山东大学学报(理学版)2025年2月 第60卷 第2期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.60, No.2, 2025

E-mail:xblxb@sdu.edu.cn
http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn
Tel:+86-531-88366917

文章编号:1671-9352(2025)02-0063-09　　DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.278

具黏弹性项的双曲方程解的存在性与衰减估计

范鑫宇,高艳超*
(长春理工大学数学与统计学院, 吉林 长春 130013)

摘要:研究了一类具黏弹性项的四阶双曲方程的初边值问题。利用 Galerkin 方法得到了弱解的局部存在性,利用位势井方法证明了弱解的整体存在性,并给出了整体解的衰减估计。
关键词:黏弹性项;位势井;四阶双曲方程;衰减估计
中图分类号:O175.27　　**文献标志码**:A
引用格式:范鑫宇,高艳超.具黏弹性项的双曲方程解的存在性与衰减估计[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(2):63-71,84.

Existence and decay estimation of solution for hyperbolic equation with viscoelastic term

FAN Xinyu, GAO Yanchao*
(School of Mathematics and Statistics, Changchun University of Science and Technology, Changchun 130013, Jilin, China)

Abstract: The initial boundary value problem of a class of fourth order hyperbolic equation with viscoelastic term is studied. The local existence of the weak solution is obtained by using Galerkin method. Then the global existence of the weak solution is proved using the potential well method, and the decay estimate of the global solution is given.
Key words: viscoelastic term; potential well; hyperbolic equation of fourth order; decay estimate

0 引言

研究如下一类具黏弹性项的四阶双曲方程的初边值问题:

$$\begin{cases} u_{tt}+\Delta^2 u+u_t-\int_0^t g(t-s)\Delta^2 u(s)\mathrm{d}s=u\ln|u|, & (x,t)\in\Omega\times(0,T), \\ u(x,t)=0,\ \Delta u(x,t)=0, & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T), \\ u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=u_1(x), & x\in\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

其中,$\Omega\subset\mathbf{R}^n(n\geqslant5)$是具光滑边界$\partial\Omega$的有界区域,$g(t)$为核函数。

众所周知,许多物理现象,如黏弹性力学、量子力学理论等都可以用双曲方程来描述,例如具黏弹性项和对数源的非线性板方程:

$$\begin{cases} u_{tt}+\Delta^2 u+u-\int_0^t g(t-s)\Delta^2 u(s)\mathrm{d}s=ku\ln|u|, & (x,t)\in\Omega\times(0,\infty), \\ u=\dfrac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}}=0, & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,\infty), \\ u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=u_1(x), & x\in\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

收稿日期:2023-06-27; **网络出版时间**:2024-05-09 10:34:20
基金项目:吉林省自然科学基金资助项目(YDZJ202201ZYTS584)
第一作者:范鑫宇(1999—),女,硕士研究生,研究方向为偏微分方程. E-mail:fan_xinyu1007@163.com
* **通信作者**:高艳超(1983—),男,副教授,博士,研究方向为偏微分方程. E-mail:ychaogao@163.com

其中,$\Omega\subset\mathbf{R}^2$ 是具光滑边界的有界区域,$\boldsymbol{\nu}$ 是$\partial\Omega$上的单位外法向量,k 是正常数,$g(t)$是满足适当条件的核函数。文献[1]利用 Galerkin 方法证明了弱解的存在性,并得到了解在适当条件下的衰减估计。此外,文献[2]中给出了问题(2)的一个新的衰减结果。对于如下具黏弹性项的波动方程:

$$\begin{cases} v_{tt}-\Delta v+\int_0^t\psi(t-s)\Delta v(s)\mathrm{d}s+av_t=v\ln|v|^{p(\cdot)}, & x\in\Omega,\ t>0,\\ v(x,t)=0, & x\in\partial\Omega,\ t>0,\\ v(x,0)=v_0(x),\ v_t(x,0)=v_1(x), & x\in\Omega,\end{cases}\tag{3}$$

其中,$\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是具光滑边界的有界区域,$\psi(t)$是满足适当条件的核函数,a 是正常数,$p(\cdot)$满足 $0<p_1<p(x)<p_2\leqslant\dfrac{2n}{n-2}$, $n\geqslant3$。Merzoug 等[3]利用对数 Sobolev 不等式给出了问题(3)解的衰减估计。文献[4]研究了如下具强阻尼和黏弹性项的非线性波动方程:

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u+\int_0^t g(t-s)\Delta u(s)\mathrm{d}s-\Delta u_t+u_t=u|u|^{p-2}, & (x,t)\in\Omega\times(0,\infty),\\ u(x,t)=0, & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,\infty),\\ u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=u_1(x), & x\in\Omega,\end{cases}$$

其中,$\Omega\subset\mathbf{R}^n(n\geqslant1)$是具光滑边界的有界区域,$g(t)$是满足适当条件的核函数。文献[4]中证明了弱解的局部存在性和全局存在性,建立了解在适当条件下的衰减估计,给出了解在负初始能量和正初始能量时有限时间爆破的结果。更多的相关研究工作参见文献[5-7]。

不同于文献[1],本文用弱阻尼项替代了问题(2)中的质量项,问题(1)在四阶双曲方程中同时引入了弱阻尼项、黏弹性项及对数项,考虑问题(1)解的性质发生怎样的变化。

1 准备工作

令 $1\leqslant p\leqslant\infty$,对任意 $u\in L^p(\Omega)$, $\|u\|_p$ 表示 u 的 $L^p(\Omega)$范数,以$(\cdot,\cdot)$表示 $L^2(\Omega)$空间的内积,本文涉及的空间均为标准的 Sobolev 空间。

对于问题(1),引入如下假设:

(H_1) $g:[0,\infty)\to[0,\infty)$是一个非增可微的函数,且满足

$$g(0)>0,\quad 1-\int_0^\infty g(s)\mathrm{d}s:=l>0。$$

(H_2) 存在一个非增可微函数 $\xi:[0,\infty)\to[0,\infty)$,使得

$$g'(t)\leqslant-\xi(t)g(t),\quad \forall t>0$$

成立。为了方便讨论问题,定义

$$\begin{aligned}E(t)=&\frac{1}{2}\|u_t\|_2^2+\frac{1}{2}\left(1-\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right)\|\Delta u\|_2^2\\ &-\frac{1}{2}\int_\Omega|u|^2\ln|u|\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\|u\|_2^2+\frac{1}{2}(g\circ\Delta u)(t),\end{aligned}$$

其中$(g\circ\Delta u)(t)=\int_0^t g(t-s)\|\Delta u(x,s)-\Delta u(x,t)\|_2^2\mathrm{d}s$。

$$J(u)=\frac{1}{2}\left(1-\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right)\|\Delta u\|_2^2-\frac{1}{2}\int_\Omega|u|^2\ln|u|\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\|u\|_2^2+\frac{1}{2}(g\circ\Delta u)(t),$$

$$I(u)=\left(1-\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right)\|\Delta u\|_2^2-\int_\Omega|u|^2\ln|u|\mathrm{d}x+(g\circ\Delta u)(t)。$$

由 $E(t)$的定义,可知

$$E'(t)=\frac{1}{2}(g'\circ\Delta u)(t)-\frac{1}{2}g(t)\|\Delta u\|_2^2-\|u_t\|_2^2\leqslant0,\tag{4}$$

由 $J(u)$和 $I(u)$的定义,可知

$$J(u)=\frac{1}{2}I(u)+\frac{1}{4}\|u\|_2^2。\tag{5}$$

定义 Nehari 流形

$$N=\{u\in H_0^2(\Omega)\setminus\{0\}\mid I(u)=0\}。$$

定义集合

$$W=\{u\in H_0^2(\Omega)\setminus\{0\}\mid I(u)>0\}。$$

定义井深

$$d=\inf_{u\in N}J(u)。$$

下面给出问题(1)弱解的定义。

定义 1 (弱解)　令 $T>0$,称 $u(x,t)$ 是问题(1)的弱解,如果

$$u\in C(0,T;H_0^2(\Omega))\cap C^1(0,T;L^2(\Omega))\cap C^2(0,T;H^{-2}(\Omega)),$$

且对任意 $\omega\in H_0^2(\Omega)$,有

$$\begin{cases}\int_\Omega u_{tt}(x,t)\omega(x)\,\mathrm{d}x+\int_\Omega\Delta u(x,t)\Delta\omega(x)\,\mathrm{d}x+\int_\Omega u_t(x,t)\omega(x)\,\mathrm{d}x\\ -\int_\Omega\Delta\omega(x)\int_0^t g(t-s)\Delta u(s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}x=\int_\Omega u(x,t)\omega(x)\ln|u(x,t)|\,\mathrm{d}x,\\ u(x,0)=u_0(x),\\ u_t(x,0)=u_1(x)。\end{cases}$$

当 $T=+\infty$ 时,$u(x,t)$ 是问题(1)在 $\Omega\times[0,T)$ 上的弱解,则称之为问题(1)的整体(弱)解。

下面介绍后续证明中所用到的几个重要的引理。

引理 1　设 $u\in H_0^2(\Omega)\setminus\{0\}$,则下列结论成立:

(1) $\lim\limits_{\lambda\to0^+}J(\lambda u)=0$, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}J(\lambda u)=-\infty$;

(2) 存在唯一的 $\lambda_*>0$ 使得 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}J(\lambda u)|_{\lambda=\lambda_*}=0$;

(3) $J(\lambda u)$ 在 $(0,\lambda_*)$ 时单调递增,在 $(\lambda_*,+\infty)$ 时单调递减,在 λ_* 处取得最大值;

(4) 当 $0<\lambda<\lambda_*$ 时,$I(\lambda u)>0$,当 $\lambda>\lambda_*$ 时 $I(\lambda u)<0$ 且 $I(\lambda_* u)=0$。

证明

$$J(\lambda u)=\frac{1}{2}\lambda^2\left(1-\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s\right)\|\Delta u\|_2^2-\frac{\lambda^2}{2}\ln\lambda\|u\|_2^2-\frac{\lambda^2}{2}\int_\Omega|u|^2\ln|u|\mathrm{d}x+\frac{\lambda^2}{4}\|u\|_2^2+\frac{1}{2}\lambda^2(g\circ\Delta u)(t),$$

由此可见式(1)成立。上式两端对 λ 求导可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}J(\lambda u)&=\lambda\left(1-\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s\right)\|\Delta u\|_2^2-\lambda\ln\lambda\|u\|_2^2-\lambda\int_\Omega|u|^2\ln|u|\mathrm{d}x+\lambda(g\circ\Delta u)(t)\\&=\lambda\left[\left(1-\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s\right)\|\Delta u\|_2^2-\ln\lambda\|u\|_2^2-\int_\Omega|u|^2\ln|u|\mathrm{d}x+(g\circ\Delta u)(t)\right],\end{aligned}$$

意味着 $J'(\lambda^* u)=0$,其中

$$\lambda^*=\exp\left[\frac{\left(1-\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s\right)\|\Delta u\|_2^2-\int_\Omega|u|^2\ln|u|\,\mathrm{d}x+(g\circ\Delta u)(t)}{\|u\|_2^2}\right],$$

因此(2)、(3)成立。

$$\begin{aligned}I(\lambda u)&=\lambda^2\left(1-\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s\right)\|\Delta u\|_2^2-\lambda^2\ln\lambda\|u\|_2^2-\lambda^2\int_\Omega|u|^2\ln|u|\mathrm{d}x+\lambda^2(g\circ\Delta u)(t)\\&=\lambda\left[\lambda\left(1-\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s\right)\|\Delta u\|_2^2-\lambda\ln\lambda\|u\|_2^2-\lambda\int_\Omega|u|^2\ln|u|\mathrm{d}x+\lambda(g\circ\Delta u)(t)\right]\\&=\lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}J(\lambda u),\end{aligned}$$

因此(4)成立。

引理 2[8-9] (对数 Sobolev 不等式) 设 u 是 $H_0^2(\Omega)$ 中一个任意的函数, $a>0$ 是一个任意常数,则有下式成立:

$$\int_\Omega u^2 \ln|u| \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\|u\|_2^2 \ln\|u\|_2^2 + \frac{C_p a^2}{2\pi}\|\Delta u\|_2^2 - (1+\ln a)\|u\|_2^2,$$

其中, C_p 是满足 $\|\nabla u\|_2^2 \leqslant C_p\|\Delta u\|_2^2$, $\forall u \in H_0^2(\Omega)$ 的最小正常数。

引理 3[7] (对数 Gronwall 不等式) 设 $c>0$, $\gamma \in L^1(0,T;\mathbf{R}^+)$, 函数 $\omega:[0,T]\to[1,\infty)$ 满足

$$\omega(t) \leqslant c\left(1+\int_0^t \gamma(s)\omega(s)\ln\omega(s)\mathrm{d}s\right), \quad 0\leqslant t\leqslant T,$$

那么

$$\omega(t) \leqslant c\exp\left(c\int_0^t \gamma(s)\mathrm{d}s\right), \quad 0\leqslant t\leqslant T。$$

引理 4[10] (Aubin-Lions 定理) 设 X、B 和 Y 是 Banach 空间, $X\subset B\subset Y$, $X \hookrightarrow\hookrightarrow B$, 如果 F 在 $L^\infty(0,T;X)$ 有界,且 $\frac{\partial F}{\partial t}$ 在 $L^r(0,T;Y)$ 有界,其中 $r>1$, 那么 F 在 $C(0,T;B)$ 中相对列紧。

引理 5[1] 设 $g(t)$ 满足 (H_1), 则有下式成立:

$$\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)(\Delta u(t)-\Delta u(s))\mathrm{d}s\right)^2 \mathrm{d}x \leqslant (g\circ\Delta u)(t)。$$

引理 6[11] (Peano 定理) 若 $f(x,t)$ 于闭域 $R: |t-\tau|\leqslant a$, $|x-\xi|\leqslant b$ 上连续,则方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = f_1(t,x_1,\cdots,x_n), \\ \qquad\vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} = f_n(t,x_1,\cdots,x_n), \end{cases}$$

在区间 $I_0: |t-\tau|\leqslant h$ 上有解满足初值条件

$$x(\tau) = \boldsymbol{\xi},$$

其中 f_i 是 $t, x_1, \cdots, x_n$ 的已知函数, $i=1,2,\cdots,n$, $\boldsymbol{\xi}$ 是任一给定的 n 维列向量, $h=\min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$, M 是 $|f(t,x)|$ 在 R 上的一个上界。

2 弱解的局部存在性

本章利用 Galerkin 方法证明问题(1)弱解的局部存在性。

定理 1 (局部存在性) 假设(H_1)、(H_2)成立, $u_0 \in H_0^2(\Omega)\setminus\{0\}$, $u_1 \in L^2(\Omega)\setminus\{0\}$, 那么问题(1)有一个弱解 $u(x,t) \in C([0,T], H_0^2(\Omega)) \cap C^1([0,T], L^2(\Omega)) \cap C^2([0,T], H^{-2}(\Omega))$。

证明 利用 Galerkin 逼近结合先验估计来证明弱解的局部存在性。设 $\{\omega_j\}_{j=1}^\infty$ 是 $H_0^2(\Omega)$ 中的正交基,是 $L^2(\Omega)$ 的标准正交基,并定义有限维子空间 $V_m = \mathrm{span}\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m\}$。取 $u_{0m} \in V_m$, $u_{1m} \in V_m$, 使得当 $m\to+\infty$ 时,

$$u_{0m}(x) = \sum_{j=1}^m a_j\omega_j(x) \to u_0 \text{ 在 } H_0^2(\Omega) \text{ 中强收敛},$$

$$u_{1m}(x) = \sum_{j=1}^m b_j\omega_j(x) \to u_1 \text{ 在 } L_0^2(\Omega) \text{ 中强收敛。}$$

构造问题(1)的逼近解

$$u_m(x,t) = \sum_{j=1}^m h_j^m(t)\omega_j(x), \quad m=1,2,\cdots,$$

则 u_m 满足

$$\begin{cases}\int_\Omega u_{mtt}\omega \mathrm{d}x+\int_\Omega \Delta u_m\Delta\omega \mathrm{d}x+\int_\Omega u_{mt}\omega \mathrm{d}x-\int_\Omega \Delta\omega\int_0^t g(t-s)\Delta u_m(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x=\int_\Omega u_m\omega\ln|u_m|\mathrm{d}x,\\ u_m(0)=u_{0m}=\sum_{j=1}^m(u_0,\omega_j)\omega_j,\\ u_{mt}(0)=u_{1m}=\sum_{j=1}^m(u_1,\omega_j)\omega_j,\end{cases}\tag{6}$$

与此同时,逼近解的系数 $h_j^m(t)(1\leqslant j\leqslant m)$满足下列常微分方程组:

$$\begin{cases}h_{jtt}^m(t)+h_{jt}^m(t)=\dfrac{1}{\lambda_j}h_j^m(t)+\int_\Omega \Delta\omega_j\left(\int_0^t g(t-s)\Delta\sum_{j=1}^m h_j^m(t)\omega_j\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x+\int_\Omega\sum_{j=1}^m h_j^m(t)\omega_j\omega_j\ln\left|\sum_{j=1}^m h_j^m(t)\omega_j\right|\mathrm{d}x,\\ h_j^m(0)=h_0,\\ h_{jt}^m(0)=h_1,\end{cases}\tag{7}$$

其中,$\lambda_j>0$ 是下列方程的特征值,

$$\begin{cases}-\Delta u=\lambda u, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega。\end{cases}$$

根据 Peano 定理可知,问题(7)存在局部解。

在式(6)的第一个等式中,令 $\omega=u_{mt}$,可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\|u_{mt}\|_2^2+\left(1-\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right)\|\Delta u_m\|_2^2+(g\circ\Delta u_m)(t)-\int_\Omega|u_m|^2\ln|u_m|\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\|u_m\|_2^2\right]$$
$$=-2\|u_{mt}\|_2^2-g(t)\|\Delta u_m\|_2^2+(g'\circ\Delta u_m)(t),$$

由此,得

$$2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_m(t)=-2\|u_{mt}\|_2^2-g(t)\|\Delta u_m\|_2^2+(g'\circ\Delta u_m)(t)\leqslant 0,$$

即

$$E_m(t)\leqslant E_m(0)。$$

利用对数 Sobolev 不等式,可得

$$\|u_{mt}\|_2^2+\left(1-\int_0^t g(s)\mathrm{d}s-\frac{C_pa^2}{2\pi}\right)\|\Delta u_m\|_2^2+\left(\frac{3}{2}+\ln a\right)\|u_m\|_2^2+(g\circ\Delta u_m)(t)$$
$$\leqslant C+\frac{1}{2}\|u_m\|_2^2\ln\|u_m\|_2^2,$$

取 $\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}<a<\sqrt{\dfrac{2\pi l}{C_p}}$,使得 $1-\int_0^t g(s)\mathrm{d}s-\dfrac{C_pa^2}{2\pi}>0$, $\dfrac{3}{2}+\ln a>0$,则

$$\|u_{mt}\|_2^2+\|\Delta u_m\|_2^2+\|u_m\|_2^2+(g\circ\Delta u_m)(t)\leqslant C(1+\|u_m\|_2^2\ln\|u_m\|_2^2)。\tag{8}$$

另外,

$$u_m(\cdot,t)=u_m(\cdot,0)+\int_0^t\frac{\partial u_m}{\partial t}(\cdot,t)\mathrm{d}t,$$

那么

$$\|u_m(t)\|_2^2\leqslant 2\|u_m(0)\|_2^2+2\left\|\int_0^t\frac{\partial u_m}{\partial t}(\cdot,t)\mathrm{d}t\right\|_2^2$$
$$\leqslant 2\|u_m(0)\|_2^2+2T\int_0^t\|u_{mt}(t)\|_2^2\mathrm{d}t。$$

由式(8)可知,$\|u_{mt}\|_2^2\leqslant C(1+\|u_m\|_2^2\ln\|u_m\|_2^2)$,可得

$$\|u_m(t)\|_2^2\leqslant 2\|u_m(0)\|_2^2+2T\int_0^t C(1+\|u_m\|_2^2\ln\|u_m\|_2^2)\mathrm{d}t$$
$$\leqslant 2\|u_m(0)\|_2^2+2CT\left(1+\int_0^t\|u_m\|_2^2\ln\|u_m\|_2^2\mathrm{d}t\right)$$

$$\leqslant 2C_1\left(1+\int_0^t \|u_m\|_2^2\ln\|u_m\|_2^2\mathrm{d}t\right),$$

其中,$C_1=\max\{1,2CT,2\|u_m(0)\|_2^2\}$,因此

$$\|u_m(t)\|_2^2\leqslant 2C_1\left(1+\int_0^t(C_1+\|u_m\|_2^2)\ln(C_1+\|u_m\|_2^2)\mathrm{d}t\right)。$$

利用对数 Gronwall 不等式可得

$$\|u_m(t)\|_2^2\leqslant 2C_1\mathrm{e}^{2C_1T}=C_2。$$

结合式(8),可得

$$\|u_{mt}\|_2^2+\|\Delta u_m\|_2^2+\|u_m\|_2^2+(g\circ\Delta u_m)(t)\leqslant C(1+C_2\ln C_2)=C_3,$$

其中 C_3 为独立于 m 和 t 的常数,表明

$$\sup_{t\in(0,t_m)}\|u_{mt}\|_2^2+\sup_{t\in(0,t_m)}\|\Delta u_m\|_2^2+\sup_{t\in(0,t_m)}\|u_m\|_2^2+\sup_{t\in(0,t_m)}(g\circ\Delta u_m)(t)\leqslant C_3,$$

因此,存在$\{u^m\}_{m=1}^{\infty}$的子列(仍记为$\{u^m\}_{m=1}^{\infty}$)使得

$$\begin{cases}u_m\overset{*}{\rightharpoonup}u \text{ 于 } L^{\infty}([0,T],H_0^2(\Omega)),\\ u_{mt}\overset{*}{\rightharpoonup}u_t \text{ 于 } L^{\infty}([0,T],L^2(\Omega)),\\ u_m\rightharpoonup u \text{ 于 } L^2([0,T],H_0^2(\Omega)),\\ u_{mt}\rightharpoonup u_t \text{ 于 } L^2([0,T],L^2(\Omega))。\end{cases}$$

由 Aubin-Lions 定理可知

$$u_m\to u \text{ 于 } C([0,T],L^2(\Omega)),$$

因此

$$u_m\ln|u_m|\to u\ln|u| \text{ a.e. } (x,t)\in\Omega\times(0,T)。\tag{9}$$

此外

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}(u_m\ln|u_m|)^2\mathrm{d}x&\leqslant\int_{\Omega_1}(u_m\ln|u_m|)^2\mathrm{d}x+\int_{\Omega_2}(u_m\ln|u_m|)^2\mathrm{d}x\\&\leqslant\mathrm{e}^{-2}|\Omega|+\frac{\mathrm{e}^{-2}}{\sigma^2}\int_{\Omega_2}|u_m|^{2+2\sigma}\mathrm{d}x\\&\leqslant\mathrm{e}^{-2}|\Omega|+\frac{B^{2+2\sigma}}{\mathrm{e}^2\sigma^2}\|\Delta u\|_2^{2+2\sigma}\\&\leqslant C,\end{aligned}\tag{10}$$

其中,$\Omega_1=\{x\in\Omega:|u(x)|\leqslant 1\}$, $\Omega_2=\{x\in\Omega:|u(x)|>1\}$, $\sigma>0$ 是适当小的常数,$B>0$ 是从 $H_0^2(\Omega)\hookrightarrow L^{2+2\sigma}(\Omega)$ 的最佳嵌入常数。由式(9)、(10)可知

$$u_m\ln|u_m|\overset{*}{\rightharpoonup}u\ln|u| \text{ 于 } L^{\infty}([0,T],L^2(\Omega))。$$

对式(6)的第一个等式两端同时在$(0,t)$上积分,得

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega}u_{mt}\omega\mathrm{d}x-\int_{\Omega}u_{1m}\omega\mathrm{d}x+\int_0^t\int_{\Omega}\Delta u_m\Delta\omega\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^t\int_{\Omega}u_{mt}\omega\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&-\int_0^t\int_{\Omega}\Delta\omega\int_0^t g(t-s)\Delta u_m(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^t\int_{\Omega}u_m\omega\ln|u_m|\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

令 $m\to+\infty$,可得

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega}u_t\omega\mathrm{d}x-\int_{\Omega}u_1\omega\mathrm{d}x+\int_0^t\int_{\Omega}\Delta u\Delta\omega\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^t\int_{\Omega}u_t\omega\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&-\int_0^t\int_{\Omega}\Delta\omega\int_0^t g(t-s)\Delta u(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^t\int_{\Omega}u\omega\ln|u|\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

两端同时关于时间变量 t 微分可得

$$\int_{\Omega}u_{tt}\omega\mathrm{d}x+\int_{\Omega}\Delta u\Delta\omega\mathrm{d}x+\int_{\Omega}u_t\omega\mathrm{d}x-\int_{\Omega}\Delta\omega\int_0^t g(t-s)\Delta u(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x=\int_{\Omega}u\omega\ln|u|\mathrm{d}x。$$

下面证明初值条件。

由 Aubin-Lions 定理可知,$u_m \to u$ 于 $C([0,T],L^2(\Omega))$,则 $u_m(x,0)\to u(x,0)$ 于 $L^2(\Omega)$。由于$u_m(0)=u_{0m}\to u_0$ 于 $H_0^2(\Omega)$,因此 $u(x,0)=u_0(x)$ 于 $H_0^2(\Omega)$。

在式(6)的第 1 个等式两端同乘 $\phi\in C_0^\infty(0,T)$ 并关于时间变量 t 在$(0,T)$上积分,得

$$-\int_0^T\int_\Omega u_{mt}\omega\phi'(t)\,\mathrm{d}x+\int_0^T\int_\Omega \Delta u_m\Delta\omega\phi(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_\Omega u_{mt}\omega\phi(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$
$$-\int_0^T\int_\Omega \Delta\omega\phi\int_0^t g(t-s)\Delta u_m(s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^T\int_\Omega\phi(t)\omega u_m\ln|u_m|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

令 $m\to+\infty$,可得

$$-\int_0^T\int_\Omega u_t\omega\phi'(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_\Omega \Delta u\Delta\omega\phi(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_\Omega u_t\omega\phi(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$
$$-\int_0^T\int_\Omega \Delta\omega\phi\int_0^t g(t-s)\Delta u(s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^T\int_\Omega\phi(t)\omega u\ln|u|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t。$$

这表明$u_{tt}\in L^2([0,T],H^{-2}(\Omega))$,由 $u_t\in L^2([0,T],L^2(\Omega))$可知$u_t\in C([0,T],H^{-2}(\Omega))$,因此 $u_{mt}(x,0)\to u_t(x,0)$ 于 $H^{-2}(\Omega)$;由于 $u_{mt}(x,0)=u_{1m}\to u_1$ 于 $L^2(\Omega)$,因此 $u_t(x,0)=u_1(x)$ 于 $L^2(\Omega)$。

3　弱解的全局存在性与衰减估计

建立当初值落在 W 时问题(1)弱解的全局存在性,然后给出弱解的衰减估计。

引理 7　设$u_0\in H_0^2(\Omega)\setminus\{0\}$, $u_1\in L^2(\Omega)\setminus\{0\}$,如果 $E(0)<d$ 且$u_0\in W$,那么对于任意 $t\in[0,T)$,可得 $u(x,t)\in W$且 $\|u\|_2^2<4d$。

证明　设 $u(x,t)$是问题(1)的弱解,T 是弱解 $u(t)$的最大存在时间,由 $E(0)<d$ 及 $E(t)$的定义可知

$$E(t)\leqslant E(0)<d,\quad \forall t\in[0,T)。\tag{11}$$

断言$u_0\in W$,则 $u(t)\in W$。若不然,存在$t_0\in(0,T)$使得 $I(u(t_0))=0$,当 $0\leqslant t<t_0$ 时,$I(u(t))>0$。由 N 的定义可知,$u(t_0)\in N$,表明 $J(u(t_0))\geqslant d$。由 $E(t)$的定义,可知

$$E(t_0)=\frac{1}{2}\|u_t(t_0)\|_2^2+J(u(t_0))\geqslant d,$$

显然与式(11)矛盾,因此,对任意 $t\in[0,T)$, $u(t)\in W$。

下证 $\|u\|_2^2<4d$。当 $u\in W$ 时,$I(u)>0$,有下式成立:

$$d>E(t)=\frac{1}{2}\|u_t\|_2^2+J(u)=\frac{1}{2}\|u_t\|_2^2+\frac{1}{2}I(u)+\frac{1}{4}\|u\|_2^2>\frac{1}{4}\|u\|_2^2,$$

因此,$\|u\|_2^2<4d$。

定理 2(全局存在性)　假设(H_1)、(H_2)成立,$u_0\in H_0^2(\Omega)\setminus\{0\}$, $u_1\in L^2(\Omega)\setminus\{0\}$,若 $E(0)<d$, $u_0\in W$,则问题(1)存在一个全局弱解

$$u(x,t)\in C([0,\infty),H_0^2(\Omega))\cap C^1([0,\infty),L^2(\Omega))\cap C^2([0,\infty),H^{-2}(\Omega))。$$

证明　结合式(11)和 $E(t)$的定义,可得

$$\frac{1}{2}\|u_t\|_2^2+\frac{1}{2}\left(1-\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s\right)\|\Delta u\|_2^2-\frac{1}{2}\int_\Omega|u|^2\ln|u|\,\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\|u\|_2^2+\frac{1}{2}(g\circ\Delta u)(t)<d。$$

根据对数 Sobolev 不等式,可得

$$\|u_t\|_2^2+\left(1-\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s-\frac{C_pa^2}{2\pi}\right)\|\Delta u\|_2^2+\left(\frac{3}{2}+\ln a\right)\|u\|_2^2+(g\circ\Delta u)(t)\leqslant C_d(1+\|u\|_2^2\ln\|u\|_2^2),$$

取 $\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}<a<\sqrt{\dfrac{2\pi l}{C_p}}$使得 $1-\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s-\dfrac{C_pa^2}{2\pi}>0$, $\dfrac{3}{2}+\ln a>0$,则

$$\|u_t\|_2^2+\|\Delta u\|_2^2+\|u\|_2^2+(g\circ\Delta u)(t)\leqslant C_d(1+\|u\|_2^2\ln\|u\|_2^2),$$

由引理 7 可知 $\|u\|_2^2\leqslant 4d$,因此

$$\|u_t\|_2^2+\|\Delta u\|_2^2+\|u\|_2^2+(g\circ\Delta u)(t)\leqslant C_d。$$

以下的证明与定理 1 的证明过程完全类似。

下面证明弱解的衰减性。定义函数 $F(t)=E(t)+\varepsilon\int_\Omega u_t u\mathrm{d}x$,其中 ε 为正常数。

引理 8 设 $u_0\in W$,则对于足够小的 $\varepsilon>0$,存在正常数 β_1、β_2 使得 $\beta_2E(t)\leqslant F(t)\leqslant\beta_1E(t)$,也就是 $F(t)\sim E(t)$。

证明

$$|F(t)-E(t)|=\varepsilon|\int_\Omega u_t u\mathrm{d}x|,$$

根据 Holder 不等式、Young 不等式及式(5),可得

$$\begin{aligned}|F(t)-E(t)|&\leqslant\varepsilon\delta\|u_t\|_2^2+\frac{\varepsilon}{4\delta}\|u\|_2^2\\&\leqslant C_{\varepsilon,\delta}\left(\frac{1}{2}\|u_t\|_2^2+\|u\|_2^2\right)\\&\leqslant C_{\varepsilon,\delta}\left(\frac{1}{2}\|u_t\|_2^2+J(u)\right)\\&=C_{\varepsilon,\delta}E(t),\end{aligned}$$

由此

$$-C_{\varepsilon,\delta}E(t)\leqslant F(t)-E(t)\leqslant C_{\varepsilon,\delta}E(t),$$

即

$$(1-C_{\varepsilon,\delta})E(t)\leqslant F(t)\leqslant(1+C_{\varepsilon,\delta})E(t),$$

取 ε 足够小,使 $1-C_{\varepsilon,\delta}>0$,令 $\beta_2=1-C_{\varepsilon,\delta}$, $\beta_1=1+C_{\varepsilon,\delta}$即可。

定理 3 假设(H_1)、(H_2)成立,$u_0\in H_0^2(\Omega)\setminus\{0\}$, $u_1\in L^2(\Omega)\setminus\{0\}$,若 $E(0)<d$, $u_0\in W$,则存在 2 个正常数 K_1、K_2 使下式成立:

$$E(t)\leqslant K_1\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}K_2\lambda(t)\mathrm{d}t}。$$

证明 对 $F(t)$求导可得

$$\begin{aligned}F'(t)&=E'(t)+\varepsilon\int_\Omega u_{tt}u\mathrm{d}x+\varepsilon\int_\Omega|u_t|^2\mathrm{d}x\\&=E'(t)+\varepsilon\int_\Omega u^2\ln|u|\mathrm{d}x-\varepsilon\|\Delta u\|_2^2-\varepsilon\int_\Omega u_tu\mathrm{d}x+\varepsilon\int_\Omega\Delta u\int_0^tg(t-s)\Delta u(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x+\varepsilon\|u_t\|_2^2。\end{aligned}\tag{12}$$

利用 Young 不等式、Holder 不等式及引理 1.5,可得

$$\begin{aligned}\int_\Omega\Delta u\int_0^tg(t-s)\Delta u(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x&=\int_\Omega\Delta u\int_0^tg(t-s)(\Delta u(s)-\Delta u(t))\mathrm{d}s\mathrm{d}x+\int_\Omega\Delta u\int_0^tg(t-s)\Delta u(t)\mathrm{d}s\mathrm{d}x\\&\leqslant\eta\|\Delta u\|_2^2+\frac{1}{4\eta}\left\|\int_0^tg(t-s)(\Delta u(s)-\Delta u(t))\mathrm{d}s\right\|_2^2+(1-l)\|\Delta u\|_2^2\\&\leqslant(\eta+1-l)\|\Delta u\|_2^2+\frac{1-l}{4\eta}(g\circ\Delta u)(t)。\end{aligned}\tag{13}$$

利用 Young 不等式、Holder 不等式,得

$$\int_\Omega u_tu\mathrm{d}x\leqslant\eta\|u\|_2^2+\frac{1}{4\eta}\|u_t\|_2^2。\tag{14}$$

结合式(4)、(12)—(14),可得

$$\begin{aligned}F'(t)\leqslant&\frac{1}{2}(g'\circ\Delta u)(t)+\left[-\frac{1}{2}g(t)-\varepsilon+\varepsilon(\eta+1+l)\right]\|\Delta u\|_2^2+\left(-1+\frac{\varepsilon}{4\eta}+\varepsilon\right)\|u_t\|_2^2\\&+\varepsilon\int_\Omega u^2\ln|u|\mathrm{d}x+\varepsilon\eta\|u\|_2^2+\frac{\varepsilon(1-l)}{4\eta}(g\circ\Delta u)(t)。\end{aligned}$$

根据 $E(t)$的定义可得

$$F'(t)\leqslant-\varepsilon NE(t)-\left[1-\varepsilon\left(1+\frac{1}{4\eta}+\frac{N}{2}\right)\right]\|u_t\|_2^2-\varepsilon\left[l-\eta-\frac{N}{2}\left(1-\int_0^tg(s)\mathrm{d}s\right)\right]\|\Delta u\|_2^2$$

$$+\varepsilon\left(1-\frac{N}{2}\right)\int_{\Omega}u^2\ln|u|\mathrm{d}x+\varepsilon\left(\frac{N}{4}+\eta\right)\|u\|_2^2+\varepsilon\left(\frac{N}{2}+\frac{1-l}{4\eta}\right)(g\circ\Delta u)(t)+\frac{1}{2}(g'\circ\Delta u)(t)。$$

其中 N 是正常数。利用对数 Sobolev 不等式,可得

$$F'(t)\leqslant-\varepsilon NE(t)-\left[1-\varepsilon\left(1+\frac{1}{4\eta}+\frac{N}{2}\right)\right]\|u_t\|_2^2-\varepsilon\left[1-\eta-\frac{N}{2}\left(1-\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right)-\left(1-\frac{N}{2}\right)\frac{C_p a^2}{2\pi}\right]\|\Delta u\|_2^2$$
$$+\varepsilon\left[\frac{N}{4}+\eta+\left(1-\frac{N}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\ln\|u\|_2^2-1-\ln a\right)\right]\|u\|_2^2+\varepsilon\left(\frac{N}{2}+\frac{1-l}{4\eta}\right)(g\circ\Delta u)(t)+\frac{1}{2}(g'\circ\Delta u)(t)。\tag{15}$$

由引理 7,可得

$$\ln\|u\|_2^2<\ln 4d。\tag{16}$$

结合式(15)、(16)及(H_1),可得

$$F'(t)\leqslant-\varepsilon NE(t)-\left[1-\varepsilon\left(1+\frac{1}{4\eta}+\frac{N}{2}\right)\right]\|u_t\|_2^2-\varepsilon\left[1-\eta-\frac{N}{2}-\left(1-\frac{N}{2}\right)\frac{C_p a^2}{2\pi}\right]\|\Delta u\|_2^2$$
$$+\varepsilon\left[\frac{N}{4}+\eta+\left(1-\frac{N}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\ln 4d-1-\ln a\right)\right]\|u\|_2^2+\varepsilon\left(\frac{N}{2}+\frac{1-l}{4\eta}\right)(g\circ\Delta u)(t)+\frac{1}{2}(g'\circ\Delta u)(t)。$$

取 $0<N<2$, $a_1=\max\left\{\exp\left(\frac{1}{2}\ln 4d-1+\frac{N+4\eta}{2(2-N)}\right),\ \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\right\}$, $a_2=\min\left\{\sqrt{\frac{2\pi(2-2\eta-N)}{C_p(2-N)}},\ \sqrt{\frac{2\pi l}{C_p}}\right\}$,使得 $a_1<a<a_2$,固定 a 后,取 ε 足够小使得 $1-\varepsilon\left(1+\frac{1}{4\eta}+\frac{N}{2}\right)>0$,则

$$F'(t)\leqslant-\lambda_1E(t)+\lambda_2(g\circ\Delta u)(t),\tag{17}$$

其中 λ_1、λ_2 为正常数。对式(17)两端同乘 $\xi(t)$,结合式(4)、(H_2)可得

$$\begin{aligned}F'(t)\xi(t)&\leqslant-\lambda_1\xi(t)E(t)+\lambda_2\xi(t)(g\circ\Delta u)(t)\\&\leqslant-\lambda_1\xi(t)E(t)+\lambda_2(g\xi\circ\Delta u)(t)\\&\leqslant-\lambda_1\xi(t)E(t)+\lambda_2(-g'\circ\Delta u)(t)\\&\leqslant-\lambda_1\xi(t)E(t)-2\lambda_2E'(t)。\end{aligned}$$

设 $L(t)=\xi(t)F(t)+\mu E(t)$,易知 $L(t)\sim E(t)$,即存在正常数 β_3、β_4 使得 $\beta_3E(t)\leqslant L(t)\leqslant\beta_4E(t)$,因此

$$\begin{aligned}L'(t)&=\xi'(t)F(t)+\xi(t)F'(t)+\mu E'(t)\\&\leqslant\xi'(t)F(t)-\lambda_1\xi(t)E(t)-2\lambda_2E'(t)+\mu E'(t)\\&\leqslant-(\lambda_1\xi(t)-\beta_1\xi'(t))E(t)+(\mu-2\lambda_2)E'(t)。\end{aligned}$$

令 $\lambda(t)=\lambda_1\xi(t)-\beta_1\xi'(t)$, $\mu=2\lambda_2$,则

$$L'(t)\leqslant-\lambda(t)E(t)\leqslant-\frac{1}{\beta_4}\lambda(t)L(t),$$

$$L(t)\leqslant L(t_0)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\beta_4}\lambda(t)\mathrm{d}t},$$

意味着

$$E(t)\leqslant K_1\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}K_2\lambda(t)\mathrm{d}t}。$$

其中 $K_1=\frac{L(t_0)}{\beta_3}$, $K_2=\frac{1}{\beta_4}$。

参考文献:

[1] AL-GHARABLI M M, GUESMIA A, MESSAOUDI S A. Existence and a general decay results for a viscoelastic plate equation with a logarithmic nonlinearity[J]. Communications on Pure and Applied Analysis, 2019, 18(1):159-180.

[2] AL-GHARABLI M M. New general decay results for a viscoelastic plate equation with a logarithmic nonlinearity[J]. Boundary Value Problems, 2019, 2019(1):194-215.

[3] MERZOUG K, BOUMAZA N, GHERAIBIA B. General decay result of solutions for viscoelastic wave equation with logarithmic nonlinearity[C]//International Conference on Recent Advances in Mathematics and Informatics. Tebessa, Algeria: IEEE, 2021:1-4.

(下转第 84 页)