山东大学学报(理学版)2025 年 2 月 第 60 卷 第 2 期
Journal of Shandong University(Natural Science), Vol.60, No.2, 2025

E-mail:xblxb@sdu.edu.cn
http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn
Tel:+86-531-88366917

文章编号:1671-9352(2025)02-0009-05　　DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.132

余剩余格的相对极大理想

张亚宁,姚卫*
(南京信息工程大学数学与统计学院, 江苏 南京 210044)

摘要: 在余剩余格中引入了相对极大理想的概念,研究了相对极大理想、素理想和理想的性质及其相互关系,给出了余剩余格的理想格成为空间式 frame 的一个充分条件。

关键词:余剩余格;相对极大理想;理想格;空间式 frame
中图分类号:O153.1　　**文献标志码**:A
引用格式:张亚宁,姚卫.余剩余格的相对极大理想[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(2):9-13.

Relatively maximal ideals of co-residuated lattices

ZHANG Yaning, YAO Wei*
(School of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, Jiangsu, China)

Abstract: A concept of relatively maximal ideals of co-residuated lattices is introduced, and the properties and the relationships among relatively maximal ideals, prime ideals and ideals are studied. A sufficient condition of the ideal lattice of a co-residuated lattice to be a spatial frame is obtained.

Key words: co-residuated lattice; relatively maximal ideal; ideal lattice; spatial frame

0 引言

剩余格是诸多逻辑代数的公共模型,是基于逻辑“且”和“蕴含”的逻辑代数,在关系型模糊结构的研究中具有重要作用。余剩余格是剩余格的对偶性形式,是基于逻辑“且非”和“或”的逻辑代数[1-2],在模糊拓扑学、模糊粗糙集理论和模糊形式概念分析中有重要应用[3-5]。

在代数系统的结构问题和分类问题的研究中,一些特殊子结构具有重要作用,如群的正规子群、环的理想、格的理想和滤子等。其中相对极大理想(或滤子)是介于素理想(或滤子)和极大理想(或素滤子)之间的一种特殊子结构,也是拓扑空间中邻域系的一种对偶形式的推广。文献[6]首次在环论中引入了相对极大理想的概念,随后被推广到半群和半环等的研究中[7-8]; 文献[9]首次在 BCK-代数中引入相对极大理想的概念,随后被推广到其他逻辑代数中[10-11]; 文献[12-13]分别在分配格和条件交半格中引入相对极大滤子的概念,并研究了它在 Domain 结构中的应用; 文献[14]定义了关于 BCK-代数中子集的相对极大理想。

众所周知,分配格的全体理想构成的集族是一个空间式 frame,即由交素元生成的完备格。文献[15]通过引入相对极大理想的概念给出了该结论的一种新证明,文献[16]研究了剩余格的滤子格成为空间式 frame 的条件。

收稿日期:2023-04-04; **网络出版时间**:2024-03-04 12:11:29
基金项目:国家自然科学基金资助项目(12371462,12231007); 江苏省“双创人才”支持计划资助项目(JSSCRC2021521)
第一作者:张亚宁(1999—),男,硕士研究生,研究方向为序代数. E-mail:zynzyn18451655472@163.com
* **通信作者**:姚卫(1979—),男,博士,教授,研究方向为拓扑. E-mail:yaowei@nuist.edu.cn

本文将在余剩余格中引入相对极大理想的概念,研究相对极大理想、素理想和理想的性质及其相互关系,研究余剩余格的理想格构成空间式 frame 的条件。

1　预备知识

定义 1[1]　设 L 是一个有界格,0、1 分别为最小元和最大元,若 L 满足:

(1) L 上有伴随对($\ominus,\oplus$),即 $c\ominus b\leqslant a$ 当且仅当 $c\leqslant a\oplus b$ ($\forall a,b,c\in L$);

(2) ($L,\oplus,0$)是交换幺半群,

则称 L 为余剩余格,有时也将 L 记作($L,\ominus,\oplus$)。

例 1　(1)设 $L=([0,1],\leqslant)$,令 $a\ominus b=\max\{a-b,0\}$, $a\oplus b=\min\{a+b,1\}$ ($\forall a,b\in L$),则($L,\ominus,\oplus$)是余剩余格。

(2) 设 L 是一个 Boole 代数,令 $a\ominus b=a\wedge\neg b$, $a\oplus b=a\vee b$ ($\forall a,b\in L$),则($L,\ominus,\oplus$)是余剩余格。

(3) 设 $L=\{0,a,b,c,1\}$,其格结构如图 1 所示,定义二元运算$\ominus,\oplus$如图 2、3 所示,则($L,\ominus,\oplus$)是余剩余格。

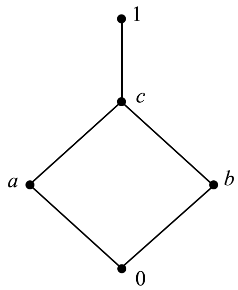

图 1　格 L 的结构
Fig.1　Structure of lattice L

$\ominus$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	a	0	a	0	0
b	b	b	0	0	0
c	c	b	a	0	0
1	1	1	1	1	0

图 2　$\ominus$运算表
Fig.2　Optotable of $\ominus$

$\oplus$	0	a	b	c	1
0	0	a	b	c	1
a	a	a	c	c	1
b	b	c	b	c	1
c	c	c	c	c	1
1	1	1	1	1	1

图 3　$\oplus$运算表
Fig.3　Optotable of $\oplus$

(4) 每个余 Frame L 都是余剩余格,其中 $a\ominus b=\{x\in L\mid a\leqslant x\vee b\}$, $a\oplus b=a\vee b$ ($\forall a,b\in L$)。

命题 1[15]　设 L 是一个余剩余格,则对于任意的 $a,b,c\in L$,有:

(1) $a\vee b\leqslant a\oplus b$; (2) $(b\vee c)\ominus a=(b\ominus a)\vee(c\ominus a)$;

(3) $c\ominus(a\wedge b)=(c\ominus a)\vee(c\ominus b)$; (4) $a\oplus(b\wedge c)=(a\oplus b)\wedge(a\oplus c)$;

(5) $a=a\ominus 0$; (6) $b\leqslant a$ 当且仅当 $b\ominus a=0$。

定义 2[17]　设 L 是一个余剩余格,$\varnothing\neq A\subseteq L$,如果 (I1) A 是 L 的下集,即 $a\leqslant b\in A$ 蕴含 $a\in A$;(I2) A 对$\oplus$封闭,即 $a,b\in A$ 蕴含 $a\oplus b\in A$,则称 A 是 L 的一个理想。如果 A 是 L 的理想且是真子集,则称 A 是 L 的真理想。

命题 2[17]　设 L 是一个余剩余格,A 是 L 的非空子集,则下列各条等价:

(1) A 是一个理想;

(2) $0\in A$ 且对于任意的 $a,b\in L$, $b\in A$,有 $b\ominus a\in A$ 蕴含 $b\in A$;

(3) A 对$\oplus$封闭,且对于任意的 $a\in A$, $b\in L$,有 $a\wedge b\in A$。

将 L 的全体理想构成的集族记为 $\mathrm{Idl}(L)$,则 $\mathrm{Idl}(L)$ 在包含序下构成完备格,其最大元与最小元分别为 L 和$\{0\}$,且对于任意的$\{A_i\mid i\in I\}\subseteq\mathrm{Idl}(L)$,有

$$\wedge_i A_i=\cap_i A_i,\quad \vee_i A_i=\{x\in L\mid \exists a_1,a_2,\cdots,a_n\in\cup_i A_i \text{ s.t. } x\leqslant a_1\oplus a_2\oplus\cdots\oplus a_n,\ n\in\mathbf{N}\}。$$

易得,$A_1\wedge A_2=\{a\wedge b\mid a\in A_1,\ b\in A_2\}$, $A_1\vee A_2=\{c\in L\mid \exists a\in A_1,\ b\in A_2 \text{ s.t. } c\leqslant a\oplus b\}$。

设 S 是 L 的一个非空子集,称包含 S 的最小理想为 S 的生成理想,记作$\langle S\rangle$:

$$\langle S\rangle=\{x\in L\mid \exists a_1,a_2,\cdots,a_n\in S \text{ s.t. } x\leqslant a_1\oplus a_2\oplus\cdots\oplus a_n,\ n\in\mathbf{N}\}。$$

当 S 为单点集$\{x\}$时,将$\langle\{x\}\rangle$记为$\langle x\rangle$。

定义 3[18]　设 L 是一个完备格,如果对于任意的 $a\in L$ 和 $S\subseteq L$,有 $a\wedge(\vee S)=\bigvee_{s\in S}(a\wedge s)$,称 L 为 frame。

设 L 是一个格,$a\in L$ 不是最大元,若对于任意的 $x,y\in L$, $x\wedge y\leqslant a$ 蕴含 $x\leqslant a$ 或 $y\leqslant a$,则称 a 为 L 的交素元(有些文献中并不要求交素元不是最大元,并且将交素元称为素元。因为交素元在格论是全集的生成子集,而最大元本身可由空子集取交直接得到,所以从定义中就排除交素元最大元[18])。本文记 $M(L)$ 为格 L 的全体交素元之集。设 L 是一个完备格,$S\subseteq L$,如果对于任意的 $x\in L$ 都有 $x=\bigwedge(S\cap\uparrow x)$,则称 S 为 L 的交生成集。

定义 4[18]　设 L 是一个 frame,如果 $M(L)$ 是 L 的交生成集,则将 L 称为空间式 frame。

空间式 frame 的概念来源于 Locale 理论[19]。可以证明:一个完备格是空间式 frame 当且仅当它同构于某拓扑空间的开集格,且如果 $M(L)$ 是完备格 L 的交生成集,则 L 是 frame。

2　余剩余格的相对极大理想

本章引入相对极大理想的概念,以获取余剩余格的理想格构成空间式 frame 的条件。

命题 3　设 L 是一个余剩余格,则对于任意的 $a,b,c,d\in L$ 都有

(1) $a\wedge(b\oplus c)\leqslant b\oplus(a\wedge c)$;

(2) $(a\oplus b)\wedge(c\oplus d)\leqslant(a\oplus c)\oplus(b\wedge d)$。

证明　(1) $b\oplus(a\wedge c)=(b\oplus a)\wedge(b\oplus c)\geqslant(0\oplus a)\wedge(b\oplus c)=a\wedge(b\oplus c)$。

(2) 反复运用(1),有 $(a\oplus b)\wedge(c\oplus d)\leqslant c\oplus((a\oplus b)\wedge d)\leqslant c\oplus(a\oplus(d\wedge b))=(a\oplus c)\oplus(b\wedge d)$。

本文记 $x\oplus x\oplus\cdots\oplus x=nx$,在一些余剩余格(如例 1(1,2,3,4))中有下面条件成立:

(S) 对于任意的 $x,y\in L$, $n,m\in\mathbf{N}$, $q\in\mathbf{N}$, 使得 $nx\wedge my\leqslant q(x\wedge y)$。

命题 4　设 L 是一个余剩余格,则 L 满足条件(S)当且仅当 $\langle a\rangle\cap\langle b\rangle=\langle a\wedge b\rangle$ ($\forall a,b\in L$)。

证明　*必要性*　只要证 $\langle a\rangle\cap\langle b\rangle\subseteq\langle a\wedge b\rangle$。事实上,设 $x\in\langle a\rangle\cap\langle b\rangle$,则存在 $n,m\in\mathbf{N}$ 使得 $x=na=mb$,于是存在 $q\in\mathbf{N}$ 使得 $x=na\wedge mb\leqslant q(a\wedge b)$,故 $x\in\langle a\wedge b\rangle$,得证。

充分性　令 $q=m+n$,则对于任意的 $x,y\in L$,以及任意的 $m,n\in\mathbf{N}$,有

$$\langle nx\wedge my\rangle=\langle nx\rangle\wedge\langle my\rangle\subseteq\langle qx\rangle\wedge\langle qy\rangle=\langle qx\wedge qy\rangle=\langle q(x\wedge y)\rangle,$$

从而 $nx\wedge my\leqslant q(x\wedge y)$。

定义 5　设 A 是余剩余格 L 的一个真理想,则

(1) A 称为素理想,如果对于任意的 $x,y\in L$, $x\wedge y\in A$ 蕴含 $x\in A$ 或 $y\in A$;

(2) A 称为关于 x 的相对极大理想,如果 A 在不包含 x 的理想中极大,即 $x\notin A\in\mathrm{Idl}(L)$ 且 $A\subseteq J\in\mathrm{Idl}(L)$ 蕴含 $A=J$ 或 $x\in J$。

命题 5　设 L 是一个余剩余格,则

(1) L 的素理想都是 $\mathrm{Idl}(L)$ 中的交素元;

(2) 当 L 满足条件(S)时, $\mathrm{Idl}(L)$ 中的交素元都是 L 的素理想;

(3) 当 L 满足条件(S)时,每个相对极大理想都是素理想。

证明　(1) 设 A 是 L 的一个素理想, $A_1\cap A_2\subseteq A$ 但 $A_1\not\subseteq A$,则存在 $a\in A_1$ 使得 $a\notin A$。对于任意的 $b\in A_2$,有 $a\wedge b\in A_1\cap A_2\subseteq A$,从而 $b\in A$,故 $A_2\subseteq A$,因此,A 是 $\mathrm{Idl}(L)$ 中的交素元。

(2) 设 L 满足条件(S)且 A 是 $\mathrm{Idl}(L)$ 的一个交素元,如果 $a\wedge b\in A$,那么 $\langle a\rangle\cap\langle b\rangle=\langle a\wedge b\rangle\subseteq A$,于是 $\langle a\rangle\subseteq A$ 或 $\langle b\rangle\subseteq A$,从而 $a\in A$ 或 $b\in A$,因此,A 是素理想。

(3) 设 A 是关于 a 的相对极大理想,若 A 不是素理想,则存在 $b,c\in A$ 使得 $b\notin A$, $c\notin A$ 但 $b\wedge c\in A$。定义 A_1、A_2 如下:

$$A_1=\{x\in L\mid\exists y\in A,\ n\in\mathbf{N}\ \text{s.t.}\ x\leqslant y\oplus nb\},\qquad A_2=\{x\in L\mid\exists y\in A,\ m\in\mathbf{N}\ \text{s.t.}\ x\leqslant y\oplus mc\}。$$

易见 A_1、A_2 都是 L 的理想且都真包含 A,只须要证明 $a\notin A_1$ 或 $a\notin A_2$,即可得到与 A 的极大性矛盾。假设 $a\in A_1\cap A_2$,则存在 $y_1,y_2\in A$, $n,m\in\mathbf{N}$ 使得 $a\leqslant y_1\oplus nb$, $a\leqslant y_2\oplus mc$。由条件(S),存在 $q\in\mathbf{N}$ 使得 $nb\wedge mc\leqslant q(b\wedge c)$。令 $y=y_1\oplus y_2$,则 $y\in A$ 且

$$a\leqslant(y_1\oplus nb)\wedge(y_2\oplus mc)\leqslant(y_1\oplus y_2)\oplus(nb\wedge mc)\leqslant y\oplus q(b\wedge c)。$$

由 $y, b\wedge c\in A$ 得 $a\in A$,矛盾。

设 L 是一个余剩余格,$a\in L$,若对于任意的 $x, y\in L$, $a\leqslant x\oplus y$ 蕴含 $a\leqslant x$ 或 $a\leqslant y$,则称 a 为 L 的$\oplus$-素元。

命题 6 设 L 是一个余剩余格, $a\in L$ 是$\oplus$-素元,则关于 a 的相对极大理想有且只有一个。

证明 设 a 是 L 的一个$\oplus$-素元, A_1、A_2 是关于 a 的 2 个不同相对极大理想,则有 $a\in A_1\vee A_2$,于是存在 $x\in A_1$, $y\in A_2$使得 $a\leqslant x\oplus y$,从而 $a\leqslant x$ 或 $a\leqslant y$,即 $a\in A_1$或 $a\in A_2$,矛盾。

下面讨论相对极大理想的一些性质及其等价刻画。

命题 7 设 L 是一个余剩余格,A 是 L 的一个理想,则对于任意的 $a\notin A$,存在关于 a 的相对极大理想 A_a 使得 $A\subseteq A_a$。

证明 令 $\mathscr{T}=\{I\in \mathrm{Idl}(L)\mid a\notin I\supseteq A\}$,则由 $A\in\mathscr{T}$ 易知 $\mathscr{T}$ 非空且在集合的包含序下构成偏序集。设$\{I_k\mid k\in K\}$是 $\mathscr{T}$ 的一个非空链,易见$\cup_k \mathscr{T}_k$是$\{I_k\mid k\in K\}$在 $\mathscr{T}$ 中的一个上界。由 Zorn 引理知,$\mathscr{T}$ 有一个极大元,记为 A_a,易证 A_a 是一个关于 a 的相对极大理想且 $A\subseteq A_a$。

命题 8 设 L 是一个余剩余格,则 L 的每个真理想都可以表示为一些相对极大理想的交。

证明 设 A 是一个真理想,则对于任意的 $x\notin A$,存在关于 x 的相对极大理想 A_x 使得 $A\subseteq A_x$,即 $A\subseteq \bigcap\limits_{x\notin A} A_x$。对于任意的 $x\notin A$,则 $x\notin A_x$,即 $\bigcap\limits_{x\notin A} A_x\subseteq A$,因此 $A=\bigcap\limits_{x\notin A} A_x$。

定理 1 设 L 是一个余剩余格,如果 L 满足条件(S),则 $\mathrm{Idl}(L)$是一个空间式 frame。

证明 由命题 8 知,$\mathrm{Idl}(L)$可由相对极大理想交生成;由命题 5(1)、(3)知,当 L 满足条件(S)时,L 的相对极大理想是 $\mathrm{Idl}(L)$的交素元,故 $\mathrm{Idl}(L)$可由交素元生成,即 $\mathrm{Idl}(L)$是空间式 frame。

接下来,我们研究理想成为相对极大理想的充要条件。

定理 2 设 L 是一个余剩余格,则真理想 A 是相对极大理想当且仅当对于任意$\{A_k\mid k\in K\}\subseteq \mathrm{Idl}(L)$,只要 $A=\bigcap\limits_{k\in K}A_k$,必存在$k_0\in K$ 使得 $A=A_{k_0}$。

证明 *必要性* 设 A 是关于 x 的相对极大理想,且 $A=\bigcap\limits_{k\in K}A_k$,由于 $x\notin A=\bigcap\limits_{k\in K}A_k$,必存在$k_0\in K$ 使得 $x\notin A_{k_0}\supseteq A$,且 A 是 x 的相对极大理想,因此 $A=A_{k_0}$。

充分性 由定理 1 可知,$I=\bigcap\limits_{x\notin I}I_x$,其中 I_x 是关于 x 的某一个相对极大理想。由条件知,$I=I_x$ 是相对极大理想。

定理 3 设 A 是余剩余格 L 的一个理想,$x\notin A$,则下列各条等价:

(1) A 是关于 x 的相对极大理想;

(2) 对于任意的 $y\notin A$ 和任意的 $n\in N$ 都有 $x\ominus ny\in A$;

(3) 对于任意的 $y\notin A$ 都有 $x\ominus y\in A$。

证明 (1)$\Rightarrow$(2)。设 A 是关于 x 的相对极大理想,$y\notin A$,则 $x\in\langle A\cup\{y\}\rangle$,从而有 $a\in A$, $n\in\mathbf{N}$ 使得 $x\leqslant a\oplus ny$,即 $x\ominus ny\leqslant a$,于是 $x\ominus ny\in A$。

(2)$\Rightarrow$(3)显然。

(3)$\Rightarrow$(1)。由 $x\notin A$ 知,存在关于 x 的相对极大理想 A_x 使得 $x\notin A_x\supseteq A$。若 $A_x\neq A$,则 $y\in A_x-A$,于是 $x\ominus y\in A\subseteq A_x$,故 $x\in A_x$,矛盾。

命题 9 设 A 是关于 x 的相对极大理想,则对于任意的 $y\in A$ 和任意的 $n\in N$ 都有 $x\ominus ny\notin A$。

证明 设 $y\in A$,若 $x\ominus ny\notin A$,则由命题 2 可知,$x\in A$,这与 A 是关于 x 的相对极大理想矛盾。

参考文献:

[1] 郑慕聪. 余剩余格及其应用[D]. 西安:陕西师范大学,2005.
ZHENG Mucong. Co-residuated lattices with applications[D]. Xi'an: Shaanxi Normal University, 2005.

[2] 郑慕聪,王国俊. 余剩余格及其应用[J]. 模糊系统与数学,2005,19(4):7-12.
ZHENG Mucong, WANG Guojun. Co-residuated lattice and application[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2005, 19(4): 7-12.

[3] OH Ju Mok, KIM Yong Chan. Approximation operators and fuzzy rough sets in coresiduated lattices[J]. Korean Journal of Mathematics, 2021, 29(1):81-89.

[4] OH Ju Mok, KIM Yong Chan. Various fuzzy connections and fuzzy concepts in complete co-residuated lattices[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2022, 142(12):451-468.

[5] QIAO Junsheng, HU Baoqing. On (⊙, &)-fuzzy rough sets based on residuated and co-residuated lattices[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2018, 336(7):54-86.

[6] 杨闻起. 环的次极大理想[J]. 纯粹数学与应用数学,2003,19(1):88-90.
YANG Wenqi. Submaximal ideal of the ring[J]. Pure and Applied Mathematics, 2003, 19(1):88-90.

[7] 陈露. 半群的次极大理想与次极小理想[J]. 数学理论与应用,2005,25(3):107-110.
CHEN Lu. Submaximal ideal and subminimal ideal of semigroup[J]. Mathematical Theory and Applications, 2005, 25(3):107-110.

[8] 欧启通. 半环的次极大理想[J]. 广西民族大学学报,2008,14(3):50-53.
OU Qitong. Submaximal ideal of semiring[J]. Journal of Guangxi University for Nationalities, 2008, 14(3):50-53.

[9] 杨闻起. BCK-代数的次极大理想[J]. 西南师范大学学报,2004,29(1):38-40.
YANG Wenqi. Submaximal ideal of the BCK-alagebra[J]. Journal of Southwest China Normal University, 2004, 29(1):38-40.

[10] 李小杰,吴洪博. BR_0 代数的次极大⊗滤子[J]. 云南师范大学学报,2008,28(4):10-12.
LI Xiaojie, WU Hongbo. Submaximal ⊗ filter of the BR_0 algebra[J]. Journal of Yunnan Normal University, 2008, 28(4):10-12.

[11] 姚卫. Heyting 代数中滤子与同构定理及其范畴 Heyt[D]. 西安:陕西师范大学,2005.
YAO Wei. Filters and isomorphism theorems in Heyting algebra and its category Heyt[D]. Xi'an: Shaanxi Normal University, 2005.

[12] 刘德贤,卢涛,陈英. 条件并半格上的相对极大理想[J]. 吉林师范大学学报(自然科学版),2012,33(3):26-27.
LIU Dexian, LU Tao, CHEN Ying. Relative maximal ideals in conditional join-semilattices[J]. Jilin Normal University Journal(Natual Science Edition), 2012, 33(3):26-27.

[13] 路玲霞,王群. 条件交半格中的相对极大滤子[J]. 模糊系统与数学,2011,25(2):66-70.
LU Lingxia, WANG Qun. Relative maximal filters in conditional semilattices[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2011, 25(2):66-70.

[14] 陈露,蒲义书. BCK-代数中子集的次极大理想[J]. 纯粹数学与应用数学,2007,23(3):361-365.
CHEN Lu, PU Yishu. Subset's submaximum ideal of the BCK-algebra[J]. Pure and Applied Mathematics, 2007, 23(3):361-365.

[15] 路玲霞,姚卫. 分配格的滤子格是空间式 frame 的新证明[J]. 模糊系统与数学,2007,21(4):43-46.
LU Lingxia, YAO Wei. A new proof for the filter-lattice of a distributive lattice to be a spatial frame[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2007, 21(4):43-46.

[16] 路玲霞,毕建芝. 剩余格的滤子格成为空间式 frame 的若干充要条件[C]// 中国系统工程学会模糊数学与模糊系统专委会第十三届年会. 西安:陕西师范大学出版社,2006:115-118.
LU Lingxia, BI Jianzhi. Some equivalent conditions for the filter-lattice of a residuated lattice to be a spatial frame[C]// The 13th Annual Conference of Fuzzy Mathematics and Systems Association of the Systems Engineering Society of China, Xi'an: Shaanxi Normal University Publishing House Co., Ltd., 2006:115-118.

[17] 王国俊,郑慕聪,刘艳. 余剩余格的理想和嵌入定理[J]. 陕西师范大学学报(自然科学版),2006,34(4):1-6.
WANG Guojun, ZHENG Mucong, LIU Yan. Ideals and embedding theorem of co-residuated lattices[J]. Journal of Shaanxi Normal University(Natural Science Edition), 2006, 34(4):1-6.

[18] 姚卫,路玲霞. 序与格论基础[M]. 北京:清华大学出版社,2023.
YAO Wei, LU Lingxia. Fundamentals of order and lattice theory[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2023.

[19] 郑崇友,樊磊,崔宏斌. Frame 与连续格[M]. 北京:首都师范大学出版社,1994.
ZHENG Chongyou, FAN Lei, CUI Hongbin. Frame and continuous lattice[M]. Beijing: Capital Normal University Press, 1994.

(编辑:陈丽萍)