,3,1,1\}$、$\{2,3,s,s\}$、$\{1,3,2,2\}$、$\{1,3,s,s\}$ 都不能是 Y 中顶点的色集合,故不可以成为 Y 中顶点的色集合的 4-子集的数量为

$$1+1+\binom{k-4}{1}+1+1+\binom{k-4}{1}+1+1+\binom{k-4}{1}+\binom{k-4}{1}+\binom{k-4}{1}+\binom{k-4}{1}+1+\binom{k-4}{1}+1+\binom{k-4}{1}+1+\binom{k-4}{1}=9k-27,$$

则能够成为 Y 中顶点的色集合的 4-子集的数量为

$$\begin{aligned}&\binom{k-1}{4}+3\binom{k-1}{3}+2\binom{k-1}{2}-(9k-27)\\ &=\left[\binom{k-1}{4}+\binom{k-1}{3}\right]+2\left[\binom{k-1}{3}+\binom{k-1}{2}\right]-9k+27\\ &=\binom{k}{4}+2\binom{k}{3}-9k+27\\ &=\left[\binom{k}{4}+\binom{k}{3}\right]+\binom{k}{3}-9k+27\\ &=\binom{k+1}{4}+\binom{k}{3}-9k+27,\end{aligned}$$

那么

$$\binom{k+1}{4}+\binom{k}{3}-9k+27-\left[\binom{k+1}{4}+\binom{k}{3}-\binom{k-2}{2}-5k+13\right]=\binom{k-2}{2}-4k+14=\frac{k^2-13k+34}{2}。$$

当 $4\leqslant k\leqslant 8$ 时,$\frac{k^2-13k+34}{2}<0$,即有 $\binom{k+1}{4}+\binom{k}{3}-9k+27<\binom{k+1}{4}+\binom{k}{3}-\binom{k-2}{2}-5k+13$。由于 $\binom{k+1}{4}+\binom{k}{3}-\binom{k-2}{2}-5k+13<n$,因此 $\binom{k+1}{4}+\binom{k}{3}-9k+27<n$,所有那样的 4-子集不能区分 Y 中的 n 个顶点,矛盾。

再证 $K_{3,n}$ 存在可用的颜色有 k 种的点被多重集可区别的 E-全染色。不妨给 X 中的顶点 u_1、u_2、u_3 分别染以颜色 1、1、2,将 $\{1,2,\cdots,k\}$ 的形如 $\{a,b,c,d\}$,$\{a,b,c,c\}$,$\{a,b,b,b\}$ 的 4-子集按照先后顺序排成一个序列(先将所有形如 $\{a,b,c,d\}$ 的 4-子集排成一个序列,再将所有形如 $\{a,b,c,c\}$ 的 4-子集排成一个序列,放到形如 $\{a,b,c,d\}$ 的 4-子集所组成的序列后面,最后将所有形如 $\{a,b,b,b\}$ 的 4-子集排成一个序列,放到形如 $\{a,b,c,c\}$ 的 4-子集所组成的序列后面,得到一个新的序列),那么这个新的序列共包含 $\binom{k+2}{4}+\binom{k+1}{3}-\binom{k-1}{2}-5k+8$ 个 4-子集,其中 a、b、c、d 互异,且让 Y 中的顶点 v_1、v_2、$\cdots$、v_n 依次对应该序列中的第 1、2、$\cdots$、n 个 4-子集,具体染色方案如下:

(1) 当 v_j 对应的 4-子集形如 $\{s,t,r,p\}$ 时,其中 $s,t,r,p\in\{3,4,\cdots,k\}$ 且互不相同,用颜色 s、t、r、p 分别染点 v_j 和边 u_1v_j,u_2v_j,u_3v_j。

(2) 当 v_j 对应的 4-子集形如 $\{s,1,2,2\}$ 时,其中 $s\in\{3,4,\cdots,k\}$,用颜色 s、1、2、2 分别染点 v_j 和边 u_3v_j、u_2v_j、u_1v_j。

(3) 当 v_j 对应的 4-子集形如 $\{s,t,1,2\}$ 时,其中 $s,t\in\{3,4,\cdots,k\}$ 且互不相同,用颜色 s、t、1、2 分别染点 v_j 和边 u_2v_j、u_3v_j、u_1v_j。

(4) 当 v_j 对应的 4-子集形如 $\{s,t,2,2\}$ 时,其中 $s,t\in\{3,4,\cdots,k\}$ 且互不相同,用颜色 s、t、2、2 分别染点 v_j 和边 u_3v_j、u_2v_j、u_1v_j。

(5) 当 v_j 对应的 4-子集形如 $\{s,t,t,1\}$ 时,其中 $s,t\in\{3,4,\cdots,k\}$ 且互不相同,用颜色 s、t、t、1 分别染点 v_j 和边 u_1v_j、u_2v_j、u_3v_j。

(6) 当 v_j 对应的4-子集形如$\{s,t,t,2\}$时,其中 $s,t\in\{3,4,\cdots,k\}$ 且互不相同,用颜色 s、t、t、2 分别染点 v_j 和边 u_3v_j、u_2v_j、u_1v_j。

(7) 当 v_j 对应的4-子集形如$\{s,t,r,1\}$时,其中 $s,t,r\in\{3,4,\cdots,k\}$ 且互不相同,用颜色 s、t、r、1 分别染点 v_j 和边 u_1v_j、u_2v_j、u_3v_j。

(8) 当 v_j 对应的4-子集形如$\{s,t,r,2\}$时,其中 $s,t,r\in\{3,4,\cdots,k\}$ 且互不相同,用颜色 s、t、r、2 分别染点 v_j 和边 u_3v_j、u_2v_j、u_1v_j。

(9) 当 v_j 对应的4-子集形如$\{s,t,r,r\}$时,其中 $s,t,r\in\{3,4,\cdots,k\}$ 且互不相同,用颜色 s、t、r、r 分别染点 v_j 和边 u_1v_j、u_2v_j、u_3v_j。

(10) 当 v_j 对应的4-子集形如$\{s,t,t,t\}$时,其中 $s,t\in\{3,4,\cdots,k\}$ 且互不相同,用颜色 s、t、t、t 分别染点 v_j 和边 u_1v_j、u_2v_j、u_3v_j。

此时,Y 中每个点的色集合刚好是事先对应于这个点的色集合,Y 中不同顶点对应的色集合是不同的,所以 Y 中任意 n 个点彼此可区别。

当 $n=3$ 时,在上述给出的染色下,$K_{3,3}$中的6个点的色集合分别是$\{1,2,2,4\}$、$\{1,4,2,4\}$、$\{2,1,1,1\}$、$\{3,2,4,1\}$、$\{3,2,2,1\}$、$\{3,4,4,1\}$,显然这6个色集合是互不相同的。

当 $n>3$ 时,X 中点的色集合与 Y 中点的色集合的元素个数不同,因此 X 中每个点与 Y 中每个点可区别。

下面证明 $\tilde{C}(u_1)$、$\tilde{C}(u_2)$、$\tilde{C}(u_3)$ 互不相同。令 $\tilde{C}(u_i)=\{f(u_i),f(u_iv_1),\cdots,f(u_iv_n)\}$, $i=1,2,3$,其中 $f(u_1v_1)\neq 1$, $f(u_2v_1)\neq 1$, $f(u_3v_1)\neq 2$,若 $\tilde{C}(u_1)=\tilde{C}(u_2)=\tilde{C}(u_3)$,此时只须交换 $\tilde{C}(u_1)$ 与 $\tilde{C}(u_2)$ 或 $\tilde{C}(u_1)$ 与 $\tilde{C}(u_3)$ 或 $\tilde{C}(u_3)$ 与 $\tilde{C}(u_2)$ 中的第2个元素,即交换颜色 $f(u_1v_1)$ 与 $f(u_2v_1)$ 或 $f(u_1v_1)$ 与 $f(u_3v_1)$ 或 $f(u_3v_1)$ 与 $f(u_2v_1)$,这时互相交换元素的2个 $\tilde{C}(u_i)$ 就会多一种颜色的同时也会少一种颜色(多的颜色和少的颜色不是同一种颜色),另一个 $\tilde{C}(u_i)$ 不发生变化,Y 中所有顶点所对应的色集合也都不变,于是,可以得到 $\tilde{C}(u_1)\neq\tilde{C}(u_2)\neq\tilde{C}(u_3)$;若 $\tilde{C}(u_1)=\tilde{C}(u_2)\neq\tilde{C}(u_3)$,此时交换 $\tilde{C}(u_1)$ 与 $\tilde{C}(u_2)$ 中的第2个元素,即交换颜色 $f(u_1v_1)$ 与 $f(u_2v_1)$,则 $\tilde{C}(u_1)\neq\tilde{C}(u_2)$,这时若 $\tilde{C}(u_3)=\tilde{C}(u_2)$ 或 $\tilde{C}(u_3)=\tilde{C}(u_1)$ 成立,则继续交换 $\tilde{C}(u_3)$ 与 $\tilde{C}(u_2)$ 或 $\tilde{C}(u_3)$ 与 $\tilde{C}(u_1)$ 中的第2个元素,即交换颜色 $f(u_3v_1)$ 与 $f(u_2v_1)$ 或 $f(u_3v_1)$ 与 $f(u_1v_1)$,那么 $\tilde{C}(u_i)$ 中就会多一种颜色的同时也会少一种颜色(多的颜色和少的颜色不是同一种颜色),而 Y 中所有顶点所对应的色集合都不变,于是,可以得到 $\tilde{C}(u_1)\neq\tilde{C}(u_2)\neq\tilde{C}(u_3)$。

定理5 若$\binom{k+1}{4}+\binom{k}{3}-9k+27<n\leqslant\binom{k+2}{4}+\binom{k+1}{3}-9k+18$, $k\geqslant 9$, $n\geqslant 242$,则$\chi_{vt}^{e}(K_{3,n})=k$。

证明 先证 $K_{3,n}$不存在可用的颜色有 $k-1$ 种的点被多重集可区别的E-全染色。假设 $K_{3,n}$存在可用的颜色有 $k-1$ 种的点被多重集可区别的E-全染色 h,分以下3种情形进行讨论。

情形1 $h(u_1)=h(u_2)=h(u_3)$。

不妨设 $h(u_1)=h(u_2)=h(u_3)=1$。这时 $K_{3,n}$的所有边及 Y 中的所有顶点都不能染以颜色1,故 Y 中的每个顶点在 h 下的色集合为$\{2,3,\cdots,k-1\}$的4-子集,且"至少有一种颜色在该4-子集里只出现一次",这样的4-子集共有$\binom{k-2}{4}+3\binom{k-2}{3}+2\binom{k-2}{2}=\binom{k}{4}+\binom{k-1}{3}$个,则

$$\begin{aligned}
&\binom{k}{4}+\binom{k-1}{3}-\left[\binom{k+1}{4}+\binom{k}{3}-9k+27\right]\\
&=\binom{k}{4}+\binom{k-1}{3}-\binom{k+1}{4}-\binom{k}{3}+9k-27\\
&=-\left[\binom{k+1}{4}-\binom{k}{4}\right]-\left[\binom{k}{3}-\binom{k-1}{3}\right]+9k-27\\
&=-\binom{k}{3}-\binom{k-1}{2}+9k-27\\
&=\frac{-k^3+61k-168}{6}。
\end{aligned}$$

当 $k\geqslant 9$ 时,$\dfrac{-k^3+61k-168}{6}<0$,即有 $\binom{k}{4}+\binom{k-1}{3}<\binom{k+1}{4}+\binom{k}{3}-9k+27$,由于 $\binom{k+1}{4}+\binom{k}{3}-9k+27<n$,因此 $\binom{k}{4}+\binom{k-1}{3}<n$,所以所有那样的 4-子集不能区分 Y 中的 n 个顶点,矛盾。

情形 2　$h(u_1)=h(u_2)\neq h(u_3)$。

不妨设 $h(u_1)=h(u_2)=1$, $h(u_3)=2$。这时,对每个 $s,t\in\{3,4,\cdots,k-1\}$,有 $\{1,2,2,2\}$、$\{1,s,s,s\}$、$\{2,1,1,1\}$、$\{2,s,s,s\}$、$\{s,1,1,1\}$、$\{s,2,2,2\}$、$\{s,2,1,1\}$、$\{s,t,1,1\}$、$\{1,2,s,s\}$ 都不能是 Y 中顶点的色集合,故不可以成为 Y 中顶点的色集合的 4-子集的数量为

$$1+\binom{k-3}{1}+1+\binom{k-3}{1}+\binom{k-3}{1}+\binom{k-3}{1}+\binom{k-3}{1}+\binom{k-3}{2}+\binom{k-3}{1}$$
$$=6k-16+\binom{k-3}{2}=\binom{k-2}{2}+5k-13,$$

则能够成为 Y 中顶点的色集合的 4-子集的数量为

$$\binom{k-1}{4}+3\binom{k-1}{3}+2\binom{k-1}{2}-\left[\binom{k-2}{2}+5k-13\right]$$
$$=\left[\binom{k-1}{4}+\binom{k-1}{3}\right]+2\left[\binom{k-1}{3}+\binom{k-1}{2}\right]-\binom{k-2}{2}-5k+13$$
$$=\binom{k}{4}+2\binom{k}{3}-\binom{k-2}{2}-5k+13$$
$$=\left[\binom{k}{4}+\binom{k}{3}\right]+\binom{k}{3}-\binom{k-2}{2}-5k+13$$
$$=\binom{k+1}{4}+\binom{k}{3}-\binom{k-2}{2}-5k+13,$$

那么

$$\binom{k+1}{4}+\binom{k}{3}-\binom{k-2}{2}-5k+13-\left[\binom{k+1}{4}+\binom{k}{3}-9k+27\right]$$
$$=-\binom{k-2}{2}-5k+13+9k-27$$
$$=-\binom{k-2}{2}+4k-14$$
$$=\frac{-k^2+13k-34}{2}。$$

当 $k=9$ 时,$\dfrac{-k^2+13k-34}{2}=1>0$, $240<n\leqslant 387$,由定理 4 可知,8 种颜色最多可以区分 Y 中的 241 个顶点,所以当 $242\leqslant n$ 时,$k-1=9-1=8$,8 种颜色不能区分 $K_{3,n}$中的 n 个顶点,矛盾;当 $k\geqslant 10$ 时,$\dfrac{-k^2+13k-34}{2}<0$,即有 $\binom{k+1}{4}+\binom{k}{3}-\binom{k-2}{2}-5k+13<\binom{k+1}{4}+\binom{k}{3}-9k+27$,由于 $\binom{k+1}{4}+\binom{k}{3}-9k+27<n$,因此 $\binom{k+1}{4}+\binom{k}{3}-\binom{k-2}{2}-5k+13<n$,所有那样的 4-子集不能区分 Y 中的 n 个顶点,矛盾。

情形 3　$h(u_1)\neq h(u_2)\neq h(u_3)$。

不妨设 $h(u_1)=1$, $h(u_2)=2$, $h(u_3)=3$。这时,对每个 $s\in\{4,5,\cdots,k-1\}$,有 $\{1,2,2,2\}$、$\{1,3,3,3\}$、$\{1,s,s,s\}$、$\{2,1,1,1\}$、$\{2,3,3,3\}$、$\{2,s,s,s\}$、$\{3,1,1,1\}$、$\{3,2,2,2\}$、$\{3,s,s,s\}$、$\{s,1,1,1\}$、$\{s,2,2,2\}$、$\{s,3,3,3\}$、$\{1,2,3,3\}$、$\{1,2,s,s\}$、$\{2,3,1,1\}$、$\{2,3,s,s\}$、$\{1,3,2,2\}$、$\{1,3,s,s\}$ 都不能是 Y 中顶点的色集合,故不可以成为 Y 中顶点的色集合的 4-子集共有 $1+1+\binom{k-4}{1}+1+1+\binom{k-4}{1}+1+1+\binom{k-4}{1}+\binom{k-4}{1}+\binom{k-4}{1}+$

$\binom{k-4}{1}+1+\binom{k-4}{1}+1+\binom{k-4}{1}+1+\binom{k-4}{1}=9k-27$ 个,能够成为 Y 中顶点的色集合的4-子集共有 $\binom{k-1}{4}+3\binom{k-1}{3}+2\binom{k-1}{2}-(9k-27)=\binom{k+1}{4}+\binom{k}{3}-9k+27$ 个。由于 $\binom{k+1}{4}+\binom{k}{3}-9k+27<n$,因此所有那样的4-子集不能区分 Y 中的 n 个顶点,矛盾。

再证 $K_{3,n}$ 存在可用的颜色有 k 种的点被多重集可区别的E-全染色。不妨给 X 中的顶点 u_1、u_2、u_3 分别染以颜色1、2、3,将 $\{1,2,\cdots,k\}$ 的形如 $\{a,b,c,d\}$、$\{a,b,c,c\}$、$\{a,b,b,b\}$ 的4-子集按照先后顺序排成一个序列(先将所有形如 $\{a,b,c,d\}$ 的4-子集排成一个序列,再将所有形如 $\{a,b,c,c\}$ 的4-子集排成一个序列,放到形如 $\{a,b,c,d\}$ 的4-子集所组成的序列后面,最后将所有形如 $\{a,b,b,b\}$ 的4-子集排成一个序列,放到形如 $\{a,b,c,c\}$ 的4-子集所组成的序列后面,得到一个新的序列),那么这个新的序列共有 $\binom{k+2}{4}+\binom{k+1}{3}-9k+18$ 个4-子集,其中 a、b、c、d 互异,且让 Y 中的顶点 v_1、v_2、$\cdots$、v_n 依次对应该序列中的第1、2、$\cdots$、n 个4-子集,具体染色方案如下:

(1) 当 v_j 对应的4-子集形如 $\{s,t,r,p\}$ 时,其中 $s,t,r,p\in\{4,5,\cdots,k\}$ 且互不相同,用颜色 s、t、r、p 分别染点 v_j 和边 u_1v_j、u_2v_j、u_3v_j;

(2) 当 v_j 对应的4-子集形如 $\{s,1,2,3\}$ 时,其中 $s\in\{4,5,\cdots,k\}$,用颜色 s、1、2、3分别染点 v_j 和边 u_3v_j、u_1v_j、u_2v_j。

(3) 当 v_j 对应的4-子集形如 $\{s,1,1,2\}$ 时,其中 $s\in\{4,5,\cdots,k\}$,用颜色 s、1、1、2分别染点 v_j 和边 u_3v_j、u_2v_j、u_1v_j。

(4) 当 v_j 对应的4-子集形如 $\{s,1,1,3\}$ 时,其中 $s\in\{4,5,\cdots,k\}$,用颜色 s、1、1、3分别染点 v_j 和边 u_3v_j、u_2v_j、u_1v_j。

(5) 当 v_j 对应的4-子集形如 $\{s,1,2,2\}$ 时,其中 $s\in\{4,5,\cdots,k\}$,用颜色 s、1、2、2分别染点 v_j 和边 u_2v_j、u_1v_j、u_3v_j。

(6) 当 v_j 对应的4-子集形如 $\{s,1,3,3\}$ 时,其中 $s\in\{4,5,\cdots,k\}$,用颜色 s、1、3、3分别染点 v_j 和边 u_3v_j、u_2v_j、u_1v_j。

(7) 当 v_j 对应的4-子集形如 $\{s,2,3,3\}$ 时,其中 $s\in\{4,5,\cdots,k\}$,用颜色 s、2、3、3分别染点 v_j 和边 u_3v_j、u_2v_j、u_1v_j。

(8) 当 v_j 对应的4-子集形如 $\{s,2,2,3\}$ 时,其中 $s\in\{4,5,\cdots,k\}$,用颜色 s、2、2、3分别染点 v_j 和边 u_3v_j、u_1v_j、u_2v_j。

(9) 当 v_j 对应的4-子集形如 $\{s,t,1,2\}$ 时,其中 $s,t\in\{4,5,\cdots,k\}$ 且互不相同,用颜色 s、t、1、2分别染点 v_j 和边 u_2v_j、u_3v_j、u_1v_j。

(10) 当 v_j 对应的4-子集形如 $\{s,t,1,3\}$ 时,其中 $s,t\in\{4,5,\cdots,k\}$ 且互不相同,用颜色 s、t、1、3分别染点 v_j 和边 u_3v_j、u_2v_j、u_1v_j。

(11) 当 v_j 对应的4-子集形如 $\{s,t,2,3\}$ 时,其中 $s,t\in\{4,5,\cdots,k\}$ 且互不相同,用颜色 s、t、2、3分别染点 v_j 和边 u_3v_j、u_1v_j、u_2v_j。

(12) 当 v_j 对应的4-子集形如 $\{s,t,1,1\}$ 时,其中 $s,t\in\{4,5,\cdots,k\}$ 且互不相同,用颜色 s、t、1、1分别染点 v_j 和边 u_1v_j、u_2v_j、u_3v_j。

(13) 当 v_j 对应的4-子集形如 $\{s,t,2,2\}$ 时,其中 $s,t\in\{4,5,\cdots,k\}$ 且互不相同,用颜色 s、t、2、2分别染点 v_j 和边 u_2v_j、u_3v_j、u_1v_j。

(14) 当 v_j 对应的4-子集形如 $\{s,t,3,3\}$ 时,其中 $s,t\in\{4,5,\cdots,k\}$ 且互不相同,用颜色 s、t、3、3分别染点 v_j 和边 u_3v_j、u_2v_j、u_1v_j。

(15) 当 v_j 对应的4-子集形如 $\{s,t,r,1\}$ 时,其中 $s,t,r\in\{4,5,\cdots,k\}$ 且互不相同,用颜色 s、t、r、1分别染点 v_j 和边 u_1v_j、u_2v_j、u_3v_j。

(16) 当 v_j 对应的4-子集形如 $\{s,t,r,2\}$ 时,其中 $s,t,r\in\{4,5,\cdots,k\}$ 且互不相同,用颜色 s、t、r、2分别染

点 v_j 和边 u_3v_j、u_2v_j、u_1v_j。

（17）当 v_j 对应的 4-子集形如 $\{s,t,r,3\}$ 时，其中 $s,t,r\in\{4,5,\cdots,k\}$ 且互不相同，用颜色 s、t、r、3 分别染点 v_j 和边 u_3v_j、u_1v_j、u_2v_j。

（18）当 v_j 对应的 4-子集形如 $\{s,t,t,1\}$ 时，其中 $s,t\in\{4,5,\cdots,k\}$ 且互不相同，用颜色 s、t、t、1 分别染点 v_j 和边 u_1v_j、u_2v_j、u_3v_j。

（19）当 v_j 对应的 4-子集形如 $\{s,t,t,2\}$ 时，其中 $s,t\in\{4,5,\cdots,k\}$ 且互不相同，用颜色 s、t、t、2 分别染点 v_j 和边 u_3v_j、u_2v_j、u_1v_j。

（20）当 v_j 对应的 4-子集形如 $\{s,t,t,3\}$ 时，其中 $s,t\in\{4,5,\cdots,k\}$ 且互不相同，用颜色 s、t、t、3 分别染点 v_j 和边 u_3v_j、u_1v_j、u_2v_j。

（21）当 v_j 对应的 4-子集形如 $\{s,t,r,r\}$ 时，其中 $s,t,r\in\{4,5,\cdots,k\}$ 且互不相同，用颜色 s、t、r、r 分别染点 v_j 和边 u_1v_j、u_2v_j、u_3v_j。

（22）当 v_j 对应的 4-子集形如 $\{s,t,t,t\}$ 时，其中 $s,t\in\{4,5,\cdots,k\}$ 且互不相同，用颜色 s、t、t、t 分别染点 v_j 和边 u_1v_j、u_2v_j、u_3v_j。

此时 Y 中每个点的色集合刚好是事先对应于这个点的色集合，Y 中不同顶点对应的色集合是不同的，所以 Y 中任意 n 个点彼此可区别。

下面证明 $\tilde{C}(u_1)$、$\tilde{C}(u_2)$、$\tilde{C}(u_3)$ 互不相同。令 $\tilde{C}(u_i)=\{f(u_i),f(u_iv_1),\cdots,f(u_iv_n)\}$，$i=1,2,3$，其中 $f(u_1v_1)\neq1$，$f(u_2v_1)\neq2$，$f(u_3v_1)\neq3$，若 $\tilde{C}(u_1)=\tilde{C}(u_2)=\tilde{C}(u_3)$，此时只需交换 $\tilde{C}(u_1)$ 与 $\tilde{C}(u_2)$ 或 $\tilde{C}(u_1)$ 与 $\tilde{C}(u_3)$ 或 $\tilde{C}(u_3)$ 与 $\tilde{C}(u_2)$ 中的第 2 个元素，即交换颜色 $f(u_1v_1)$ 与 $f(u_2v_1)$ 或 $f(u_1v_1)$ 与 $f(u_3v_1)$ 或 $f(u_3v_1)$ 与 $f(u_2v_1)$，这时互相交换元素的 2 个 $\tilde{C}(u_i)$ 就会多一种颜色的同时也会少一种颜色（多的颜色和少的颜色不是同一种颜色），另外的一个 $\tilde{C}(u_i)$ 不发生变化，Y 中所有顶点所对应的色集合也都不变，于是，可以得到 $\tilde{C}(u_1)\neq\tilde{C}(u_2)\neq\tilde{C}(u_3)$；若 $\tilde{C}(u_1)=\tilde{C}(u_2)\neq\tilde{C}(u_3)$，此时交换 $\tilde{C}(u_1)$ 与 $\tilde{C}(u_2)$ 中的第 2 个元素，即交换颜色 $f(u_1v_1)$ 与 $f(u_2v_1)$，则 $\tilde{C}(u_1)\neq\tilde{C}(u_2)$，这时若 $\tilde{C}(u_3)=\tilde{C}(u_2)$ 或 $\tilde{C}(u_3)=\tilde{C}(u_1)$ 成立，则继续交换 $\tilde{C}(u_3)$ 与 $\tilde{C}(u_2)$ 或 $\tilde{C}(u_3)$ 与 $\tilde{C}(u_1)$ 中的第 2 个元素，即交换颜色 $f(u_3v_1)$ 与 $f(u_2v_1)$ 或 $f(u_3v_1)$ 与 $f(u_1v_1)$，那么 $\tilde{C}(u_i)$ 中就会多一种颜色的同时也会少一种颜色（多的颜色和少的颜色不是同一种颜色），而 Y 中所有顶点所对应的色集合都不变，于是，可以得到 $\tilde{C}(u_1)\neq\tilde{C}(u_2)\neq\tilde{C}(u_3)$。

3　结语

本文利用色集合事先分配法以及构造具体染色的方法确定了完全二部图 $K_{1,n}$、$K_{2,n}$、$K_{3,n}$ 的点被多重集可区别的 E-全色数，所采用的方法可对 $K_{m,n}(4\leqslant m\leqslant n)$ 的点被多重集可区别的 E-全染色进行进一步研究。

参考文献：

[1] HARARY F, PLANTHOLT M. The point-distinguishing chromatic index[M]. New York: Wiley Interscience, 1985.

[2] BURRIS A C, SCHELP R H. Vertex-distinguishing proper edge-coloring[J]. Journal of Graph Theory, 1997, 26(2):73-82.

[3] BALISTER P N, RIORDAN O M, SCHELP R H. Vertex-distinguishing edge colorings of graphs[J]. Journal of Graph Theory, 2003, 42(2):95-109.

[4] ZHANG Z F, QIU P X, LI J W, et al. Vertex-distinguishing total colorings of graphs[J]. Ars Combinatoria, 2008, 87:33-45.

[5] CHEN X E, ZU Y, ZHANG Z F. Vertex-distinguishing E-total colorings of graphs[J]. Arabian Journal for Science and Engineering, 2011, 36(8):1485-1500.

[6] 李世玲，陈祥恩，王治文. 完全二部图 $K_{3,n}(3\leqslant n\leqslant 17)$ 的点可区别 E-全染色[J]. 吉林大学学报（理学版），2015，53(6)：1171-1176.

LI Shiling, CHEN Xiang'en, WANG Zhiwen. Vertex-distinguish E-total coloring of complete bipartite graph $K_{3,n}$ with $3\leqslant n\leqslant 17$[J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2015, 53(6):1171-1176.

（下转第 40 页）