山东大学学报(理学版)2025年2月 第60卷 第2期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.60, No.2, 2025

E-mail:xblxb@sdu.edu.cn
http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn
Tel:+86-531-88366917

文章编号:1671-9352(2025)02-0072-06 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.267

三维欧氏空间中的 Frenet 型达布曲线

黄杰
(黑龙江大学数学科学学院, 黑龙江 哈尔滨 150000)

摘要:在三维欧氏空间中定义了带有奇异点的 Frenet 型达布曲线,给出了一条曲线是 Frenet 型达布曲线的充分必要条件,又通过球面 Legendre 曲线构造出了该曲线,并且证明了标架螺线与标架从切曲线都是 Frenet 型达布曲线。
关键词:Frenet 型达布曲线;球面 Legendre 曲线;标架螺线;标架从切曲线
中图分类号:O186.1 **文献标志码**:A
引用格式:黄杰. 三维欧氏空间中的 Frenet 型达布曲线[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(2):72-77.

Frenet type Darboux curves in the three-dimensional Euclidean space

HUANG Jie
(School of Mathematical Science, Heilongjiang University, Harbin 150000, Heilongjiang, China)

Abstract: A Frenet type Darboux curve with singular points is defined in the three-dimensional Euclidean space, and we give a necessary and sufficient condition for a curve to be a Frenet type Darboux curve. Then we construct the Frenet type Darboux curve through a spherical Legendre curve, and prove that both the framed helix and the framed rectifying curve are Frenet type Darboux curves.
Key words: Frenet type Darboux curve; spherical Legendre curve; framed helix; framed rectifying curve

0 引言

曲线是古典微分几何的主要研究对象之一,成对出现的特殊曲线更是人们关注的重点,如贝特朗曲线、曼海姆曲线等[1]。一条空间曲线在 Frenet 标架下的局部速度向量,也就是一个刚体绕轴转动时的角速度,被称为达布向量。由于达布向量可以更简洁地解释曲率和挠率的关系,因此在研究曲线的局部微分几何性质时常常用到达布向量。于延华等[2]根据达布向量定义了三维欧氏空间中的达布曲线和达布侣线,经过空间曲线上的一点,且与该点的达布向量平行的直线称为曲线在此点的达布线。如果 2 条曲线在对应点处的达布线重合,则这 2 条曲线称为达布曲线,其中一条曲线是另一条曲线的达布侣线。他们研究了正则达布曲线的几何不变量及达布曲线与螺线、贝特朗曲线、曼海姆曲线之间的联系,但他们并没有讨论奇异的情况。由于曲线在奇异点处退化导致无法建立 Frenet 标架,因此人们对奇异点处的几何性质知之甚少。Honda 等[3]给出了 n 维欧氏空间中的标架曲线,即带有活动标架的奇异曲线,解决了奇异点处无法构建标架这一难题,随后有大量学者借助标架曲线研究了欧氏空间以及非欧空间中的各类奇异曲线的几何性质[4-8]。

本文借助一种特殊的标架曲线,即 Frenet 型标架基曲线,定义了带有奇异点的达布曲线,研究了 Frenet 型达布曲线及其侣线间的关系,并通过球面 Legendre 曲线构造了奇异达布曲线,给出了标架螺线、标架从切曲线与 Frenet 型达布曲线之间的关系。

收稿日期:2023-06-14; **网络出版时间**:2023-11-29 14:55:22
基金项目:黑龙江省省属高等学校基本科研业务费基础研究项目(2020-KYYWF-1041)
作者简介:黄杰(1990—),女,讲师,博士,研究方向为奇点理论在微分几何学中的应用. E-mail:2020042@hlju.edu.cn

1　预备知识

在三维欧氏空间 $\mathbf{R}^3$ 中,定义 $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$ 为向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$ 与向量 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)$ 的内积。向量 $\boldsymbol{x}$ 的模定义为 $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle}$,向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的外积定义为

$$\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的规范正交基。

定义 1[4]　设 $\boldsymbol{\gamma}: I\to\mathbf{R}^3$ 是一条曲线,如果存在一个正则球面曲线 $\boldsymbol{T}: I\to S^2$ 和一个光滑函数 $\alpha: I\to\mathbf{R}$ 使得 $\boldsymbol{\gamma}'(t)=\alpha(t)\boldsymbol{T}(t)$,对所有 $t\in I$ 都成立,则称 $\boldsymbol{\gamma}$ 是一条 Frenet 型标架基曲线,$\boldsymbol{T}(t)$ 为 $\boldsymbol{\gamma}(t)$ 的单位切向量,$\alpha(t)$ 是 $\boldsymbol{\gamma}(t)$ 的速度函数。

由上述定义可知,t_0 是 $\boldsymbol{\gamma}$ 的奇异点的充分必要条件是 $\alpha(t_0)=0$,规定 $\boldsymbol{N}(t)=\boldsymbol{T}'(t)/\|\boldsymbol{T}'(t)\|$, $\boldsymbol{B}(t)=\boldsymbol{T}(t)\times\boldsymbol{N}(t)$,并称 $\boldsymbol{N}(t)$ 是 $\boldsymbol{\gamma}$ 在 t 处的单位主法向量,$\boldsymbol{B}(t)$ 是 $\boldsymbol{\gamma}$ 在 t 处的单位副法向量,从而得到一个沿着 $\boldsymbol{\gamma}(t)$ 的正交标架 $\{\boldsymbol{T}(t),\boldsymbol{N}(t),\boldsymbol{B}(t)\}$,称它为沿着 $\boldsymbol{\gamma}(t)$ 的 Frenet 型标架,并且 Frenet-Serret 型公式为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{T}'(t) \\ \boldsymbol{N}'(t) \\ \boldsymbol{B}'(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \kappa(t) & 0 \\ -\kappa(t) & 0 & \tau(t) \\ 0 & -\tau(t) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{T}(t) \\ \boldsymbol{N}(t) \\ \boldsymbol{B}(t) \end{pmatrix},$$

其中

$$\kappa(t)=\|\boldsymbol{T}'(t)\|>0,$$

$$\tau(t)=\frac{\det(\boldsymbol{T}(t),\boldsymbol{T}'(t),\boldsymbol{T}''(t))}{\|\boldsymbol{T}'(t)\|^2},$$

称 $\kappa(t)$、$\tau(t)$ 为 $\boldsymbol{\gamma}(t)$ 的曲率、挠率,这里的曲率 $\kappa(t)$、挠率 $\tau(t)$ 依赖参数的选择。

定义一个沿着 $\boldsymbol{\gamma}(t)$ 的向量 $\boldsymbol{D}(t)=\tau(t)\boldsymbol{T}(t)+\kappa(t)\boldsymbol{B}(t)$,称 $\boldsymbol{D}(t)$ 为沿着 $\boldsymbol{\gamma}(t)$ 的达布向量,借助达布向量,Frenet-Serret 型公式可改写为

$$\begin{cases} \boldsymbol{T}'(t)=\boldsymbol{D}(t)\times\boldsymbol{T}(t), \\ \boldsymbol{N}'(t)=\boldsymbol{D}(t)\times\boldsymbol{N}(t), \\ \boldsymbol{B}'(t)=\boldsymbol{D}(t)\times\boldsymbol{B}(t)。 \end{cases}$$

以矢量 $\boldsymbol{D}(t)$ 定义的曲线称为 $\boldsymbol{\gamma}(t)$ 的中心轨迹[9]。

因为 $\boldsymbol{T}(t)$ 是正则的,所以得到的单位主法向量 $\boldsymbol{N}(t)$ 和单位副法向量 $\boldsymbol{B}(t)$ 是唯一的,因此 $\kappa(t)$ 和 $\tau(t)$ 相对 $\boldsymbol{T}(t)$ 是唯一的。

定义 2[4]　设 $\boldsymbol{\gamma}: I\to\mathbf{R}^3$ 是单位切向量为 $\boldsymbol{T}(t)$ 的 Frenet 型标架基曲线,若存在一个常向量 $\boldsymbol{v}\in S^2$ 和常数 $C\in\mathbf{R}$,使得 $\langle\boldsymbol{T}(t),\boldsymbol{v}\rangle=C$,对所有 $t\in I$ 都成立,则称 $\boldsymbol{\gamma}$ 是标架螺线。

定理 1[4]　Frenet 型标架基曲线 $\boldsymbol{\gamma}: I\to\mathbf{R}^3$ 是标架螺线的充分必要条件是 τ/κ 为常数。

定义 3[8-9]　设 $\boldsymbol{\gamma}: I\to\mathbf{R}^3$ 是 Frenet 型标架基曲线,$\{\boldsymbol{T}(t),\boldsymbol{N}(t),\boldsymbol{B}(t)\}$ 是沿着 $\boldsymbol{\gamma}(t)$ 的 Frenet 型标架,若存在一个函数 $\lambda: I\to\mathbf{R}$ 和一个常数 μ,使得 $\boldsymbol{\gamma}(t)=\lambda(t)\boldsymbol{T}(t)+\mu\boldsymbol{B}(t)$,则称 $\boldsymbol{\gamma}$ 是一条标架从切曲线。

定理 2[8-9]　设 $\boldsymbol{\gamma}: I\to\mathbf{R}^3$ 是一条标架从切曲线,则 $\boldsymbol{\gamma}$ 是 Frenet 型标架基曲线 $\boldsymbol{\beta}: I\to\mathbf{R}^3$ 的中心轨迹,其中 $\boldsymbol{\beta}$ 的曲率 κ_β 是非零常数,$\boldsymbol{\beta}$ 的挠率 τ_β 是非常函数。

定义 4　设 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}: I\to\mathbf{R}^3$ 是 2 条 Frenet 型标架基曲线,若存在光滑函数 $\lambda: I\to\mathbf{R}$,使得 $\boldsymbol{\gamma}_1(t)=\boldsymbol{\gamma}(t)+\lambda(t)\boldsymbol{D}(t)$,且 $\boldsymbol{D}(t)\parallel\boldsymbol{D}_1(t)$,则称 $\boldsymbol{\gamma}_1$ 和 $\boldsymbol{\gamma}$ 为 Frenet 型达布曲线对,称每一条曲线是另一条曲线的 Frenet 型达布侣线,其中 $\boldsymbol{D}_1(t)$、$\boldsymbol{D}(t)$ 分别是 $\boldsymbol{\gamma}_1$、$\boldsymbol{\gamma}$ 的达布向量。

2　主要结论

定理 3　设 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}: I\to\mathbf{R}^3$ 是 2 条 Frenet 型标架基曲线,若 $\boldsymbol{\gamma}_1$ 和 $\boldsymbol{\gamma}$ 的主法向量平行,则 $\boldsymbol{\gamma}_1$ 和 $\boldsymbol{\gamma}$ 的达布向量

也平行。

证明 设 $\boldsymbol{N}_1(t)=\varepsilon\boldsymbol{N}(t)$,其中 $\varepsilon=\pm1$,$\boldsymbol{N}(t)$、$\boldsymbol{N}_1(t)$分别是 $\boldsymbol{\gamma}(t)$ 与 $\boldsymbol{\gamma}_1(t)$ 的主法向量。根据 Frenet-Serret 型公式,对 $\boldsymbol{N}_1(t)=\varepsilon\boldsymbol{N}(t)$ 两边对 t 求导可得

$$-\kappa_1(t)\boldsymbol{T}_1(t)+\tau_1(t)\boldsymbol{B}_1(t)=\varepsilon(-\kappa(t)\boldsymbol{T}(t)+\tau(t)\boldsymbol{B}(t)),$$

上式两边同时与 $\boldsymbol{N}_1(t)$ 作外积,得 $\boldsymbol{D}_1(t)=\boldsymbol{D}(t)$。定理 3 得证。

定理 4 设 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}:I\to\mathbf{R}^3$ 是 2 条 Frenet 型标架基曲线,若 $\boldsymbol{\gamma}_1$ 与 $\boldsymbol{\gamma}$ 的达布向量互相平行,则:

(1) $\boldsymbol{\gamma}_1$ 与 $\boldsymbol{\gamma}$ 的主法向量平行。

(2) 存在不恒为零的函数 $a:I\to\mathbf{R}$,使得 $\boldsymbol{\gamma}_1$ 的主法向量可表示为

$$\boldsymbol{N}_1(t)=a(t)\boldsymbol{T}(t)+\varepsilon\sqrt{1-(1+C^2)a^2(t)}\,\boldsymbol{N}(t)-Ca(t)\boldsymbol{B}(t),$$

其中 $\varepsilon=\pm1$,并且 C 是常数。

证明 设 $\boldsymbol{\gamma}_1$、$\boldsymbol{\gamma}$ 的 Frenet 型标架分别为 $\{\boldsymbol{T}_1(t),\boldsymbol{N}_1(t),\boldsymbol{B}_1(t)\}$、$\{\boldsymbol{T}(t),\boldsymbol{N}(t),\boldsymbol{B}(t)\}$,已知 $\boldsymbol{D}_1(t)=\varepsilon\boldsymbol{D}(t)$,其中 $\varepsilon=\pm1$,令

$$\boldsymbol{N}_1(t)=a(t)\boldsymbol{T}(t)+b(t)\boldsymbol{N}(t)+c(t)\boldsymbol{B}(t),$$

其中 $a(t)$、$b(t)$、$c(t)$ 为光滑函数。因为 $\|\boldsymbol{N}_1(t)\|=1$,所以

$$a^2(t)+b^2(t)+c^2(t)=1。\tag{1}$$

根据达布向量定义和 $\boldsymbol{N}_1'(t)=\boldsymbol{D}_1(t)\times\boldsymbol{N}_1(t)$, 可知 $\langle\boldsymbol{N}_1(t),\boldsymbol{D}_1(t)\rangle=\langle\boldsymbol{N}_1'(t),\boldsymbol{D}_1(t)\rangle=0$, 从而

$$a(t)\tau(t)+c(t)\kappa(t)=0,\tag{2}$$

$$a'(t)\tau(t)+c'(t)\kappa(t)=0。\tag{3}$$

由式(2)可知

$$c(t)=-\frac{a(t)\tau(t)}{\kappa(t)},\quad c'(t)=-\frac{a'(t)\tau(t)+a(t)\tau'(t)}{\kappa(t)}+\frac{a(t)\tau(t)\kappa'(t)}{\kappa^2(t)}。$$

又由式(3)可知 $c'(t)=-\dfrac{a'(t)\tau(t)}{\kappa(t)}$,结合 $c(t)$、$c'(t)$,得 $a(t)\left(\dfrac{\tau(t)}{\kappa(t)}\right)'=0$。把 $c(t)=-\dfrac{a(t)\tau(t)}{\kappa(t)}$代入式(1)可得

$$b(t)=\varepsilon\sqrt{1-\left(1+\frac{\tau^2(t)}{\kappa^2(t)}\right)a^2(t)},$$

从而

$$\boldsymbol{N}_1(t)=a(t)\boldsymbol{T}(t)+\varepsilon\sqrt{1-\left(1+\frac{\tau^2(t)}{\kappa^2(t)}\right)a^2(t)}\,\boldsymbol{N}(t)-a(t)\frac{\tau(t)}{\kappa(t)}\boldsymbol{B}(t),\text{且}$$

$$a(t)\left(\frac{\tau(t)}{\kappa(t)}\right)'=0。$$

(1) 当 $a(t)=0$ 时,$\boldsymbol{N}_1(t)=\varepsilon\boldsymbol{N}(t)$;(2) 当 $a(t)\neq0$,$\tau(t)/\kappa(t)=C$ 时, $\boldsymbol{N}_1(t)=a(t)\boldsymbol{T}(t)+\varepsilon\sqrt{1-(1+C^2)a^2(t)}\,\boldsymbol{N}(t)-Ca(t)\boldsymbol{B}(t)$。定理 4 得证。

如果 $\boldsymbol{\gamma}:I\to\mathbf{R}^3$ 是一条 Frenet 型达布曲线,Frenet 型标架基曲线 $\boldsymbol{\gamma}_1(t)=\boldsymbol{\gamma}(t)+\lambda(t)\boldsymbol{D}(t)$ 是 $\boldsymbol{\gamma}$ 的达布侣线, 则有

$$\alpha_1(t)\boldsymbol{T}_1(t)=(\alpha(t)+(\lambda(t)\tau(t))')\boldsymbol{T}(t)+(\lambda(t)\kappa(t))'\boldsymbol{B}(t)。\tag{4}$$

令 $\boldsymbol{T}_1(t)=\cos\theta(t)\boldsymbol{T}(t)+\sin\theta(t)\boldsymbol{B}(t)$,两边同时对 t 求导,得

$$\kappa_1(t)\boldsymbol{N}_1(t)=\theta'(t)(-\sin\theta(t)\boldsymbol{T}(t)+\cos\theta(t)\boldsymbol{B}(t))+(\cos\theta(t)\kappa(t)-\sin\theta(t)\tau(t))\boldsymbol{N}(t),\tag{5}$$

由定理 4 中的式(2)可知 $\theta'(t)(\cos\theta(t)\kappa(t)-\sin\theta(t)\tau(t))=0$,由此分析 $\theta'(t)=0$ 或 $\cos\theta(t)\kappa(t)-\sin\theta(t)\tau(t)=0$。

若 $\theta'(t)=0$,则 $\theta(t)$ 为常数,有 $\boldsymbol{T}_1(t)=\cos\theta\boldsymbol{T}(t)+\sin\theta\boldsymbol{B}(t)$,结合式(4)可得

$$\begin{cases}\alpha_1(t)\cos\theta=\alpha(t)+(\lambda(t)\tau(t))',\\ \alpha_1(t)\sin\theta=(\lambda(t)\kappa(t))'。\end{cases}\tag{6}$$

若 $\cos\theta(t)\kappa(t)-\sin\theta(t)\tau(t)=0$,由式(5)可知

$$\kappa_1(t)\boldsymbol{N}_1(t)=\theta'(t)(-\sin\theta(t)\boldsymbol{T}(t)+\cos\theta(t)\boldsymbol{B}(t)),$$

此时 $\kappa_1(t)=\theta'(t)$, $\boldsymbol{N}_1(t)=-\sin\theta(t)\boldsymbol{T}(t)+\cos\theta(t)\boldsymbol{B}(t)$,根据定理 4 可知,$a(t)\neq 0$,则 $\tau(t)/\kappa(t)=C$, C 是常数,利用

$$\begin{cases}\cos\theta(t)\kappa(t)-\sin\theta(t)\tau(t)=0,\\ \tau(t)=C\kappa(t),\\ \cos^2\theta(t)+\sin^2\theta(t)=1,\end{cases}$$

可知 $\sin^2\theta(t)=\dfrac{1}{1+C^2}$, $\cos^2\theta(t)=\dfrac{C^2}{1+C^2}$,即 θ 为常数。此时 $\kappa_1(t)=0$,与 $\boldsymbol{\gamma}_1$ 是 Frenet 型标架基曲线矛盾,因此,$\boldsymbol{\gamma}_1$、$\boldsymbol{\gamma}$ 的单位切向量之间的夹角 θ 为常数且 $\cos\theta\kappa(t)-\sin\theta\tau(t)\neq 0$。由此可知下面的结论。

定理 5 若 $\boldsymbol{\gamma}_1$、$\boldsymbol{\gamma}$ 是一对 Frenet 型达布曲线,则这 2 条曲线在对应点处的切向量成固定角。

定理 6 曲线 $\boldsymbol{\gamma}:I\to\mathbf{R}^3$ 是一条 Frenet 型达布曲线的充分必要条件是存在函数 $\lambda(t)$ 和常数 $\theta\in[0,\pi]$,使得

$$\sin\theta[\alpha(t)+(\lambda(t)\tau(t))']=\cos\theta(\lambda(t)\kappa(t))'。$$

证明 必要性已证,现证充分性。

考虑 Frenet 型标架基曲线 $\boldsymbol{\gamma}_1(t)=\boldsymbol{\gamma}(t)+\lambda(t)\boldsymbol{D}(t)$,两边同时对 t 求导可得

$$\alpha_1(t)\boldsymbol{T}_1(t)=[\alpha(t)+(\lambda(t)\tau(t))']\boldsymbol{T}(t)+(\lambda(t)\kappa(t))'\boldsymbol{B}(t)。\tag{7}$$

(ⅰ) 若 $\theta=0$ 或 π,则$(\lambda(t)\kappa(t))'=0$,从而式(7)为

$$\alpha_1(t)\boldsymbol{T}_1(t)=[\alpha(t)+(\lambda(t)\tau(t))']\boldsymbol{T}(t),$$

两边同时对 t 求导,可得

$$\alpha_1'(t)\boldsymbol{T}_1(t)+\alpha_1(t)\kappa_1(t)\boldsymbol{N}_1(t)=[\alpha(t)+(\lambda(t)\tau(t))']'\boldsymbol{T}(t)+[\alpha(t)+(\lambda(t)\tau(t))']\kappa(t)\boldsymbol{N}(t),$$

由上两式可知 $\boldsymbol{T}_1\parallel\boldsymbol{T}$,$\boldsymbol{N}_1\parallel\boldsymbol{N}$,从而根据定理 3 可知 $\boldsymbol{D}_1\parallel\boldsymbol{D}$。

(ⅱ) 若 $\theta=\pi/2$,则 $\alpha(t)+(\lambda(t)\tau(t))'=0$,从而式(7)为 $\alpha_1(t)\boldsymbol{T}_1(t)=(\lambda(t)\kappa(t))'\boldsymbol{B}(t)$,两边同时对 t 求导可得

$$\alpha_1'(t)\boldsymbol{T}_1(t)+\alpha_1(t)\kappa_1(t)\boldsymbol{N}_1(t)=(\lambda(t)\kappa(t))''\boldsymbol{B}(t)-(\lambda(t)\kappa(t))'\tau(t)\boldsymbol{N}(t),$$

由上两式可知 $\boldsymbol{T}_1\parallel\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{N}_1\parallel\boldsymbol{N}$,从而根据定理 3 可知 $\boldsymbol{D}_1\parallel\boldsymbol{D}$。

(ⅲ) 若 $\theta\neq 0,\ \pi/2,\ \pi$,则 $\sin\theta[\alpha(t)+(\lambda(t)\tau(t))']=\cos\theta(\lambda(t)\kappa(t))'$且 $\sin\theta[\alpha(t)+(\lambda(t)\tau(t))']'=\cos\theta(\lambda(t)\kappa(t))''$,两式联立,可得

$$[\alpha(t)+(\lambda(t)\tau(t))']'(\lambda(t)\kappa(t))'=[\alpha(t)+(\lambda(t)\tau(t))'](\lambda(t)\kappa(t))'',$$

式(7)两边同时对 t 求导,可得

$$\alpha_1'\boldsymbol{T}_1+\alpha_1\kappa_1\boldsymbol{N}_1=[\alpha+(\lambda\tau)']'\boldsymbol{T}+(\lambda\kappa)''\boldsymbol{B}+[(\alpha+(\lambda\tau)')\kappa-(\lambda\kappa)'\tau]\boldsymbol{N},$$

经计算,

$$\alpha_1\kappa_1\boldsymbol{N}_1=\left(\frac{(\lambda\kappa)''}{(\lambda\kappa)'}-\frac{\alpha_1'}{\alpha_1}\right)[(\alpha+(\lambda\tau)')\boldsymbol{T}+(\lambda\kappa)'\boldsymbol{B}]+[(\alpha+(\lambda\tau)')\kappa-(\lambda\kappa)'\tau]\boldsymbol{N}。$$

因为 $\boldsymbol{N}_1\perp\boldsymbol{T}_1$,所以$\dfrac{(\lambda\kappa)''}{(\lambda\kappa)'}=\dfrac{\alpha_1'}{\alpha_1}$,从而 $\boldsymbol{N}_1\parallel\boldsymbol{N}$,由定理 3 可知 $\boldsymbol{D}_1\parallel\boldsymbol{D}$。定理 6 得证。

设$(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\nu}):I\to\Delta\subset S^2\times S^2$, $\Delta=\{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\in S^2\times S^2\mid\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0\}$,若$\langle\boldsymbol{\gamma}'(t),\boldsymbol{\nu}(t)\rangle=0$,对所有 $t\in I$ 都成立,则称$(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\nu})$是球面 Legendre 曲线,$\boldsymbol{\gamma}$ 为 frontal,$\boldsymbol{\nu}$ 是 $\boldsymbol{\gamma}$ 的对偶。规定$\boldsymbol{\mu}(t)=\boldsymbol{\gamma}(t)\times\boldsymbol{\nu}(t)$,则$\boldsymbol{\mu}(t)\in S^2$,并且$\langle\boldsymbol{\gamma}(t),\boldsymbol{\mu}(t)\rangle=0$,$\langle\boldsymbol{\nu}(t),\boldsymbol{\mu}(t)\rangle=0$,对所有 $t\in I$ 都成立,称$\{\boldsymbol{\gamma}(t),\boldsymbol{\nu}(t),\boldsymbol{\mu}(t)\}$是沿着 $\boldsymbol{\gamma}(t)$的活动标架[10]。

设$(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\nu}):I\to\Delta$ 是球面 Legendre 曲线,则有

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\gamma}'(t)\\ \boldsymbol{\nu}'(t)\\ \boldsymbol{\mu}'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&m(t)\\0&0&n(t)\\-m(t)&-n(t)&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\gamma}(t)\\ \boldsymbol{\nu}(t)\\ \boldsymbol{\mu}(t)\end{pmatrix},$$

其中 $m(t)=\langle\boldsymbol{\gamma}'(t),\boldsymbol{\mu}(t)\rangle$, $n(t)=\langle\boldsymbol{\nu}'(t),\boldsymbol{\mu}(t)\rangle$,称函数对$(m(t),n(t))$为球面 Legendre 曲线的曲率。

下面通过球面 Legendre 曲线构造一条 Frenet 型达布曲线。

定理 7 若$(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\nu}):I\to\Delta$是曲率为$(m,n)$的球面 Legendre 曲线,假设$\lambda:I\to\mathbf{R}$是光滑函数,$\theta$是非零常数,且$\sin\theta\neq0$, $\boldsymbol{C}\in\mathbf{R}^3$是常向量,则

$$\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(t)=\int(\lambda(t)m(t))'\boldsymbol{\nu}(t)\mathrm{d}t+\cot\theta\int(\lambda(t)m(t))'\boldsymbol{\gamma}(t)\mathrm{d}t+\boldsymbol{C}$$

是一条 Frenet 型达布曲线。

证明 设$\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(t)=\int(\lambda(t)m(t))'\boldsymbol{\nu}(t)\mathrm{d}t+\cot\theta\int(\lambda(t)m(t))'\boldsymbol{\gamma}(t)\mathrm{d}t+\boldsymbol{C}$,两边对$t$求导,得

$$\tilde{\boldsymbol{\gamma}}'(t)=\frac{(\lambda(t)m(t))'}{\sin\theta}(\sin\theta\boldsymbol{\nu}(t)+\cos\theta\boldsymbol{\gamma}(t)),$$

可知$\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(t)$是 Frenet 型标架基曲线。定义$\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(t)$的速度函数是$\tilde{\alpha}(t)=\dfrac{(\lambda(t)m(t))'}{\sin\theta}$, $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(t)$的单位切向量是

$$\tilde{\boldsymbol{T}}(t)=\sin\theta\boldsymbol{\nu}(t)+\cos\theta\boldsymbol{\gamma}(t),$$

上式两边同时对t求导,得

$$\tilde{\kappa}(t)\tilde{\boldsymbol{N}}(t)=(\sin\theta n(t)+\cos\theta m(t))\boldsymbol{\mu}(t)。$$

令$\tilde{\kappa}(t)=\sin\theta n(t)+\cos\theta m(t)$,此时$\tilde{\boldsymbol{N}}(t)=\boldsymbol{\mu}(t)$, $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$的主法向量继续对$t$求导,可得

$$\tilde{\tau}(t)=\cos\theta n(t)-\sin\theta m(t),\quad \tilde{\boldsymbol{B}}(t)=\sin\theta\boldsymbol{\gamma}(t)-\cos\theta\boldsymbol{\nu}(t),$$

从而

$$\sin\theta[\tilde{\alpha}(t)+(\lambda(t)\tilde{\tau}(t))']-\cos\theta(\lambda(t)\tilde{\kappa}(t))'=0,$$

由定理 6 可知$\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$是一条 Frenet 型达布曲线。定理 7 得证。

定理 8 标架螺线是 Frenet 型达布曲线。

证明 设$\boldsymbol{\gamma}:I\to\mathbf{R}^3$是标架螺线,$\{\boldsymbol{T}(t),\boldsymbol{N}(t),\boldsymbol{B}(t)\}$是$\boldsymbol{\gamma}(t)$的 Frenet 型标架,$\alpha(t)$是$\boldsymbol{\gamma}(t)$的速度函数且$\boldsymbol{\gamma}(t)$的曲率、挠率满足$\tau(t)/\kappa(t)=C$($C$为非零常数)。考虑曲线

$$\boldsymbol{\gamma}_1(t)=\boldsymbol{\gamma}(t)+\lambda(t)(\tau(t)\boldsymbol{T}(t)+\kappa(t)\boldsymbol{B}(t)),$$

其中$\lambda(t)=1/C\kappa(t)$,上式对t求导,得$\boldsymbol{\gamma}_1'(t)=\alpha(t)\boldsymbol{T}(t)$,从而$\boldsymbol{\gamma}_1$是 Frenet 型标架基曲线。记$\boldsymbol{\gamma}_1$的速度函数$\alpha_1(t)=\varepsilon\alpha(t)$,$\boldsymbol{\gamma}_1$的单位切向量$\boldsymbol{T}_1(t)=\varepsilon\boldsymbol{T}(t)$,其中$\varepsilon=\pm1$,$\boldsymbol{\gamma}_1$的单位切向量对$t$求导,得$\kappa_1(t)\boldsymbol{N}_1(t)=\varepsilon\kappa(t)\boldsymbol{N}(t)$,从而$\boldsymbol{N}_1(t)\parallel\boldsymbol{N}(t)$。由定理 3 可知,$\boldsymbol{\gamma}_1$与$\boldsymbol{\gamma}$的达布向量平行,即$\boldsymbol{\gamma}_1$与$\boldsymbol{\gamma}$是一对 Frenet 型达布曲线。定理 8 得证。

定理 9 标架从切曲线是 Frenet 型达布曲线。

证明 设标架从切曲线$\boldsymbol{\gamma}(t)=\lambda(t)\boldsymbol{T}(t)+\mu\boldsymbol{B}(t)$,两边同时对$t$求导,可得

$$\alpha(t)\boldsymbol{T}(t)=\lambda'(t)\boldsymbol{T}(t)+(\lambda(t)\kappa(t)-\mu\tau(t))\boldsymbol{N}(t),$$

从而$\lambda(t)\kappa(t)-\mu\tau(t)=0$,即$\tau(t)=\lambda(t)\kappa(t)/\mu$。根据定理 2,假设$\boldsymbol{\gamma}$是 Frenet 型标架基曲线$\boldsymbol{\beta}:I\to\mathbf{R}^3$的中心轨迹,即$\boldsymbol{\gamma}(t)=\boldsymbol{D}_\beta(t)$,而$\boldsymbol{\gamma}$的达布向量为

$$\boldsymbol{D}(t)=\tau(t)\boldsymbol{T}(t)+\kappa(t)\boldsymbol{B}(t)=\frac{\kappa(t)}{\mu}(\lambda(t)\boldsymbol{T}(t)+\mu\boldsymbol{B}(t)),$$

从而可知$\boldsymbol{D}(t)\parallel\boldsymbol{D}_\beta(t)$。故得证。

例 1 设$\boldsymbol{\gamma}:[0,2\pi)\to S^2\subset\mathbf{R}^3$是一条球状肾形线,$\boldsymbol{\gamma}(t)=(x(t),y(t),z(t))$,其中

$$\begin{cases}x(t)=\dfrac{3}{4}\cos t-\dfrac{1}{4}\cos 3t,\\ y(t)=\dfrac{3}{4}\sin t-\dfrac{1}{4}\sin 3t,\\ z(t)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos t,\end{cases}$$

可得$\boldsymbol{\gamma}$的单位切向量为$\boldsymbol{T}(t)=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}\cos2t,\sqrt{3}\sin2t,-1)$,且$\boldsymbol{\gamma}$的速度函数为$\alpha(t)=\sqrt{3}\sin t$。进一步地计算可得

$$N(t)=(-\sin 2t,\cos 2t,0),\quad B(t)=\frac{1}{2}(\cos 2t,\sin 2t,\sqrt{3}),$$

并且曲率 $\kappa(t)=\sqrt{3}$,挠率 $\tau(t)=-1$,由此可知曲线 $\boldsymbol{\gamma}$ 是一条标架螺线。现构造另一条曲线,设曲线

$$\boldsymbol{\gamma}_1(t)=\boldsymbol{\gamma}(t)-\sqrt{3}\cos t(\tau(t)\boldsymbol{T}(t)+\kappa(t)\boldsymbol{B}(t)),$$

经计算,

$$\boldsymbol{\gamma}_1'(t)=3\sin t\left(\frac{1}{2}\cos 2t,\frac{1}{2}\sin 2t,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)。$$

令 $\boldsymbol{\gamma}_1$ 的速度函数为 $\alpha_1(t)=3\sin t$, $\boldsymbol{\gamma}_1$ 的单位切向量为

$$\boldsymbol{T}_1(t)=\frac{1}{2}(\cos 2t,\sin 2t,\sqrt{3}),$$

进一步求导,可得 $\boldsymbol{T}_1'(t)=(-\sin 2t,\cos 2t,0)=\kappa_1(t)\boldsymbol{N}_1(t)$。由定理 3 可知,曲线 $\boldsymbol{\gamma}$ 是 Frenet 型达布曲线,$\boldsymbol{\gamma}_1$ 是 $\boldsymbol{\gamma}$ 的 Frenet 型达布侣线,如图 1 所示。

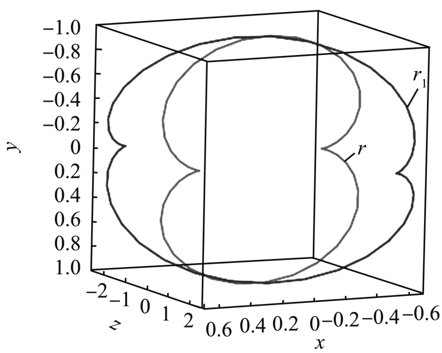

图 1　球状肾形线及其 Frenet 型达布侣线

Fig.1　The spherical nephroid and its Frenet type Darboux mate

参考文献:

[1] DOCARMO M P. Differential geometry of curves and surfaces[M]. New Jerse: Prentice-Hall, 1976:1-22.

[2] 于延华,杨云,刘会立. 三维欧氏空间中的达布曲线[J]. 沈阳师范大学学报(自然科学版),2013,31(4):503-508.
YU Yanhua, YANG Yun, LIU Huili. Darboux curves in 3-dimensional Euclidean space[J]. Journal of Shenyang Normal University(Natural Science), 2013, 31(4):503-508.

[3] HONDA S, TAKAHASHI M. Framed curves in the Euclidean space[J]. Advances in Geometry, 2016, 16(3):265-276.

[4] HONDA S. Rectifying developable surfaces of framed base curves and framed helices[J]. Advanced Studies in Pure Mathematics, 2018, 78:273-292.

[5] HONDA S, TAKAHASHI M. Bertrand and Mannheim curves of framed curves in the 3-dimensional Euclidean space[J]. Turkish Journal of Mathematics, 2020, 44(3):883-899.

[6] HUANG Jie, PEI Donghe. Singular special curves in 3-space forms[J]. Mathematics, 2020, 8(5):846.

[7] LI Yanlin, LIU Siyao, WANG Zhigang. Tangent developables and Darboux developables of framed curves[J]. Topology and its Applications, 2021, 301(SI):107526.

[8] WANG Yongqiao, PEI Donghe, GAO Ruimei. Generic properties of framed rectifying curves[J]. Mathematics, 2019, 7(1):37.

[9] CHEN B Y, DILLEN F. Rectifying curves as centrodes and extremal curves[J]. Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica, 2005, 33(2):77-90.

[10] LI Yanlin, PEI Donghe, TAKAHASHI M, et al. Envelopes of Legendre curves in the unit spherical bundle over the unit sphere[J]. Quarterly Journal of Mathematics, 2018, 69(2):631-653.

(编辑:陈丽萍)