山东大学学报(理学版)2025年2月 第60卷 第2期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.60, No.2, 2025

E-mail:xblxb@sdu.edu.cn
http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn
Tel:+86-531-88366917

文章编号:1671-9352(2025)02-0041-10 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.303

$\mathrm{mad}(G)\leqslant\frac{13}{4}$的图的均匀染色

吴弦禧,黄丹君
(浙江师范大学数学科学学院, 浙江 金华 321004)

摘要:图 G 的均匀 k-染色是图 G 的一个正常 k-点染色且满足任意2个色类的顶点数之差的绝对值至多为1。若 G 存在一个均匀 k-染色,则称 G 是均匀 k-可染的。图 G 的最大平均度是图 G 的所有非空子图的平均度的最大值,用 $\mathrm{mad}(G)$ 表示。本文运用权转移的方法证明 $\mathrm{mad}(G)\leqslant\frac{13}{4}$ 的图是均匀 k-可染的,其中 $k\geqslant\max\{\Delta(G),6\}$,且 $\Delta(G)$ 是图 G 的最大度。

关键词:均匀 k-染色;最大平均度;权转移方法
中图分类号:O157.5 **文献标志码**:A
引用格式:吴弦禧,黄丹君. $\mathrm{mad}(G)\leqslant\frac{13}{4}$的图的均匀染色[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(2):41-50,62.

Equitable coloring of graphs with $\mathrm{mad}(G)\leqslant\frac{13}{4}$

WU Xianxi, HUANG Danjun
(School of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, Zhejiang, China)

Abstract: An equitable k-coloring of a graph G is a proper vertex coloring such that the size of any two color classes differ at most one. The graph G is said to be equitably k-colorable if G has an equitable k-coloring. The maximum average degree is the maximum value of average degree of all nonempty subgraphs of G, denoted by $\mathrm{mad}(G)$. In this paper, we utilizes the method of weight transfer to prove that a graph G with $\mathrm{mad}(G)\leqslant\frac{13}{4}$ is equitably k-colorable for $k\geqslant\max\{\Delta(G),6\}$, where $\Delta(G)$ is the maximum degree of G.

Key words: equitable k-coloring; maximum average degree; discharging method

1 引言与预备知识

本文只考虑无向、有限的简单图。对于一个给定的图 G,分别用 $V(G)$、$E(G)$、$\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$(简写为 Δ)表示图 G 的点集、边集、最小度和最大度。设 $v\in V(G)$ 且 $S\subseteq V(G)$,用 $d_S(v)$ 表示 S 中与 v 相邻的顶点个数,用 $d(v)$ 表示 G 中与 v 相邻的顶点个数,即 v 的度数。用 $N_G(v)$ 表示 G 中与 v 相邻的顶点组成的集合,故 $|N_G(v)|=d(v)$。如果一个点 v 满足 $d(v)=k$($d(v)\geqslant k$ 或 $d(v)\leqslant k$),那么称点 v 为 k-点(k^+-点或 k^--点)。令 $\mathrm{ad}(G)=\frac{\sum_{v\in V(G)}d(v)}{|V(G)|}$,并称之为图 G 的平均度。图 G 的最大平均度 $\mathrm{mad}(G)$ 是指 G 的所有非空子图的平均度的最大值,即 $\mathrm{mad}(G)=\max\{\mathrm{ad}(H)\mid H\subseteq G\}$。另外,我们用 $n_i(G)$ 表示图 G 中 i-点的个数。

收稿日期:2023-07-08; **网络出版时间**:2024-10-14 14:50:52
基金项目:国家自然科学基金资助项目(12171436)
第一作者:吴弦禧(1999—),女,硕士研究生,研究方向为组合数学与图论. E-mail:2712400835@qq.com

图 G 的一个正常 k-点染色是指一个映射 $\phi: V(G)\to\{1,2,\cdots,k\}$，使得对任意 2 个相邻的点 x 和 y 都有 $\phi(x)\neq\phi(y)$。图 G 的点色数是使 G 有一个正常 k-点染色的最小正整数 k，记作 $\chi(G)$。对于图 G 的一个 k-点染色 ϕ，用 $V_i(1\leqslant i\leqslant k)$ 表示图 G 中染颜色 i 的顶点组成的集合，则每个 $V_i(1\leqslant i\leqslant k)$ 都是一个独立集。若对任意 $i,j\in\{1,2,\cdots,k\}$ 都有 $||V_i|-|V_j||\leqslant 1$，则称 ϕ 是图 G 的一个均匀 k-染色，或称图 G 是均匀 k-可染的。图 G 的均匀色数是使 G 有一个均匀 k-染色的最小正整数 k，记作 $\chi_e(G)$。显然，$\chi_e(G)\geqslant\chi(G)$，且不等式可以严格成立。

均匀染色的概念是由 Meyer[1] 提出的，同时，他还提出了以下猜想。

猜想 1[1]　若 G 是一个连通图，且 G 既不是奇圈也不是完全图，则 $\chi_e(G)\leqslant\Delta$。

Erdös[2] 提出如下猜想：对任意的 $k\geqslant\Delta$，任意一个最大度为 Δ 的图都是均匀 $(k+1)$-可染的。该猜想被 Hajnal 等[3] 所证实。Kierstead 等[4] 应用算法分析对上述猜想给出了一个简短的证明。

Chen 等[5] 进一步提出了以下猜想。

猜想 2[5]　若 G 是一个连通图，且 G 既不是 K_m 和 C_{2m+1}，也不是 $K_{2m+1,2m+1}(m\geqslant 1)$，则 G 是均匀 Δ-可染的。

同时，Chen 等[5] 还证明了猜想 2 对 $\Delta\leqslant 3$ 的图成立。Kierstead 等[6] 将此结果改进到了 $\Delta\leqslant 4$。Chen 等[7] 和 Lih 等[8] 分别证明了猜想 2 对树及二部图成立。Wang 等[9] 证明了猜想 2 对线图成立。Kostochka[10-11] 证明了猜想 2 对外平面图成立和对 $\Delta\geqslant 14d+1$ 的 d-退化图成立。1998 年，Zhang 等[12] 证明了猜想 2 对 $\Delta\geqslant 13$ 的平面图成立。Nakprasit[13] 将文献[12]的结果改进到了 $\Delta\geqslant 9$。Kostochka 等[14] 进一步证明了猜想 2 对 $\Delta\geqslant 8$ 的平面图成立。Zhang[15] 首次考虑了 1-平面图的均匀染色，证明了猜想 2 对 $\Delta\geqslant 17$ 的 1-平面图成立。Zhang 等[16] 将文献[15]的结果改进到了 $\Delta\geqslant 15$。最近，Cranston 等[17] 进一步证明了猜想 2 对 $\Delta\geqslant 13$ 的 1-平面图成立。此外，还有一些学者考虑了最大平均度限制条件下的图的均匀染色。Dong 等[18] 证明了 $\mathrm{mad}(G)\leqslant 3$ 的图是均匀 k-可染的，其中 $k\geqslant\max\{\Delta,5\}$。Dong 等[19] 证明了 $\mathrm{mad}(G)<3$ 的图是均匀 k-可染的，其中 $k\geqslant\max\{\Delta,4\}$，同时，他们还证明了 $\mathrm{mad}(G)<\frac{12}{5}$ 的图是均匀 k-可染的，其中 $k\geqslant\max\{\Delta,3\}$。

本文考虑具有较小最大平均度的图的均匀染色，运用权转移方法证明了 $\mathrm{mad}(G)\leqslant\frac{13}{4}$ 的图是均匀 k-可染的，其中 $k\geqslant\max\{\Delta,6\}$。

2　结构引理

引理 1[20]　令 $S=\{v_1,v_2,\cdots,v_k\}\subseteq V(G)$，其中 v_1、v_2、$\cdots$、v_k 是图 G 中 k 个不同的点。若 $G-S$ 是均匀 k-可染的，且对任意 $1\leqslant i\leqslant k$，都有 $|N_G(v_i)-S|\leqslant k-i$，则 G 是均匀 k-可染的。

引理 2[3-4]　当 $k\geqslant\Delta+1$ 时，任意一个最大度为 Δ 的图都是均匀 k-可染的。

引理 3　若图 G 满足 $\mathrm{mad}(G)\leqslant\frac{13}{4}$，则 G 是 3-退化的。

证明　设 G' 是 G 的任一子图，因为 $\delta(G')\leqslant\dfrac{\sum\limits_{v\in V(G')}d(v)}{|V(G')|}=\mathrm{ad}(G')\leqslant\mathrm{mad}(G)\leqslant\frac{13}{4}$，所以 $\delta(G')\leqslant 3$，故 G 是 3-退化图。

引理 4　令 V_1 是 G 中 1-点组成的集合，V_2 是 2^+-点组成的集合，对 $\forall v\in V(G)$，定义初始权 $w(v)=d(v)-\frac{13}{4}$。经过一系列权转移规则后，设点 v 的新权为 $w'(v)$。若满足 $\sum\limits_{v\in V(G)}w(v)=\sum\limits_{v\in V(G)}w'(v)$，$\sum\limits_{v\in V_1}w'(v)\geqslant\sum\limits_{v\in V_1}(w(v)+d_{V_2}(v))$ 且 $\sum\limits_{v\in V_2}w'(v)>0$，则 $\mathrm{mad}(G)>\frac{13}{4}$。

证明　由 V_1、V_2 的定义可见 $V_1\cup V_2=V(G)$ 且 $\sum\limits_{v\in V_1}d_{V_2}(v)=|E(V_1,V_2)|=\sum\limits_{v\in V_2}d_{V_1}(v)$，其中 $E(V_1,V_2)=\{e\mid e=xy\in E(G)\text{且}x\in V_1,\ y\in V_2\}$，因此，

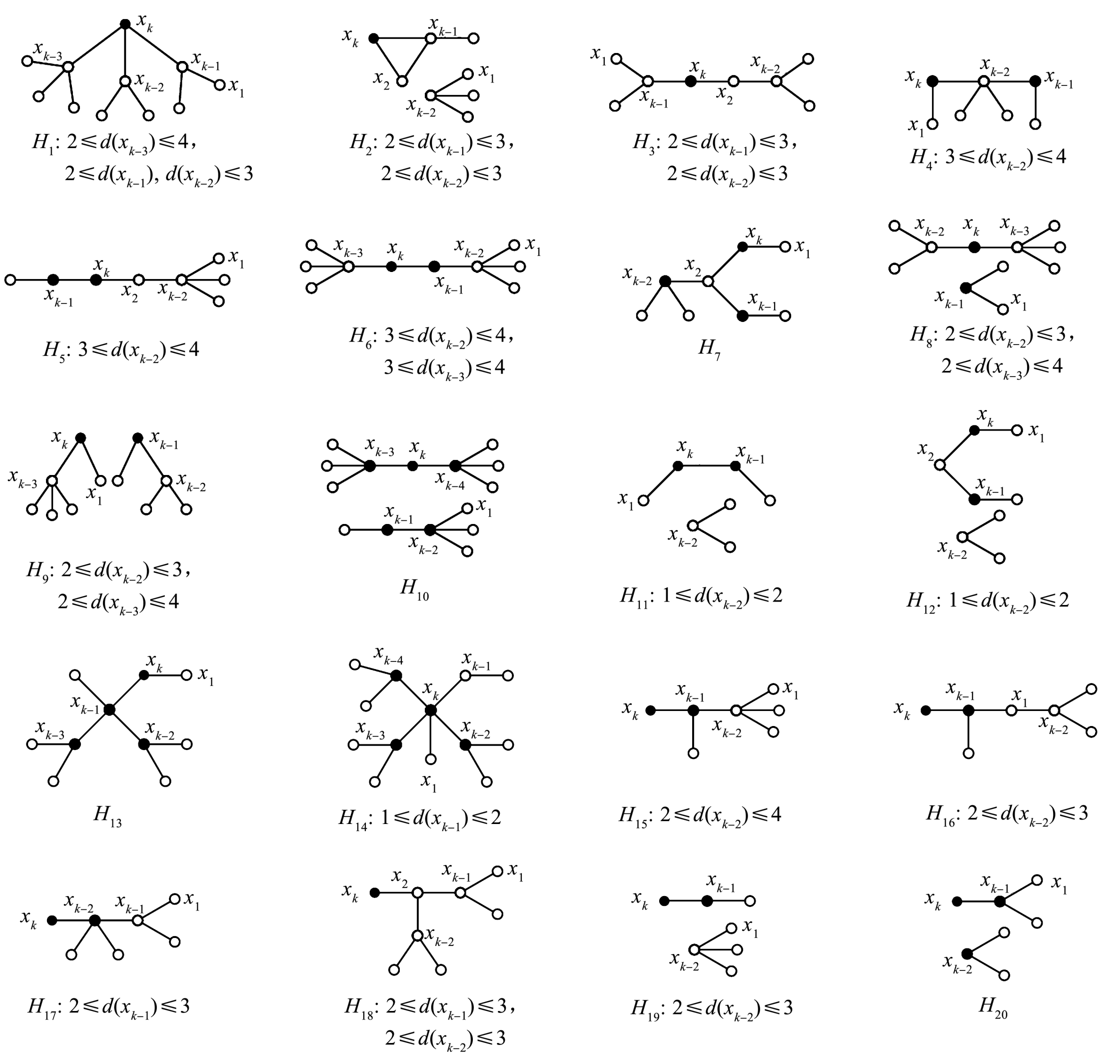
$$
\begin{aligned}
\sum_{v\in V_2}\left(d_{V_2}(v)-\frac{13}{4}\right) &\geqslant \sum_{v\in V_2}\left(d_{V_2}(v)-\frac{13}{4}\right)+\sum_{v\in V_1}(w(v)+d_{V_2}(v))-\sum_{v\in V_1}w'(v)\\
&=\sum_{v\in V_2}\left(d_{V_2}(v)-\frac{13}{4}\right)+|E(V_1,V_2)|+\sum_{v\in V_1}w(v)-\sum_{v\in V_1}w'(v)\\
&=\sum_{v\in V_2}\left(d_{V_2}(v)-\frac{13}{4}+d_{V_1}(v)\right)+\sum_{v\in V_1}w(v)-\sum_{v\in V_1}w'(v)\\
&=\sum_{v\in V_2}\left(d_{V_2}(v)-\frac{13}{4}\right)+\sum_{v\in V_1}w(v)-\sum_{v\in V_1}w'(v)\\
&=\sum_{v\in V}w(v)-\sum_{v\in V_1}w'(v)\\
&=\sum_{v\in V_2}w'(v)>0,
\end{aligned}
$$

从而,

$$0<\sum_{v\in V_2}\left(d_{V_2}(v)-\frac{13}{4}\right)=|V_2|\cdot\left[ad(G[V_2])-\frac{13}{4}\right],$$

则 $\mathrm{ad}(G[V_2])>\frac{13}{4}$,故 $\mathrm{mad}(G)\geqslant\mathrm{ad}(G[V_2])>\frac{13}{4}$。

引理 5　设连通图 G 满足 $\mathrm{mad}(G)\leqslant\frac{13}{4}$, $|V(G)|\geqslant 7$, $\Delta\geqslant 6$,则 G 至少包含图 1 中的子图形 H_1、H_2、⋯、H_{30}之一。



H_1: $2\leqslant d(x_{k-3})\leqslant 4$, $2\leqslant d(x_{k-1})$, $d(x_{k-2})\leqslant 3$

H_2: $2\leqslant d(x_{k-1})\leqslant 3$, $2\leqslant d(x_{k-2})\leqslant 3$

H_3: $2\leqslant d(x_{k-1})\leqslant 3$, $2\leqslant d(x_{k-2})\leqslant 3$

H_4: $3\leqslant d(x_{k-2})\leqslant 4$

H_5: $3\leqslant d(x_{k-2})\leqslant 4$

H_6: $3\leqslant d(x_{k-2})\leqslant 4$, $3\leqslant d(x_{k-3})\leqslant 4$

H_7

H_8: $2\leqslant d(x_{k-2})\leqslant 3$, $2\leqslant d(x_{k-3})\leqslant 4$

H_9: $2\leqslant d(x_{k-2})\leqslant 3$, $2\leqslant d(x_{k-3})\leqslant 4$

H_{10}

H_{11}: $1\leqslant d(x_{k-2})\leqslant 2$

H_{12}: $1\leqslant d(x_{k-2})\leqslant 2$

H_{13}

H_{14}: $1\leqslant d(x_{k-1})\leqslant 2$

H_{15}: $2\leqslant d(x_{k-2})\leqslant 4$

H_{16}: $2\leqslant d(x_{k-2})\leqslant 3$

H_{17}: $2\leqslant d(x_{k-1})\leqslant 3$

H_{18}: $2\leqslant d(x_{k-1})\leqslant 3$, $2\leqslant d(x_{k-2})\leqslant 3$

H_{19}: $2\leqslant d(x_{k-2})\leqslant 3$

H_{20}

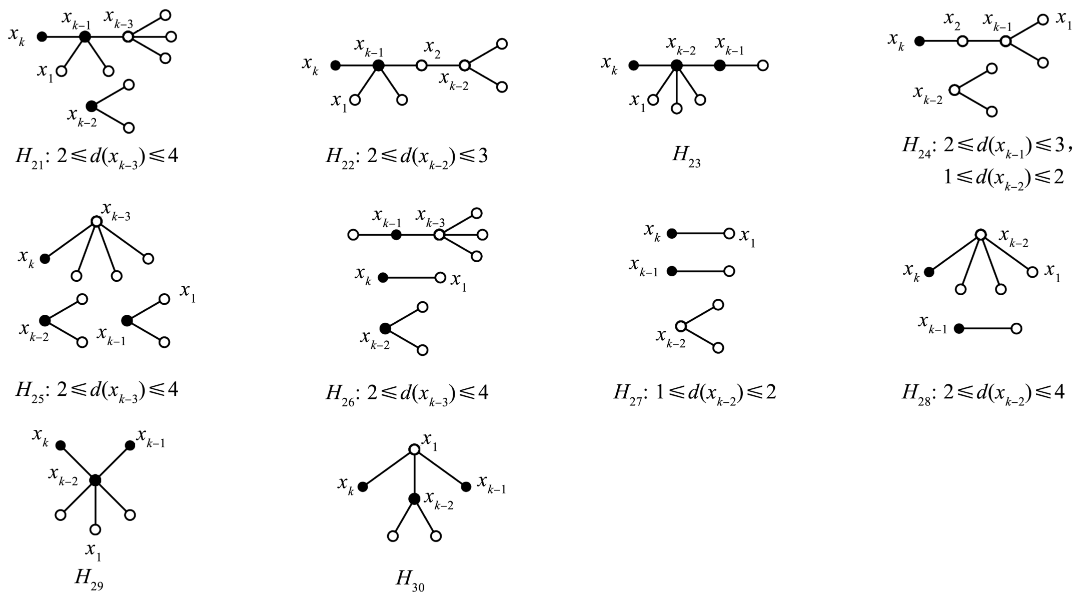


图 1 引理 5 中的子图形 H_1、H_2、…、H_{30}

Fig.1 Subgraph H_1, H_2, …, H_{30} in Principle 5

注 子图形不同于子图,而是指图 G 至少包含如上 H_1—H_{30} 中的结构之一。图 1 的每个子图形都满足:(1) 实心点的度数如图所示;(2) 空心点的度数除特别说明外可属于区间 $[d,\Delta]$ 中的任何整数,其中 d 为空心点的度数;(3) 标号为 x_k、x_{k-1}、x_{k-2} 的点不会相互重合。

证明 采用反证法,假设引理 5 不成立。令 G 是一个反例图,即 G 是 $\mathrm{mad}(G)\leqslant\frac{13}{4}$, $|V(G)|\geqslant 7$, $\Delta\geqslant 6$ 的连通图,但它不含子图形 H_1、H_2、…、H_{30} 中的任何一个。

运用权转移方法来推出矛盾。首先,在 $V(G)$ 上定义一个初始权函数 w:对 $v\in V(G)$,令 $w(v)=d(v)-\frac{13}{4}$。故

$$\sum_{v\in V(G)} w(v)=\sum_{v\in V(G)}\left(d(v)-\frac{13}{4}\right)=|V(G)|\cdot\left(\mathrm{mad}(G)-\frac{13}{4}\right)\leqslant|V(G)|\cdot\left(\mathrm{mad}(G)-\frac{13}{4}\right)\leqslant 0。$$

由引理 3 可知,$\delta(G)\leqslant 3$。根据 $\delta(G)$ 的值,可将证明分为以下几种情况。

情况 1 $\delta(G)=3$。

定义如下的权转移规则:

R1 每个 4-点给相邻的 3-点转 $\frac{1}{8}$;每个 5^+-点给相邻的 3-点转 $\frac{1}{4}$。

利用断言 1.1 证明 $\sum_{v\in V(G)} w'(v)>0$。

断言 1.1 设 $v\in V(G)$,则:

(1) 若 $d(v)=3$,则 $w'(v)\geqslant 0$。

(2) 若 $d(v)=4$,则 $w'(v)\geqslant\frac{1}{4}$。

(3) 若 $d(v)=k\geqslant 5$,则 $w'(v)\geqslant\frac{3}{4}k-\frac{13}{4}$。

证明 假设 $d(v)=3$,则 $w(v)=-\frac{1}{4}$。由 G 不含 H_1 知,v 至少与 1 个 5^+-点邻,或者 v 至少与 2 个 4-点邻,因此,由 R1 可得,$w'(v)\geqslant-\frac{1}{4}+\min\left\{\frac{1}{4},\ 2\times\frac{1}{8}\right\}=0$。

假设 $d(v)=4$,则 $w(v)=\frac{3}{4}$。由 R1 可得,$w'(v)\geqslant\frac{3}{4}-4\times\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$。

假设 $d(v)=k\geqslant 5$,则 $w(v)=k-\frac{13}{4}$。由 R1 可得,$w'(v)\geqslant k-\frac{13}{4}-\frac{1}{4}k=\frac{3}{4}k-\frac{13}{4}$。

由 $\Delta\geqslant 6$ 知,$n_{6^+}(G)\geqslant 1$,故由断言 1.1 知,$0\geqslant\sum_{v\in V(G)}w(v)=\sum_{v\in V(G)}w'(v)>0$,矛盾,因此,反例不存在,即引理 5 成立。

情况 2　$\delta(G)=2$ 且 $n_2(G)=1$。

与情况 1 定义相同的权转移规则。

设 $v\in V(G)$,若 $d(v)=2$,则 $w'(v)=w(v)=-\frac{5}{4}$。若 $d(v)=k\geqslant 3$,则由断言 1.1 可知:当 $k=3$ 时,$w'(v)\geqslant 0$;当 $k=4$ 时,$w'(v)\geqslant\frac{1}{4}$;当 $k\geqslant 5$ 时,$w'(v)\geqslant\frac{3}{4}k-\frac{13}{4}$,故

$$0\geqslant\sum_{v\in V(G)}w(v)=\sum_{v\in V(G)}w'(v)\geqslant-\frac{5}{4}+\frac{1}{4}n_4(G)+\frac{1}{2}n_5(G)+\frac{5}{4}n_6(G)+2n_7(G)+\cdots,\tag{1}$$

因此 $n_{7^+}(G)=0$。由 $\Delta\geqslant 6$ 知,$n_6(G)=1$,故由式(1)知;$n_5(G)=n_4(G)=0$。又因为 $|V(G)|\geqslant 7$,所以 $n_3(G)=|V(G)|-2\geqslant 5$,因此 G 中的 2-点 u 必与 3-点 v 邻。若边 uv 含在 3-圈中,则 G 含子图形 H_2,矛盾。若边 uv 不在 3-圈中,则 G 含子图形 H_3,矛盾,因此,反例不存在,即引理 5 成立。

情况 3　$\delta(G)=2$ 且 $n_2(G)=2$。

定义如下的权转移规则:

R1　每个 4-点给相邻的 3^--点转$\frac{1}{8}$,每个 5^+-点给相邻的 3^--点转$\frac{1}{4}$。

设 u_1、u_2 为图 G 的 2 个 2-点,则 $w(u_1)=w(u_2)=-\frac{5}{4}$。与断言 1.1 类似可证:当 $d(v)=3$ 时,$w'(v)\geqslant 0$;当 $d(v)=4$时,$w'(v)\geqslant\frac{1}{4}$;当 $d(v)=k\geqslant 5$ 时,$w'(v)\geqslant\frac{3}{4}k-\frac{13}{4}$。

情况 3.1　$u_1u_2\in E(G)$且边 u_1u_2 在 3-圈 u_1u_2w 中。

由 G 不含 H_4 知,$d(w)\geqslant 5$,由 R1 知,$w'(u_i)=-\frac{5}{4}+\frac{1}{4}=-1$, $i=1,2$。由 G 不含 H_5 知,w 除 u_1 和 u_2 外的其余邻点均为 5^+-点,故 $n_{5^+}(G)\geqslant d(w)-1\geqslant 4$。又由 $\Delta\geqslant 6$ 知,$n_{6^+}(G)\geqslant 1$。于是有下述矛盾:

$$\begin{aligned}0\geqslant\sum_{v\in V(G)}w(v)=\sum_{v\in V(G)}w'(v)&\geqslant-1+(-1)+\frac{1}{4}n_4(G)+\frac{1}{2}n_5(G)+\frac{5}{4}n_6(G)+\cdots\\&\geqslant-2+\frac{1}{2}\times 3+\frac{5}{4}\times 1=\frac{3}{4}>0。\end{aligned}$$

情况 3.2　$u_1u_2\in E(G)$但边 u_1u_2 不在 3-圈中。

令 v_i 是 u_i 的不同于 u_{3-i}的邻点,$i=1,2$。由 G 不含 H_6 知,$\max\{d(v_1),d(v_2)\}\geqslant 5$。不妨设 $d(v_1)\geqslant 5$。由 R1 可得,$w'(u_1)=-\frac{5}{4}+\frac{1}{4}=-1$, $w'(u_2)\geqslant-\frac{5}{4}$。由 G 不含 H_5 知,v_1 除 u_1 外的其余邻点均为 5^+-点,故 $n_{5^+}(G)\geqslant d(v_1)\geqslant 5$。又由 $\Delta\geqslant 6$ 知,$n_{6^+}(G)\geqslant 1$。于是有下述矛盾:

$$\begin{aligned}0\geqslant\sum_{v\in V(G)}w(v)=\sum_{v\in V(G)}w'(v)&\geqslant-1+\left(-\frac{5}{4}\right)+\frac{1}{4}n_4(G)+\frac{1}{2}n_5(G)+\frac{5}{4}n_6(G)+\cdots\\&\geqslant\left(-\frac{9}{4}\right)+\frac{1}{2}\times 4+\frac{5}{4}=1>0。\end{aligned}$$

情况 3.3　$u_1u_2\notin E(G)$且 $N_G(u_1)\cap N_G(u_2)=\{u\}$。

由 G 不含 H_4 知,$d(u)\geqslant 5$。由 R1 可得,$w'(u_i)\geqslant-\frac{5}{4}+\frac{1}{4}=-1$, $i=1,2$。由 G 不含 H_7 知,u 除 u_1 和 u_2 外的其余邻点均为 4^+-点。故 $n_{4^+}(G)\geqslant d(u)-1$。又由 $\Delta\geqslant 6$ 知,$n_{6^+}(G)\geqslant 1$。于是有

$$0\geqslant\sum_{v\in V(G)}w(v)=\sum_{v\in V(G)}w'(v)\geqslant-1+(-1)+\frac{1}{4}n_4(G)+\frac{1}{2}n_5(G)+\frac{5}{4}n_6(G)+\cdots\tag{2}$$

当 $d(u)\geqslant 6$ 时,有 $n_{4^+}(G)\geqslant 5$。由(2)知,$0\geqslant \sum\limits_{v\in V(G)} w'(v)\geqslant -2+\frac{1}{4}\times 4+\frac{5}{4}=\frac{1}{4}>0$,矛盾。当 $d(u)=5$ 时,有 $n_{4^+}(G)\geqslant 4$。由(2)知,$0\geqslant \sum\limits_{v\in V(G)} w'(v)\geqslant -2+\frac{1}{4}\times 2+\frac{1}{2}+\frac{5}{4}=\frac{1}{4}>0$,矛盾。

情况 3.4 $u_1u_2\notin E(G)$ 且 $N_G(u_1)\cap N_G(u_2)=\varnothing$。

假设 u_1 和 u_2 至少有一个点与3-点邻,不妨设 u_1 与3-点邻。由 G 不含 H_8 知,u_1 的另一个邻点是 5^+-点。由 R1 可得,$w'(u_1)=-\frac{5}{4}+\frac{1}{4}=-1$。由 G 不含 H_9 知,u_2 的 2 个邻点均为 5^+-点,故 $n_{5^+}(G)\geqslant 3$。由 R1 可得,$w'(u_2)=-\frac{5}{4}+2\times\frac{1}{4}=-\frac{3}{4}$。又由 $\Delta\geqslant 6$ 知,$n_{6^+}(G)\geqslant 1$。于是有下述矛盾:

$$0\geqslant \sum_{v\in V(G)} w(v)=\sum_{v\in V(G)} w'(v)\geqslant -1+\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{4}n_4(G)+\frac{1}{2}n_5(G)+\frac{5}{4}n_6(G)+\cdots$$
$$\geqslant -\frac{7}{4}+\frac{1}{2}\times 2+\frac{5}{4}=\frac{1}{2}>0。$$

假设 u_i 的邻点均为 4^+-点,$i=1,2$,故 $n_{4^+}(G)\geqslant 4$。由 G 不含 H_{10} 知,u_1 和 u_2 至多同时邻 2 个 4-点,则 $n_{5^+}(G)\geqslant 2$。由 R1 可得,$w'(u_1)+w'(u_2)\geqslant\left(-\frac{5}{4}\right)\times 2+2\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{8}=-\frac{7}{4}$。又由 $\Delta\geqslant 6$ 知,$n_{6^+}(G)\geqslant 1$。于是有下述矛盾:

$$0\geqslant \sum_{v\in V(G)} w(v)=\sum_{v\in V(G)} w'(v)\geqslant -\frac{7}{4}+\frac{1}{4}n_4(G)+\frac{1}{2}n_5(G)+\frac{5}{4}n_6(G)+\cdots$$
$$\geqslant -\frac{7}{4}+\frac{1}{4}\times 2+\frac{1}{2}+\frac{5}{4}=\frac{1}{2}>0。$$

综上所得,反例不存在,即引理 5 成立。

情况 4 $\delta(G)=2$ 且 $n_2(G)\geqslant 3$。

定义如下的权转移规则:

R1 每个 4-点给相邻的 2-点转$\frac{5}{8}$,每个 5^+-点给相邻的 2-点转$\frac{5}{4}$。

R2 每个 4-点给相邻的 3-点转$\frac{1}{8}$,每个 5^+-点给相邻的 3-点转$\frac{1}{4}$。

由 G 不含子图形 H_{11} 知,断言 4.1 成立。

断言 4.1 2-点不与 2-点邻。

断言 4.2 4^+-点 v 至多与 1 个 2-点邻。

证明 对于 4^+-点 v,若 v 邻 2 个 2-点,而 $n_2(G)\geqslant 3$,则 G 含子图形 H_{12},与假设矛盾。

断言 4.3 $\forall v\in V(G)$,有 $w'(v)\geqslant 0$。

证明 假设 $d(v)=2$,则 $w(v)=-\frac{5}{4}$。由断言 4.1 知,v 不与 2-点邻。若 v 与 5^+-点邻,则由 R1 知,$w'(v)\geqslant -\frac{5}{4}+\frac{5}{4}=0$。下设 v 不与 5^+-点邻,由 G 不含 H_8 知,v 的 2 个邻点皆为 4-点。由 R1 知,$w'(v)=-\frac{5}{4}+2\times\frac{5}{8}=0$。

假设 $d(v)=3$,则 $w(v)=-\frac{1}{4}$。由 G 不含 H_1 知,v 至少与 1 个 5^+-点邻,或者 v 至少与 2 个 4-点邻,因此,由 R1 可得,$w'(v)\geqslant -\frac{1}{4}+\min\left\{\frac{1}{4},\ 2\times\frac{1}{8}\right\}=0$。设 $d(v)\geqslant 4$,由断言 4.2 知,v 至多与 1 个 2-点邻。若 v 不与 2-点邻,则类似断言 1.1 的证明可得:当 $d(v)=4$ 时,$w'(v)\geqslant\frac{1}{4}$;当 $d(v)=k\geqslant 5$ 时,$w'(v)\geqslant\frac{3}{4}k-\frac{13}{4}>0$。

下面考虑 v 邻 1 个 2-点的情况。

假设 $d(v)=4$,则 $w(v)=\frac{3}{4}$。由 G 不含 H_{13} 知,v 至多与 1 个 3-点邻。由 R1 和 R2 可得,$w'(v)\geqslant\frac{3}{4}-\frac{5}{8}-\frac{1}{8}=0$。

假设 $d(v)=5$,则 $w(v)=\frac{7}{4}$。由 G 不含 H_{14} 知,v 至多与 2 个 3-点邻。由 R1 和 R2 可得,$w'(v)\geqslant\frac{7}{4}-\frac{5}{4}-2\times\frac{1}{4}=0$。

假设 $d(v)=k\geqslant 6$,则 $w(v)=k-\frac{13}{4}$。由 R1 和 R2 可得,$w'(v)\geqslant k-\frac{13}{4}-\frac{5}{4}-\frac{1}{4}(k-1)=\frac{3}{4}k-\frac{17}{4}\geqslant\frac{3}{4}\times 6-\frac{17}{4}=\frac{1}{4}$。

由 $\Delta\geqslant 6$ 知,$n_{6^+}(G)\geqslant 1$,因此,$\sum\limits_{v\in V(G)}w'(v)>0$,从而 $0\geqslant\sum\limits_{v\in V(G)}w(v)=\sum\limits_{v\in V(G)}w'(v)>0$,矛盾,因此,反例不存在,即引理 5 成立。

情况 5　$\delta(G)=1$, $n_1(G)=1$ 且 $0\leqslant n_2(G)\leqslant 1$。

设 v_0 为图 G 的 1-点,则 $w(v_0)=-\frac{9}{4}$,称与 v_0 相邻的 3^+-点为主点。定义如下的权转移规则:

R1　每个 4-点给相邻的 3-点转$\frac{1}{8}$,每个 5^+-点给相邻的 3-点转$\frac{1}{4}$。

记经过 R1 后主点 w 的权为 $\beta(w)$。

R2　主点 w 将多余的权 $\beta(w)$ 转给 v_0。

情况 5.1　$n_2(G)=0$,则 v_0 的邻点 u 为主点。设 $v\in V(G)-\{v_0,u\}$,由断言 1.1 可知:当 $d(v)=3$ 时,$w'(v)\geqslant 0$;当 $d(v)=4$ 时,$w'(v)\geqslant\frac{1}{4}$;当 $d(v)=k\geqslant 5$ 时,$w'(v)\geqslant\frac{3}{4}k-\frac{13}{4}$。

假设 $d(u)=3$,则 $w(u)=-\frac{1}{4}$。令 u_1 和 u_2 是 u 的不同于 v_0 的邻点,由 G 不含 H_{15} 知,$d(u_i)\geqslant 5$, $i=1,2$。由 R1 可得,$\beta(u)=-\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$。由 R2 可得,$w'(v_0)=-\frac{9}{4}+\beta(u)=-\frac{9}{4}+\frac{1}{4}=-2$ 且 $w'(u)=0$。由 G 不含 H_{16} 知,u_i 除 u 外的其余邻点皆为 4^+-点,$i=1,2$。故 $n_{4^+}(G)\geqslant 5$。由 $\Delta\geqslant 6$ 知,$n_{6^+}(G)\geqslant 1$。于是有下述矛盾:

$$\begin{aligned}0\geqslant\sum_{v\in V(G)}w(v)=\sum_{v\in V(G)}w'(v)&\geqslant -2+\frac{1}{4}n_4(G)+\frac{1}{2}n_5(G)+\frac{5}{4}n_6(G)+\cdots\\&\geqslant -2+\frac{1}{4}\times 4+\frac{5}{4}=\frac{1}{4}>0。\end{aligned}$$

假设 $d(u)=4$,则 $w(u)=\frac{3}{4}$。由 G 不含 H_{17} 知,u 除 v_0 外的其余邻点皆为 4^+-点,故 $n_{4^+}(G)\geqslant 4$。此时,$\beta(u)=w(u)=\frac{3}{4}$。由 R2 可得,$w'(v_0)=-\frac{9}{4}+\beta(u)=-\frac{9}{4}+\frac{3}{4}=-\frac{3}{2}$且 $w'(u)=0$。又由 $\Delta\geqslant 6$ 可知,$n_{6^+}(G)\geqslant 1$。于是有下述矛盾:

$$\begin{aligned}0\geqslant\sum_{v\in V(G)}w(v)=\sum_{v\in V(G)}w'(v)&\geqslant -\frac{3}{2}+\frac{1}{4}(n_4(G)-1)+\frac{1}{2}n_5(G)+\frac{5}{4}n_6(G)+\cdots\\&\geqslant -\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\times 2+\frac{5}{4}=\frac{1}{4}>0。\end{aligned}$$

假设 $d(u)=5$,则 $w(u)=\frac{7}{4}$。由 G 不含 H_{18}可知,u 至少与 3 个 4^+-点邻,故 $n_{4^+}(G)\geqslant 4$。由 R1 可得,

$\beta(u)\geqslant w(u)-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}-\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$。由 R2 可得,$w'(v_0)=-\frac{9}{4}+\beta(u)\geqslant-\frac{9}{4}+\frac{3}{2}=-\frac{3}{4}$且 $w'(u)=0$。又由 $\Delta\geqslant6$ 可知,$n_{6^+}(G)\geqslant1$。于是有下述矛盾:

$$0\geqslant\sum_{v\in V(G)}w(v)=\sum_{v\in V(G)}w'(v)\geqslant-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}n_4(G)+\frac{1}{2}(n_5(G)-1)+\frac{5}{4}n_6(G)+\cdots$$
$$\geqslant-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times2+\frac{5}{4}=1>0。$$

假设 $d(u)\geqslant6$,则 $w(u)=d(u)-\frac{13}{4}$。由 G 不含 H_{18} 知,u 至多与 1 个 3-点邻,故 $n_{4^+}(G)\geqslant d(u)-1$。由 R1 可得,$\beta(u)\geqslant w(u)-\frac{1}{4}=d(u)-\frac{14}{4}$。由 R2 可得,$w'(v_0)=-\frac{9}{4}+\beta(u)\geqslant-\frac{9}{4}+d(u)-\frac{14}{4}=d(u)-\frac{23}{4}$且 $w'(u)=0$。于是有下述矛盾:

$$0\geqslant\sum_{v\in V(G)}w(v)=\sum_{v\in V(G)}w'(v)\geqslant d(u)-\frac{23}{4}\geqslant6-\frac{23}{4}=\frac{1}{4}>0。$$

情况 5.2 $n_2(G)=1$。

记 v_1 为 G 中的 2-点,则 $w(v_1)=-\frac{5}{4}$,则 v_0 的邻点 u 为 2-点或主点。设 $x\in V(G)-\{v_0,u,v_1\}$,由断言 1.1可知:当 $d(x)=3$ 时,$w'(x)\geqslant0$;当 $d(x)=4$ 时,$w'(x)\geqslant\frac{1}{4}$;当 $d(x)=k\geqslant5$ 时,$w'(x)\geqslant\frac{3}{4}k-\frac{13}{4}$。

假设 $d(u)=2$,则 $w(u)=-\frac{5}{4}$。由 G 不含 H_{19}知,$n_3(G)=0$,则 $n_{4^+}(G)=|V(G)|-2\geqslant5$,故 $\forall v\in V(G)-\{v_0,u\}$, $w'(v)=w(v)=d(v)-\frac{13}{4}$。又由 $\Delta\geqslant6$ 知,$n_{6^+}(G)\geqslant1$。于是有下述矛盾:

$$0\geqslant\sum_{v\in V(G)}w(v)=\sum_{v\in V(G)}w'(v)\geqslant-\frac{9}{4}+\left(-\frac{5}{4}\right)+\frac{3}{4}n_4(G)+\frac{7}{4}n_5(G)+\frac{11}{4}n_6(G)+\cdots$$
$$\geqslant-\frac{14}{4}+\frac{3}{4}\times4+\frac{11}{4}=\frac{9}{4}>0。$$

假设 $d(u)\geqslant3$,则 u 为主点。由 G 不含 H_{20}知,$d(u)\geqslant4$。

当 $d(u)=4$ 时,有 $w(u)=\frac{3}{4}$。记 u_1、u_2、u_3 为 u 除 v_0 外的其余邻点,由 G 不含 H_{21}知,$d(u_i)\geqslant5$, $i\in\{1,2,3\}$,故 $n_{5^+}(G)\geqslant3$,因此,$\beta(u)=w(u)=\frac{3}{4}$。由 R2 可得,$w'(v_0)=-\frac{9}{4}+\beta(u)=-\frac{9}{4}+\frac{3}{4}=-\frac{3}{2}$且$w'(u)=0$。由 G 不含 H_{22}知,u_i 的邻点均为 4^+-点,故 $w'(u_i)=w(u_i)=d(u_i)-\frac{13}{4}\geqslant5-\frac{13}{4}=\frac{7}{4}$, $i\in\{1,2,3\}$。于是有下述矛盾:

$$0\geqslant\sum_{v\in V(G)}w(v)=\sum_{v\in V(G)}w'(v)\geqslant-\frac{3}{2}+\left(-\frac{5}{4}\right)+\frac{7}{4}\times3=\frac{5}{2}>0。$$

当 $d(u)=5$ 时,有 $w(u)=\frac{7}{4}$。记 u_1、u_2、u_3、u_4 为 u 除 v_0 外的其余邻点。由 G 不含 H_{23}和 H_{24}知,$d(u_i)\geqslant4$, $i\in\{1,2,3,4\}$,故 $n_{4^+}(G)\geqslant5$,因此,$\beta(u)=w(u)=\frac{7}{4}$。由 R2 可得,$w'(v_0)=-\frac{9}{4}+\beta(u)=-\frac{9}{4}+\frac{7}{4}=-\frac{1}{2}$且 $w'(u)=0$。又由 $\Delta\geqslant6$ 知,$n_{6^+}(G)\geqslant1$。于是有下述矛盾:

$$0\geqslant\sum_{v\in V(G)}w(v)=\sum_{v\in V(G)}w'(v)\geqslant-\frac{1}{2}+\left(-\frac{5}{4}\right)+\frac{1}{4}n_4(G)+\frac{1}{2}(n_5(G)-1)+\frac{5}{4}n_6(G)+\cdots$$
$$\geqslant-\frac{7}{4}+\frac{1}{4}\times3+\frac{5}{4}=\frac{1}{4}>0。$$

当 $d(u)=k\geqslant 6$ 时,有 $w(u)=k-\frac{13}{4}$。由 G 不含 H_{24} 知,u 不与 3-点邻,故 $n_{4^+}(G)\geqslant k-1$,因此,$\beta(u)=w(u)=k-\frac{13}{4}$。由 R2 可得,$w'(v_0)=-\frac{9}{4}+\beta(u)=-\frac{9}{4}+k-\frac{13}{4}=k-\frac{22}{4}$且 $w'(u)=0$。于是有下述矛盾:

$$0\geqslant\sum_{v\in V(G)}w(v)=\sum_{v\in V(G)}w'(v)\geqslant k-\frac{22}{4}+\left(-\frac{5}{4}\right)+\frac{1}{4}(k-2)$$
$$\geqslant 6-\frac{22}{4}+\left(-\frac{5}{4}\right)+\frac{1}{4}\times 4=\frac{1}{4}>0。$$

综上所得,反例不存在,即引理 5 成立。

情况 6 $\delta(G)=1$, $n_1(G)=1$ 且 $n_2(G)\geqslant 2$。

定义如下的权转移规则:

R1 每个 5^+-点给相邻的 1-点转 1。

R2 每个 5^+-点给相邻的 2-点转$\frac{5}{8}$。

R3 每个 4-点给相邻的 3-点转$\frac{1}{8}$,每个 5^+-点给相邻的 3-点转$\frac{1}{4}$。

令 $V_1=\{v_0\}$ 且 $V_2=V(G)-V_1$,其中 v_0 是 G 的 1-点,由 G 不含 H_{19}和 H_{25}可知,v_0 的邻点是 5^+-点。由 R1 可得,$w'(v_0)=w(v_0)+1=w(v_0)+d_{V_2}(v_0)$。我们将在断言 6.1 中证明 $\sum_{v\in V_2}w'(v)>0$,从而由引理 4 知,$\mathrm{mad}(G)>\frac{13}{4}$,矛盾,因此,引理 5 成立。

断言 6.1 $\sum_{v\in V_2}w'(v)>0$。

证明 假设 $d(v)=2$,则 $w(v)=-\frac{5}{4}$。由 G 不含 H_{26} 知,v 不与 4^--点邻。由 R2 可得,$w'(v)=-\frac{5}{4}+2\times\frac{5}{8}=0$。

当 $d(v)=3$ 或 $d(v)=4$ 时,与断言 1.1 类似可证 $w'(v)\geqslant 0$。假设 $d(v)=k\geqslant 5$,由 G 不含 H_{12}及 H_{24}知,v 至多与 1 个 2^--点邻。当 v 不与 2^--点邻时,与断言 1.1 类似可证 $w'(v)\geqslant\frac{3}{4}k-\frac{13}{4}>0$。下设 v 与 1 个 2^--点邻,若 v 与 1-点邻,由 G 不含 H_{24}知,v 的其他邻点均为 4^+-点。由 R1 可得,$w'(v)=k-\frac{13}{4}-1=k-\frac{17}{4}\geqslant 5-\frac{17}{4}=\frac{3}{4}$。若 v 与 1 个 2-点邻,则由 R2 和 R3 可得,有 $w'(v)\geqslant k-\frac{13}{4}-\frac{5}{8}-\frac{1}{4}(k-1)=\frac{3}{4}k-\frac{29}{8}\geqslant\frac{3}{4}\times 5-\frac{29}{8}=\frac{1}{8}$。

又由 $\Delta\geqslant 6$ 知,$n_{6^+}(G)\geqslant 1$,因此,$\sum_{v\in V_2}w'(v)>0$。

情况 7 $\delta(G)=1$ 且 $n_1(G)\geqslant 2$。

由 G 不含 H_{27}知,$n_1(G)=2$ 且 $n_2(G)=0$。定义如下的权转移规则:

R1 每个 5^+-点给相邻的 1-点转 1。

R2 每个 4-点给相邻的 3-点转$\frac{1}{8}$,每个 5^+-点给相邻的 3-点转$\frac{1}{4}$。

令 V_1 是 1-点组成的集合,$V_2=V(G)-V_1$ 是 3^+-点组成的集合。令 $v\in V_1$,由 G 连通且 G 不含 H_{28}知,v 的邻点都是 5^+-点。由 R1 可得,$w'(v)=w(v)+1=w(v)+d_{V_2}(v)$,因此,$\sum_{v\in V_1}w'(v)\geqslant\sum_{v\in V_1}(w(v)+d_{V_2}(v))$。此外,本文将在断言 7.1 中证明 $\sum_{v\in V_2}w'(v)>0$,从而由引理 4 知,$\mathrm{mad}(G)>\frac{13}{4}$,矛盾,因此,引理 5 成立。

断言 7.1 $\sum_{v\in V_2}w'(v)>0$。

证明 当 $d(v)=3$ 或 $d(v)=4$ 时，与断言 1.1 类似可证 $w'(v)\geqslant 0$。假设 $d(v)=k\geqslant 5$，当 v 不与 1-点邻时，类似断言 1.1 可证 $w'(v)\geqslant \frac{3}{4}k-\frac{13}{4}>0$。下设 v 与 1-点邻，若 v 与 1 个 1-点邻，由 G 不含 H_{24} 知，v 的其他邻点均为 4^+-点。由 R1 可得，$w'(v)=k-\frac{13}{4}-1=k-\frac{17}{4}\geqslant 5-\frac{17}{4}=\frac{3}{4}$。若 v 与 2 个 1-点邻，由 G 不含 H_{29} 知，$d(v)\neq 5$，则 $d(v)\geqslant 6$。由 G 不含 H_{30} 知，v 不与 3-点邻。由 R1 可得，$w'(v)=k-\frac{13}{4}-2\times 1=k-\frac{21}{4}\geqslant 6-\frac{21}{4}=\frac{3}{4}$。又由 $\Delta\geqslant 6$ 知，$n_{6^+}(G)\geqslant 1$，因此，$\sum_{v\in V_2} w'(v)>0$。

3 主要定理的证明

定理 1 若图 G 满足 $\mathrm{mad}(G)\leqslant \frac{13}{4}$，则当 $k\geqslant \max\{\Delta,6\}$ 时，图 G 是均匀 k-可染的。

证明 采用反证法，假设 G 是点数最少的反例图。若 G 的每个连通分支至多 6 个点，则 $\Delta\leqslant 5$。对任意 $k\geqslant \max\{\Delta,6\}=6\geqslant \Delta+1$，由引理 2 知，图 G 是均匀 k-可染的。若 G 有一个连通分支至少 7 个点，当 $\Delta\leqslant 5$ 时，同上讨论可得图 G 是均匀 k-可染的。考虑 $\Delta\geqslant 6$。由引理 5 知，图 G 至少包含 H_1、H_2、…、H_{30} 中的一个子图形。下面寻找有 k 个顶点的子集 S。首先，按如下方式定义 S'。

若 G 包含子图形 H_i，$i\in\{10,14\}$，令 $S'=\{x_k,x_{k-1},x_{k-2},x_{k-3},x_{k-4},x_1\}$；

若 G 包含子图形 H_i，$i\in\{1,6,8,9,13,21,25,26\}$，令 $S'=\{x_k,x_{k-1},x_{k-2},x_{k-3},x_1\}$；

若 G 包含子图形 H_i，$i\in\{2,3,5,7,12,18,22,24\}$，令 $S'=\{x_k,x_{k-1},x_{k-2},x_2,x_1\}$；

若 G 包含子图形 H_i，$i\in\{4,11,15,16,17,19,20,23,27,28,29,30\}$，令 $S'=\{x_k,x_{k-1},x_{k-2},x_1\}$。

接着，从 S' 出发构造集合 S。由引理 3 知，G 是 3-退化的，所以 $G-S'$ 也是 3-退化的。在 $G-S'$ 中取最小度点，然后在所得的子图中再取最小度点，这样重复取点，可以得到集合 $S=\{x_k,x_{k-1},x_{k-2},\cdots,x_2,x_1\}$。

容易验证，对 $\forall x_i\in S$，$1\leqslant i\leqslant k$ 有 $|N_G(x_i)-S|\leqslant k-i$。

令 $H=G-S\subseteq G$，$V(H)\subseteq V(G)$，则 $\Delta(H)\leqslant\Delta$。若 $\Delta(H)<\Delta$，则 $k\geqslant\max\{\Delta,6\}\geqslant\Delta\geqslant\Delta(H)+1$。由引理 2 知，$H$ 是均匀 k-可染的。若 $\Delta(H)=\Delta$，由 G 的极小性知，H 是均匀 k-可染的。由引理 1 可知，G 是均匀 k-可染的。

推论 1 若图 G 满足 $\mathrm{mad}(G)\leqslant\frac{13}{4}$，当 $\Delta\geqslant 6$ 时，图 G 是均匀 Δ-可染的。

参考文献：

[1] MEYER W. Equitable coloring[J]. The American Mathematical Monthly, 1973, 80(8):920-922.
[2] ERDÖS P. Theory of graphs and its applications[M]. Prague: Czechoslovak Academy of Sciences, 1964:159.
[3] HAJNAL A, SZEMERÉDI E. Proof of a conjecture of P. Erdös[J]. Combinatorial Theory and Its Applications, 1969:601-623.
[4] KIERSTEAD H A, KOSTOCHKA A V, MYDLARZ M, et al. A fast algorithm for equitable coloring[J]. Combinatorica, 2010, 30(2):217-224.
[5] CHEN B L, LIH K W, WU P L. Equitable coloring and the maximum degree[J]. European Journal of Combinatorics, 1994, 15(5):443-447.
[6] KIERSTEAD H A, KOSTOCHKA A V. Every 4-colorable graph with maximum degree 4 has an equitable 4-coloring[J]. Journal of Graph Theory, 2012, 71(1):31-48.
[7] CHEN B L, LIH K W. Equitable coloring of trees[J]. Journal of Combinatorial Theory Series B, 1994, 61(1):83-87.
[8] LIH K W, WU P L. On equitable coloring of bipartite graphs[J]. Discrete Mathematics, 1996, 151(1/2/3):155-160.
[9] WANG Weifan. Equitable colorings of line graphs and complete *r*-partite graphs[J]. Systems Science and Mathematical Sciences, 2000, 13(2):190-194.

（下转第 62 页）