

# 基于MCMC模型的利率随机波动率分析

韩琦,夏鑫洲

(西北师范大学数学与统计学院,甘肃兰州730070)

**摘要:**目前关于利率波动率指数的研究是在利率衍生品价格模型的基础上构造的,为了进一步扩展利率隐含波动率指数的应用范围,在利率波动模型的基础上研究收益率数据信息中隐含的随机波动率的性质。基于2021年1月至2023年2月的国债收益率数据,通过马尔可夫链蒙特卡罗(Markov chain Monte Carlo, MCMC)模型对收益率数据进行建模分析。结果表明:在收益率为基础的利率波动率模型中,长期利率的波动性明显低于短期利率的。本文使用国债收益率作为基础数据,相较于期权市场中的波动率指数,本文的模型不受期权市场上期权种类以及规模的影响,具有更大的适用范围。

**关键词:**利率模型;随机波动率;马尔可夫链蒙特卡罗模型;波动率指数

**中图分类号:**O29; F222.1 **文献标志码:**A

**引用格式:**韩琦,夏鑫洲.基于MCMC模型的利率随机波动率分析[J].山东大学学报(理学版),2025,60(3):33-40.

## Stochastic volatility analysis of interest rate based on MCMC model

HAN Qi, XIA Xinzhou

(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, Gansu, China)

**Abstract:** Currently, researches on the interest rate volatility index are constructed on the basis of the interest rate derivative price model. To further expand the application scope of the implied interest rate volatility index, the properties of the stochastic volatility implied in the yield data information are studied on the basis of the interest rate volatility model. Based on the yield data of government bonds from January 2021 to February 2023, the yield data are modeled and analyzed by the Markov chain Monte Carlo (MCMC) model. The results show that the volatility of the long-term interest rate is significantly lower than that of the short-term interest rate. Because this paper uses the treasury bond yield as the basic data, compared with the volatility index in the option market, the model in this paper is not affected by the type and scale of options in the option market and has a greater range of application.

**Key words:** interest rate model; stochastic volatility; Markov chain Monte Carlo model; volatility index

## 0 引言

为了应对世界经济新挑战,国家提出构建以国内大循环为主体、国内国际双循环相互促进的新发展格局。在现代经济的双循环发展格局中,利率是国内国际双循环交织的关键节点,利率水平的波动也会对宏观经济的发展产生重要影响<sup>[1]</sup>。为了进一步研究和控制利率波动的风险,学者在静态期限结构模型中引入随机过程,得到了动态利率期限结构模型<sup>[2]</sup>。Vasicek<sup>[3]</sup>将瞬时利率作为建模对象,使用随机波动率模型的框架,建立了单因子模型下的利率动态模型。随后,Duffie等<sup>[4]</sup>将因子利率模型统一为仿射模型,同时将波动过程纳入仿射框架中。后来的很多研究都在此基础上完成,如Bikbov等<sup>[5]</sup>、Jacobs等<sup>[6]</sup>讨论了仿射模型中的非跨度随机波动率,Joslin<sup>[7]</sup>、Li等<sup>[8]</sup>讨论了仿射模型的条件波动率。

在利率随机波动率的研究中,Markellos等<sup>[9]</sup>首次将期权市场中构造波动率的方法引入利率中,并构造

收稿日期:2023-04-20;网络出版时间:2024-03-09 10:12:05

基金项目:国家自然科学基金资助项目(62261049,12261080);甘肃省自然科学基金资助项目(20JR10RA085);甘肃省教育厅高等教育创新基金资助项目(2022A-017)

第一作者:韩琦(1978—),教授,博士生导师,博士,研究方向为金融统计。E-mail:hanqi1978@nwnu.edu.cn

了利率隐含波动率指数。期权市场下的波动率指数(恐慌指数)最早由芝加哥期权交易所(Chicago Board Options Exchange, CBOE)推出,利用实物期权的布莱克-斯科尔斯-莫顿(Black-Scholes-Merton, B-S-M)定价公式,通过选取特定种类、特定期限的期权价格得到相应的隐含波动率,进一步通过加权得到相应期权市场的波动率指数。Markellos等<sup>[9]</sup>利用CBOE的利率期权信息以及波动率指数的构造方法,给出了利率波动率指数及其相关性质,很好地体现了不同期限下利率的波动性变化,同时也给出了基于波动率指数的利率风险管理办法,但在实际应用过程中波动率指数却受到很多的限制。首先,利率波动率指数是基于期权衍生品的价格计算得到的,与标的资产利率相比,利率上限等衍生品的价格受到更多其他因素的影响,利率期限结构信息并不能完全解释利率波动率指数的变化<sup>[9]</sup>。此外,利率波动率指数是在利率衍生品的基础上构造的,需要目标市场有完备的利率衍生品市场,但是目前我国的利率衍生品市场还不完善,衍生品种类相对单一,因此该指数不能适用于我国市场。

本文将2021年1月至2023年2月各期限的国债收益率数据用于利率随机波动率分析,相较于利率衍生品价格,标的资产利率的数据信息更能直接反映出利率波动的信息。此外,本文利用国债收益率作为基础数据进行利率波动率分析,相较于文献[9],本文的模型不依赖于利率衍生品市场,因此,基于我国利率衍生品市场的发展现状,本文所使用的模型更适合我国市场的利率波动率分析。

## 1 随机波动模型

本文采用马尔可夫链蒙特卡罗(Markov chain Monte Carlo, MCMC)模型进行建模。在介绍本文模型之前,首先介绍了MCMC建模的基础,即No-U-Turn Sampler(NUTS)采样。关于MCMC模型在利率期限结构建模的具体应用参考文献[10]。

### 1.1 NUTS 采样

在介绍NUTS采样方法前,首先介绍Hamilton Monte Carlo(HMC)采样算法<sup>[11]</sup>。HMC算法是基于Hamiltonian系统的抽样算法,首先为每个模型变量 $\theta_d$ 引入一个辅助动量变量 $r_d$ ,在通常的情况下,这些动量变量 $r_d$ 独立于标准正态分布,所产生的未归一化的联合概率密度为

$$p(\theta_d, r_d) = \exp\left\{\Gamma(\theta_d) - \frac{1}{2}r_d \cdot r_d\right\}, \quad (1)$$

其中: $\Gamma$ 表示模型变量 $\theta_d$ 联合概率密度的对数; $x \cdot y$ 表示 $x$ 和 $y$ 的内积; $\theta_d$ 表示粒子在 $d$ 维空间中的位置; $r_d$ 表示粒子在第 $d$ 维的动量。在物理意义下, $\Gamma$ 是一个依赖位置的负势能函数; $\frac{1}{2}r_d \cdot r_d$ 是粒子的动能; $\log p(\theta_d, r_d)$ 是粒子的负能量。HMC的问题是需要手动设定每次采样的迭代次数,所以需要设定时间步长、迭代次数、速度的分布、初始点的分布,而NUTS首先解决动态设置迭代次数的问题。

NUTS首先引入一个切片变量 $u$ ,其条件分布为

$$p(u | \theta_d, r_d) = U\left(\theta_d; \exp\left\{\Gamma(\theta_d) - \frac{1}{2}r_d \cdot r_d\right\}\right), \quad (2)$$

使得条件分布变为

$$p(\theta_d, r_d | u) = U\left(\theta_d, r_d; \theta'_d, r'_d | \exp\left\{\Gamma(\theta_d) - \frac{1}{2}r_d \cdot r_d\right\} \geq u\right), \quad (3)$$

切片采样步骤并不是严格必要的,但它简化了NUTS的推导和实现过程,因此 $\theta_d, r_d$ 和 $u$ 的联合概率密度为

$$p(\theta_d, r_d, u) = I\left[u \in \left[0, \exp\left\{\Gamma(\theta_d) - \frac{1}{2}r_d \cdot r_d\right\}\right]\right], \quad (4)$$

其中,如果 $I[\cdot]$ 括号内的表达式为真,则 $I[\cdot]$ 为1,否则为0。与标准HMC一样, $\theta_d$ 和 $r_d$ (在 $u$ 上积分)的未归一化边际概率密度是式(1)。只要满足条件 $\exp\left\{\Gamma(\theta_d) - \frac{1}{2}r_d \cdot r_d\right\} \geq u$ ,条件概率 $p(u | \theta_d, r_d)$ 和 $p(\theta_d, r_d | u)$ 就是一致的。

### 1.2 金融随机波动率模型

资产价格具有时变波动性,即在某些时期,资产价格是高度可变的,而在另一些时期则非常稳定。随机

波动率模型通过设置一个随时间变化的波动率变量来解决这一问题。在此使用文献[12]中关于利率波动的模型,将利率的波动率设定为以下随机游走:

$$\begin{cases} v \sim E(0.1), \\ \sigma \sim E(50), \\ s_i \sim N(s_{i-1}, \sigma^2), \\ \log(r_i) \sim t(v, 0, \exp(-2s_i)), \end{cases} \quad (5)$$

其中,  $r$  是由一个自由度参数未知的 Student- $t$  分布和一个潜在过程  $s$  共同影响的日收益率序列, 个体  $s_i$  为潜在对数波动率过程中的个体日对数波动率。由于事先设定了后验概率, 因此使用 MCMC 模型, 模型的计算准确性由采样的均匀程度决定, 可以大大简化问题复杂性。由于 MCMC 模型要进行大量的抽样计算, 因此对计算机速度依赖性强, 而且目前绝大多数随机数发生器均为伪随机数, 会在一定程度上造成计算结果偏差。

## 2 实证分析

本章利用 MCMC 模型和 2021 年 1 月至 2023 年 2 月我国国债收益率数据进行建模分析, 解释利率波动之间的关系。

### 2.1 描述性统计

本文使用 2021 年 1 月至 2023 年 2 月的国债收益率数据中的国债到期收益率, 共计 538 个日收益率。用 30、90、180 d 的到期收益率代表短期利率; 1、3、5 a 的到期收益率代表中期利率; 10、15 和 20 a 的到期收益率代表长期利率。表 1 展示了这些利率的统计特征, 图 1 展示了这些利率的走势。在本文中, 将短期利率模型记为 ts, 中期利率模型记为 tf, 长期利率模型记为 tl。

表 1 国债到期收益率描述性统计  
Table 1 Descriptive statistics for yield to maturity of government bond

期限	均值	标准差	最小值	25%分位数	50%分位数	75%分位数	最大值
30 d	1.676 9	0.266 8	1.126 6	1.499 6	1.709 3	1.843 3	2.787 1
90 d	1.897 0	0.245 5	1.409 5	1.752 7	1.904 2	2.054 8	2.699 9
180 d	2.037 6	0.225 2	1.530 0	1.871 2	2.063 0	2.207 4	2.554 3
1 a	2.185 7	0.250 6	1.690 7	1.998 7	2.192 6	2.347 3	2.715 5
3 a	2.532 9	0.203 7	2.169 6	2.357 1	2.531 1	2.671 0	2.970 6
5 a	2.708 1	0.191 7	2.352 7	2.568 0	2.694 1	2.846 2	3.115 8
10 a	2.897 5	0.170 5	2.580 0	2.785 3	2.851 6	2.978 1	3.283 1
15 a	3.195 8	0.223 5	2.814 3	3.040 1	3.134 6	3.335 8	3.646 3
20 a	3.269 9	0.235 4	2.901 8	3.116 3	3.194 7	3.376 2	3.767 8

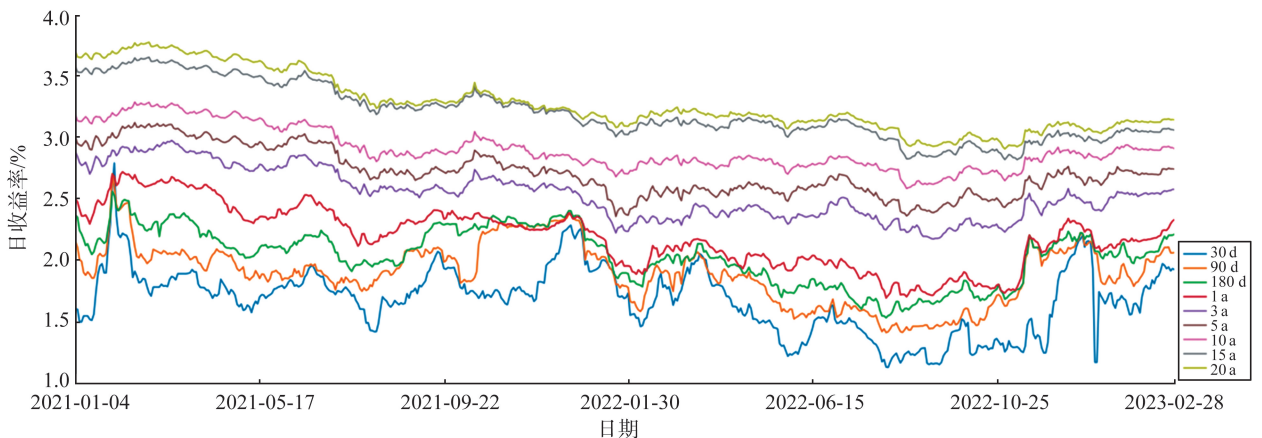


图 1 国债收益率数据趋势图

Fig.1 Trend graph of treasury bond yield

从表 1 中可以初步看出, 中长期到期收益率明显高于短期到期收益率, 短期到期收益率的离散统计量

(标准差、四分位差)均大于中长期到期收益率的离散统计量。图1可以看出,不同利率期限的收益率走势大致相同,但短期利率的波动性大。为了进一步考察不同利率期限之间的波动率差异,图2给出了收益率差分数据的趋势图。为了进一步突出数据波动的区别,将短期、中期和长期到期收益率按相应的期限取平均后再进行差分处理。从图2也可以看出短期利率的波动性比其他期限的波动大。

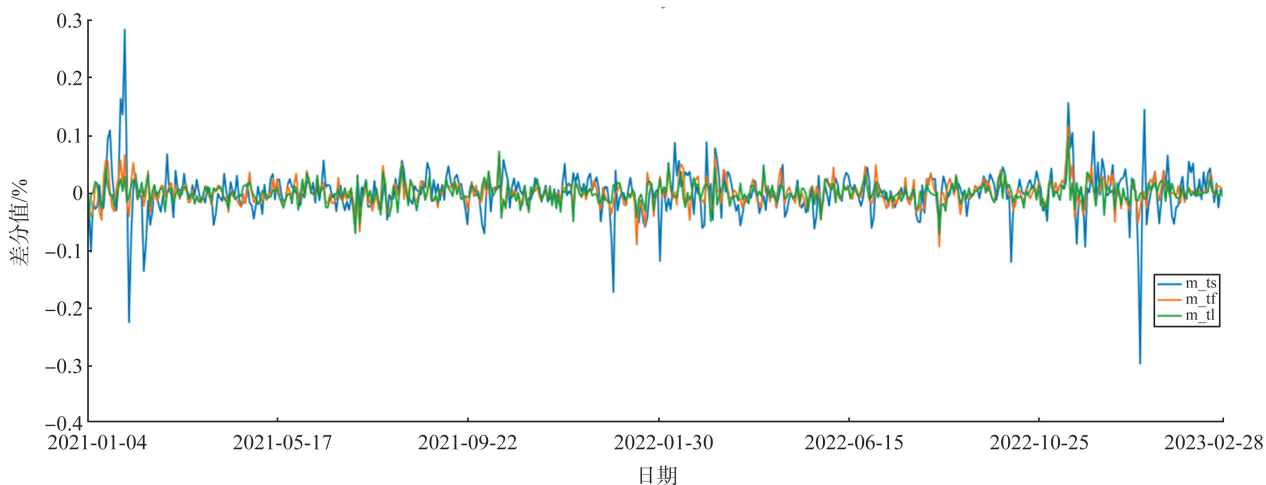


图2 国债收益率差分数据的趋势图

Fig.2 Trend graph of treasury bond yield difference data

## 2.2 随机波动率分析

采用MCMC模型进行抽样分析,分别使用短期利率、中期利率和长期利率的数据进行建模,并比较模型的随机波动率。

表2—4分别给出了短期、中期和长期利率模型的参数结果。模型的具体实现以及代码参考文献[13-15]。

表2 短期利率模型(ts)参数估计结果

Table 2 Estimated parameter values of short-term interest rate model (ts)

参数	均值	方差	区间估计值(3%)	区间估计值(97%)	MCSE_mean	MCSE_sd
$s_{ts}$	3.811	0.036	3.742	3.878	0.002	0.001
$\mu_{ts}$	2.091	0.148	1.804	2.355	0.008	0.006
$\sigma_{ts}$	0.482	0.463	0.001	1.282	0.015	0.011
volatility_process_ts	0.022	0.001	0.021	0.024	0.000	0.000
参数	ESS_mean	ESS_sd	ESS_bulk	ESS_tail	r_hat	
$s_{ts}$	372	372	374	459	1.01	
$\mu_{ts}$	352	349	356	458	1.00	
$\sigma_{ts}$	926	926	441	387	1.00	
volatility_process_ts	371	370	374	459	1.01	

表2—4中:MCSE\_mean、MCSE\_sd表示蒙特卡罗标准误差(Monte Carlo standard error, MCSE)的相应参数;ESS\_mean、ESS\_sd、ESS\_bulk、ESS\_tail表示有效样本量(effective sample size, ESS)的相关参数;r\_hat是一种收敛诊断方法,它比较了各参数估计值。

表3 中期利率模型(tf)参数估计结果

Table 3 Estimated parameter values of medium-term interest rate model (tf)

参数	均值	方差	区间估计值(3%)	区间估计值(97%)	MCSE_mean	MCSE_sd
$s_{tf}$	4.017	0.032	3.960	4.078	0.002	0.001
$\mu_{tf}$	4.284	0.491	3.450	5.221	0.022	0.016
$\sigma_{tf}$	0.520	0.539	0.000	1.504	0.018	0.013
volatility_process_tf	0.018	0.001	0.017	0.019	0.000	0.000
参数	ESS_mean	ESS_sd	ESS_bulk	ESS_tail	r_hat	
$s_{tf}$	399	399	401	410	1.01	
$\mu_{tf}$	494	494	491	490	1.00	
$\sigma_{tf}$	918	918	297	172	1.01	
volatility_process_tf	402	402	401	410	1.01	

表4 长期利率模型(tl)参数结果  
Table 4 Estimated parameter values of long-term interest rate model (tl)

参数	均值	方差	区间估计值(3%)	区间估计值(97%)	MCSE_mean	MCSE_sd
$s_{tl}$	4.301	0.029	4.243	4.352	0.001	0.001
$\mu_{tl}$	4.971	0.597	3.913	6.099	0.027	0.020
$\sigma_{tl}$	0.539	0.501	0.002	1.489	0.018	0.013
volatility_process_tl	0.014	0.000	0.013	0.014	0.000	0.000

参数	ESS_mean	ESS_sd	ESS_bulk	ESS_tail	r_hat
$s_{tl}$	510	509	514	682	1.01
$\mu_{tl}$	472	456	502	504	1.01
$\sigma_{tl}$	762	715	602	580	1.00
volatility_process_tl	510	510	514	682	1.01

根据表2—4中模型的参数统计对模型的收敛性和有效性进行分析,以确保模型结果的可靠性。首先,考虑模型参数的收敛性。图3—5给出3个模型对应参数的密度图和轨迹图。

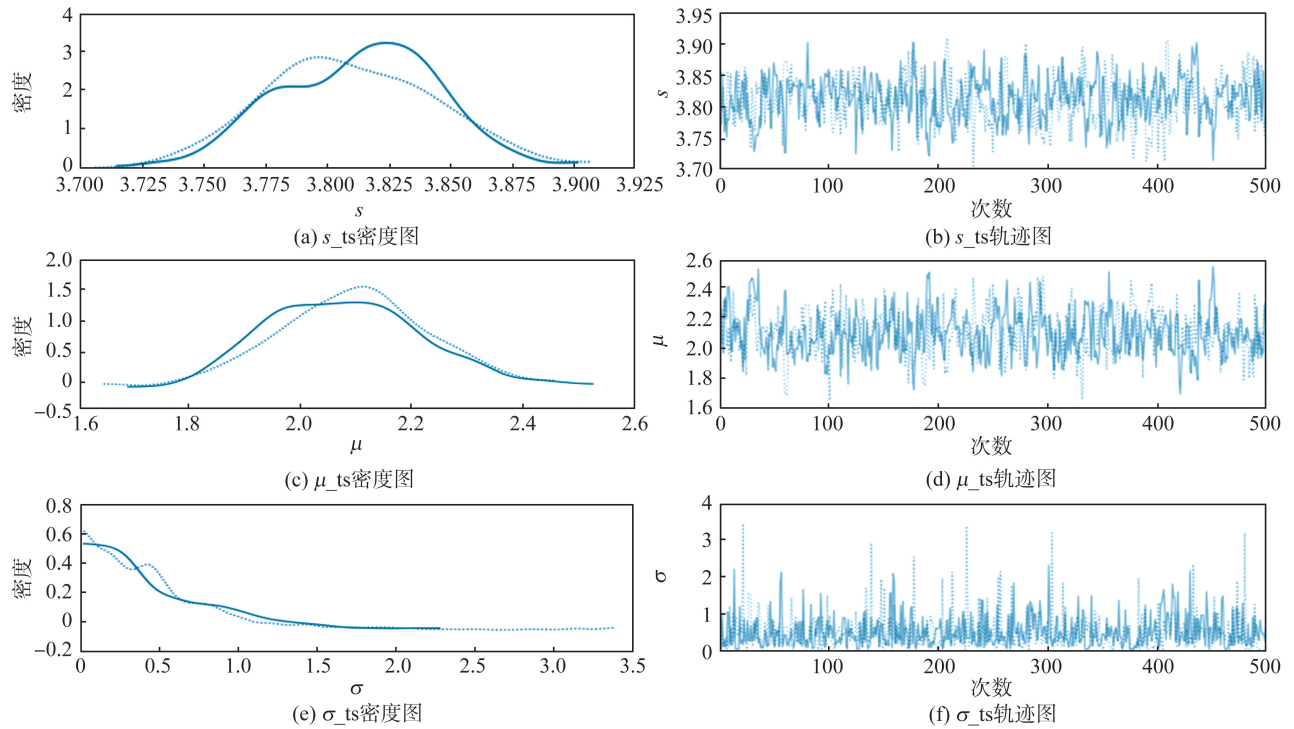
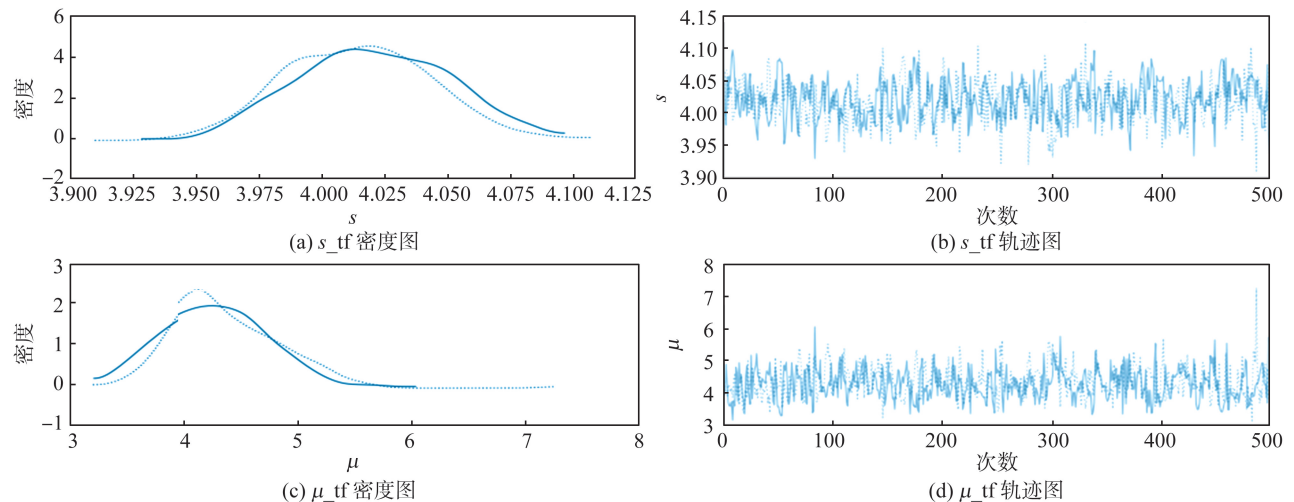


图3 短期利率模型(ts)参数的密度图和轨迹图  
Fig.3 Parameters density and trace plot of short-term interest rate model (ts)



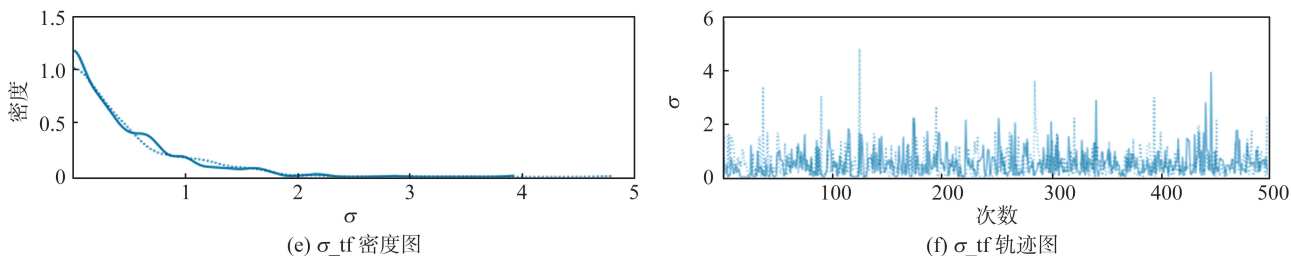


图4 中期利率模型(tf)参数的密度图和轨迹图  
Fig.4 Parameters density and trace plot of medium-term interest rate model(tf)

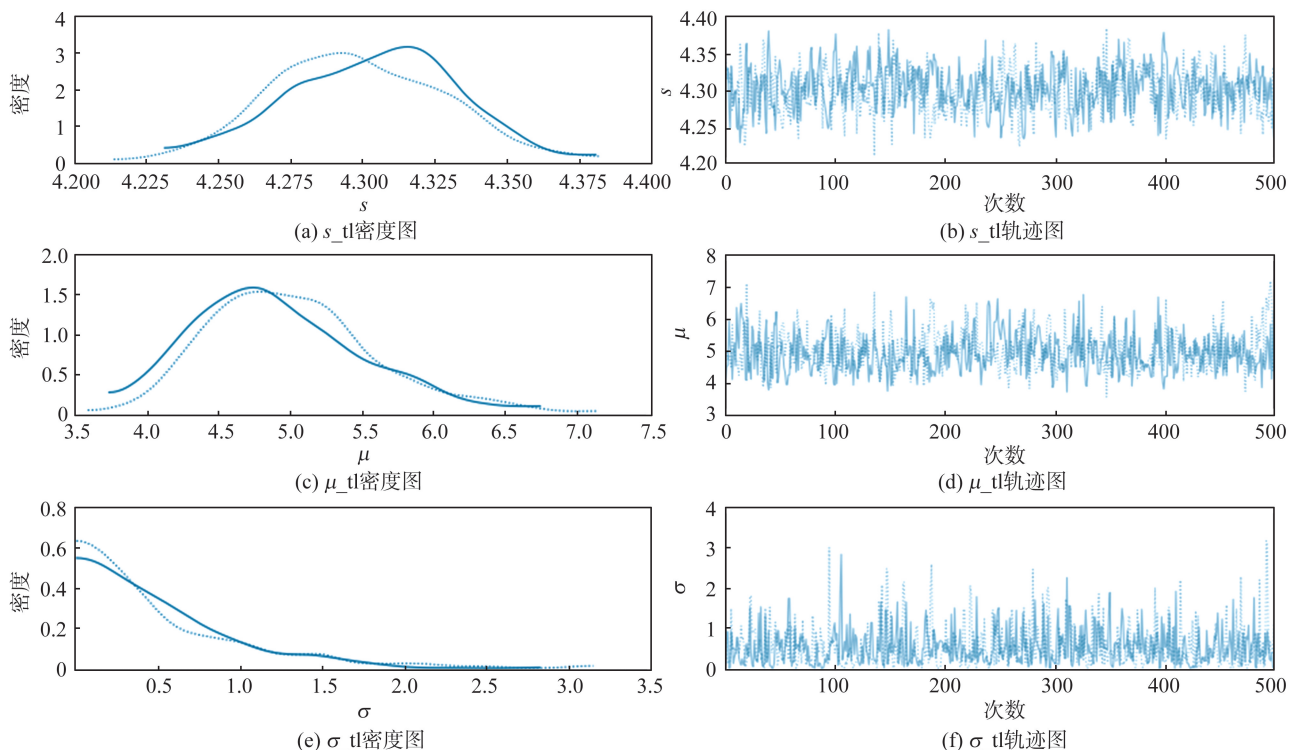


图5 长期利率模型(tl)参数的密度图和轨迹图  
Fig.5 Parameters density and trace plot of long-term interest rate model(tl)

从图3—5可以看出,模型参数的收敛性较好,收敛于相应的分布,并且各个参数对应各自的分布采样拟合情况较好。

其次,对模型参数的有效性进行说明。由表2—4可知,模型参数的MCSE基本都较小,说明模型的精度较高。另外,根据模型的有效采样值,也可以看出模型是有效的。图6给出了不同模型参数之间的有效性指标对比。结果表明模型具有较好的收敛性和有效性,因此模型的最终估计结果是有效的。可以进行下一步的随机过程分析。

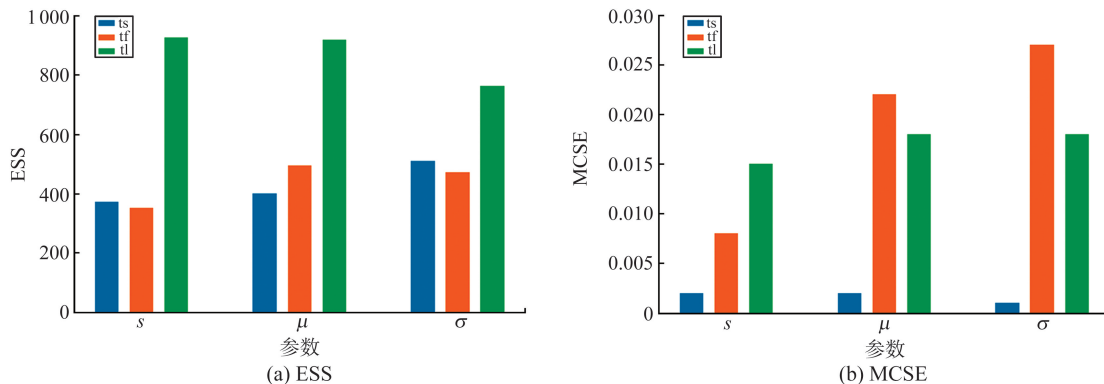


图6 参数有效性指标比较  
Fig.6 Effectiveness index comparison of parameters

本文重点给出波动率过程在抽样轨迹上的表现。图7给出到期收益率波动过程的序列图,横轴表示采样次数,纵轴表示到期收益率的波动情况。其中,蓝色曲线为短期利率波动率序列,黄色曲线为中期利率波动率序列,绿色曲线为长期利率波动率序列。可见,短期利率的波动率序列明显高于中长期波动率序列。由于本文将波动率设定为随机游走,因此波动率在表2—4的参数 volatility\_process 均值附近徘徊。

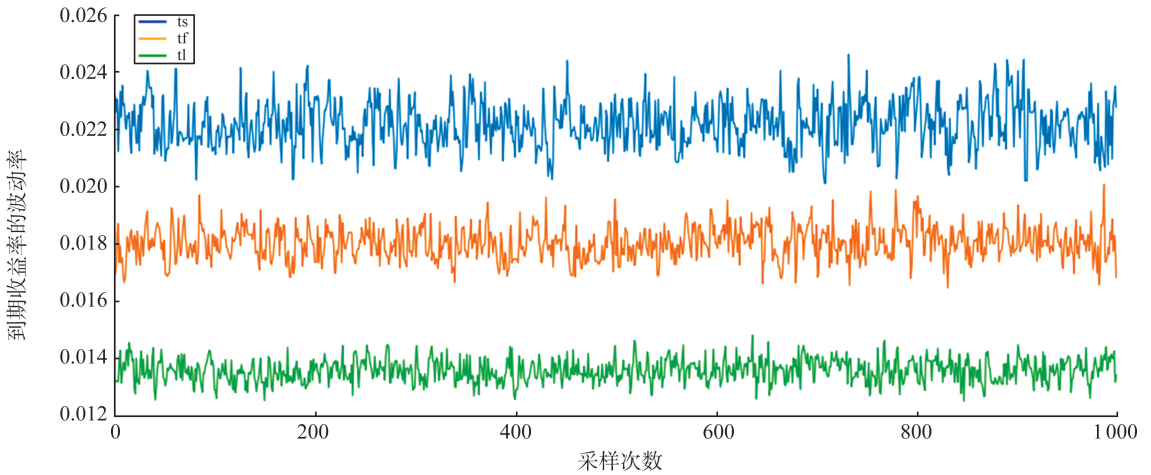


图7 到期收益率的波动率序列图

Fig.7 Volatility sequence diagram of yeild to maturity

### 3 小结

本文得出短期利率比中长期利率的波动性更大的结果,这与常识是一致的,并且 Markellos 等<sup>[9]</sup>也得出了相同的结论,证明本文使用的方法是可行的,利率的波动性可以通过本文的模型进行度量和刻画。另外,相较于 Markellos 等<sup>[9]</sup>,本文使用的数据直接利用国债收益率作为研究对象,没有涉及利率衍生品市场。因为利率衍生品价格波动的影响因素更为复杂,所以本文直接对国债收益率数据进行研究,使得模型的应用范围更广,并且分析结果也更为准确。针对利率衍生品市场尚不完善。衍生品种类不足、流动性不强的国家,基于衍生品市场进行波动分析的方法受到市场因素的限制,从而不能利用衍生品价格数据分析利率波动,本文为这类国家提供一个利用衍生品市场标的资产的数据信息直接分析利率波动的方法。

#### 参考文献:

- [1] 汪洋,刘腾华. 经济双循环背景下中国利率走廊机制的完善:基于欧洲中央银行的经验[J]. 世界经济研究,2022(11):3-17,135.  
WANG Yang, LIU Tenghua. The improvement of interest rate corridor system in China under the background of dual circulation economy: based on the experience of European central bank[J]. World Economy Studies, 2022(11):3-17,135.
- [2] 田琦程. 浅析利率动态模型[J]. 中国货币市场,2022(5):60-63.  
TIAN Qicheng. Analysis on interest rate dynamic models[J]. China Money, 2022(5):60-63.
- [3] VASICEK O. An equilibrium characterization of the term structure[J]. Journal of Financial Economics, 1977, 5(2):177-188.
- [4] DUFFIE D, FILIPOVIĆ D, SCHACHERMAYER W. Affine processes and applications in finance[J]. The Annals of Applied Probability, 2003, 13(3):984-1053.
- [5] BIKBOV R, CHERNOV M. Unspanned stochastic volatility in affine models: evidence from Eurodollar futures and options [J]. Management Science, 2009, 55(8):1292-1305.
- [6] JACOBS K, KAROUI L. Conditional volatility in affine term-structure models: evidence from treasury and swap markets[J]. Journal of Financial Economics, 2009, 91(3):288-318.
- [7] JOSLIN S. Can unspanned stochastic volatility models explain the cross section of bond volatilities? [J]. Management Science, 2018, 64(4):1707-1726.
- [8] LI Haitao, ZHAO Feng. Unspanned stochastic volatility: evidence from hedging interest rate derivatives[J]. The Journal of

Finance, 2006, 61(1):341-378.

- [9] MARKELLOS R N, PSYCHOYIOS D. Interest rate volatility and risk management: evidence from CBOE treasury options[J]. The Quarterly Review of Economics and Finance, 2018, 68:190-202.
- [10] FRÜHWIRTH-SCHNATTER S, GEYER A L J. Bayesian estimation of econometric multi-factor Cox-Ingersoll-Ross-Models of the term structure of interest rates via MCMC methods[EB/OL].1996[2023-07-22]. <https://www.wu.ac.at/fileadmin/wu/d/i/ifr/mcmc2>.
- [11] NEAL R M. MCMC using Hamiltonian dynamics[M]//Handbook of Markov chain Monte Carlo. New York: CRC Press, 2011:113-160.
- [12] SALVATIER J, WIECKI T V, FONNESBECK C. Probabilistic programming in Python using PyMC3[J]. PeerJ Computer Science, 2016, 2:e55.
- [13] JOSLIN S, KONCHITCHKI Y. Interest rate volatility, the yield curve, and the macroeconomy[J]. Journal of Financial Economics, 2018, 128(2):344-362.
- [14] JOSLIN S, LE A. Interest rate volatility and no-arbitrage affine term structure models[J]. Management Science, 2021, 67(12):7391-7416.
- [15] 吴喜之. 贝叶斯数据分析:基于R与Python的实现[M]. 北京:中国人民大学出版社,2020.  
WU Xizhi. Bayesian data analysis: based on the implementation of R and Python[M]. Beijing: China Renmin University Press, 2020.

(编辑:李艺)

---

(上接第21页)

- [13] LEOBACHER G, NGARE P. Utility indifference pricing of derivatives written on industrial loss indices[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2016, 300:68-82.
- [14] 柏满迎,郝军章,翟嘉,等. 巨灾权益连结卖权定价模型研究:基于随机波动率与随机利率条件[J]. 管理工程学报,2019, 33(3):170-178.  
BAI Manying, HAO Junzhang, ZHAI Jia, et al. Research on catastrophe equity linked put pricing model: based on stochastic volatility and stochastic interest rate condition[J]. Journal of Management Engineering, 2019, 33(3):170-178.
- [15] WANG Xingchun. Valuation of new-designed contracts for catastrophe risk management [J]. The North American Journal of Economics and Finance, 2019, 50:101041.
- [16] HARRISON J, PLISKA S. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading [J]. Stochastic Processes and their Applications, 1981, 11(3):215-260.

(编辑:李艺)