

基于改进递归图技术的股指市场有效性

刘桂东¹,柯宜龙²,尤国桥^{1*},刘曼茜²

(1.南京审计大学数学学院,江苏南京211815;2.南京审计大学统计与数据科学学院,江苏南京211815)

摘要:提出一种改进的递归图技术,用于计算基于递归微态的熵值(entropy based on recurrence microstates, ENRM)。该方法使用滚动窗口的方式来遍历递归矩阵的子矩阵,能够在保证原有算法精度的基础上大幅提高计算效率,通过 Logistic 模型进行模拟实验。结果表明,基于该改进递归图技术的模型具有更高的计算效率和精度。此外,ENRM 关于市场有效性的研究结果表明,使用 ENRM 与传统的递归图指标递归熵(entropy, ENTR)相结合来分析市场有效性时,不仅具有 ENTR 单指标量化市场有效性的作用,还能有效识别并进行市场有效性呈动态性演化的时间段。

关键词:递归图;递归微态的熵;滚动窗口;市场有效性

中图分类号:O24; F831.5 **文献标志码:**A

引用格式:刘桂东,柯宜龙,尤国桥,等. 基于改进递归图技术的股指市场有效性[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(3):41-48.

Efficiency of stock index market based on improved recurrence plot

LIU Guidong¹, KE Yilong², YOU Guoqiao^{1*}, LIU Manxi²

(1. School of Mathematics, Nanjing Audit University, Nanjing 211815, Jiangsu, China; 2. School of Statistics and Data Science, Nanjing Audit University, Nanjing 211815, Jiangsu, China)

Abstract: An enhanced computational model is introduced for the entropy based on recurrence microstates (ENRM), which builds upon the original method and employs an improved approach involving the traversal of submatrices using a rolling window. This improved computational model significantly improves computational efficiency while maintaining the accuracy of the original algorithm. For simulation experiments, a logistic model is employed, and the results prove that this improved computational model has higher computational efficiency and accuracy. Furthermore, research findings on market efficiency suggest that using the entropy based on recurrence microstates (ENRM) in combination with the traditional recurrence plot metric, entropy (ENTR), not only retains the ability of ENTR to quantify market efficiency but also effectively identifies and analyzes periods during which market efficiency undergoes dynamic evolution.

Key words: recurrence plot; entropy based on recurrence microstates; rolling window; market efficiency

0 引言

长期以来,人们致力于开发各种有效的工具来理解并提取复杂时间序列数据中的重要信息,例如海洋流^[1-2]、飓风结构^[3]、飞行路径^[4-5]、心血管流中的血液混合^[6]等问题,以及其他混沌系统^[7-12]中的一些时间序列,其中,Eckmann 等^[13]提出了递归图技术,在工程学^[14-15]、医学^[16]等领域已被广泛用于研究时间序列的动态特性,如周期性、混沌性和非平稳性。递归图技术中较为成熟的一种方法是递归量化分析^[17-18],该方法基于递归矩阵研究时间序列的动力学特征,尤其是用于研究时间序列的混沌性。基于递归微态的熵^[19]就是这

收稿日期:2023-12-15; 网络出版时间:2024-10-23 13:35:58

基金项目:国家自然科学基金资助项目(12371433, 12001280); 江苏省高校“青蓝工程”; 江苏省自然科学基金资助项目(BK20211293); 江苏省研究生科研与实践创新计划项目(KYCX23_2259)

第一作者:刘桂东(1991—),男,讲师,博士,研究方向为计算数学. E-mail:liugd@nau.edu.cn

*通信作者:尤国桥(1987—),男,教授,博士,研究方向为计算数学. E-mail:magyou@nau.edu.cn

样的一种递归量化分析方法,且已被验证能够有效衡量一维时间序列的混沌行为。

ENRM 的定义简单,适用范围较广,但是目前缺乏较为有效的阈值选取方法,只能在某个区间范围内通过遍历选出一个满意的值,从而导致算法的计算复杂度较高。例如,Prado 等^[20]提出从一个给定区间内搜索出使得 ENRM 最大的阈值,该方法获得的阈值应用于 Logistic 混沌映射和高斯白噪声数据上均能获得合理的结果,但该方法计算效率较低。最近,You 等^[21]提出了一种结合二分法和最大熵原理的算法,能够快速确定最优阈值的近似解。

随着分形市场理论的兴起,递归图技术被逐渐应用于研究股指数据^[22-23]。李燕^[24]用递归图方法中的递归熵指标对世界不同区域市场的有效性进行了研究,其结果符合现有的一些股指市场的有效性动态变化,但该方法中的阈值仍然是主观调试的,存在计算效率低的问题。本文在文献[21]中阈值选取方法的基础上,改进了微态的选取方法,进一步提高了最优阈值的计算效率和精度,并将其应用于市场有效性研究。本文的贡献主要有2点:一是将 ENRM 引入了市场有效性研究,形成了 ENRM 与 ENTR 双指标的市场有效性衡量体系;二是给出了最优阈值的高效选取方法,使得 ENRM、ENTR 的计算更为便利。

1 递归图与 ENRM

递归图技术最早由 Eckmann 等^[13]提出,用于分析时间序列的周期性、混沌性和非平稳性。对于时间序列中任意2个点 x_i 和 x_j ,若 $|x_i - x_j| < \varepsilon$,则称 x_i 和 x_j 互为递归点。于是定义递归矩阵 R 的元素为

$$R_{ij} = \Theta(\varepsilon - |x_i - x_j|), \quad i, j = 1, 2, \dots, L,$$

其中: Θ 为 Heaviside 函数; L 为时间序列的长度。显然, R 为 0-1 二值对称矩阵,且 R 中元素为 1 或 0 的元素分别表示递归点和非递归点。递归图就是二值递归矩阵的图像表示,递归矩阵包含与递归图相同的信息。递归量化分析正是通过研究递归矩阵的不同方面,如递归矩阵的水平线、垂直线或对角线,从时间序列中提取有价值的信息。

ENTR 和 ENRM 是常用的递归量化分析方法。ENTR 是指在递归矩阵中对角结构的信息熵,即递归矩阵对角线一侧内与对角线平行的连续递归点线段,选取方式如图 1(a)所示。ENTR 的计算公式为

$$\text{ENTR} = - \sum_{l=l_{\min}}^{l_{\max}} p(l) \ln p(l),$$

其中: l 为对角结构的长度; l_{\min} 为最小对角结构长度(通常可以定义为 2); l_{\max} 为除递归矩阵主对角线外的最长对角结构; $p(l)$ 为长度为 l 的对角结构的频率。ENTR 反映了递归图对角结构的复杂度。

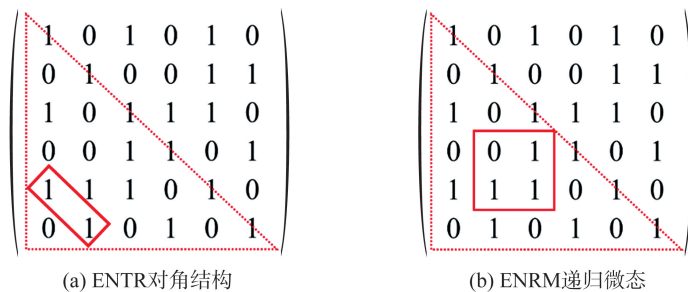


图1 子矩阵示例

Fig.1 Example of recurrence microstates matrices

ENRM 为确定递归微态维度下递归矩阵的信息熵,给定递归微态的维数 N ,每个微态则为 $N \times N$ 型的矩阵,故共有 $N^* = 2^{N^2}$ 个不同的递归微态。然后在行和列上都使用滑动窗口法遍历递归矩阵对角线一侧的三角阵的 $N \times N$ 型子矩阵,如图 1(b)所示。当递归矩阵的维数(即时间序列的长度)较大时,遍历所有 $N \times N$ 型子矩阵,共需要 $(L-2N+2)(L-2N+1)/2$ 次运算,再对这些子矩阵进行微态识别的过程是极其耗时的,因此,在实际计算中会采取随机抽样 N 个子矩阵的方法进行简化。随后对这些子矩阵进行微态识别,计算每一微态的频率,再运用信息熵公式得到 ENRM。设 n_i 为 N 个样本中出现第 i 个微观状态的个数,用 $P_i = n_i/N$ 来近似第 i 个微观状态出现的概率,则 $\text{ENRM} = - \sum_{i=1}^{N^*} P_i \ln P_i$ 。

2 ENRM 的改进计算模型

即使是采用抽样方法对 ENRM 进行计算,由于基数较大,因此须抽取相当多数量的样本才能得到较为精确的 ENRM 值分布和阈值 ε 的近似解,这也导致在特定时间序列长度下该算法的计算成本依然巨大,而且使用抽样的方法计算 ENRM,样本量主观选择的因素会造成 ENRM 与阈值结果不稳定。为了解决这一问题,需要进行多次重复试验,这也同样加剧了计算量大的问题。为了解决 ENRM 计算可行性和效率问题,You 等^[21]提出了包含以下改进方法的 ENRM 改进计算模型。

2.1 阈值优化搜索算法

无论是计算精确解还是抽样方法的近似解,造成 ENRM 计算成本大的主要原因是需要遍历阈值 ε 所有可能的取值,即相空间中任意两点间欧氏距离集合。时间序列越长,需要遍历的 ε 值域范围就会越庞大。如果将 ε 的取值范围排序后再进行遍历,那么递归矩阵中的递归点也会随之增加。由于固定 ε 邻域内 ENRM 值呈现小波动变化,因此考虑计算可行性,实际计算中可以采取固定步长遍历 ε 值域的策略。基于该理念,假设 ENRM 在 ε 值域上呈现波动单峰或多峰分布,运用二分法和最大熵原理相结合的方法可以快速找到阈值 ε 的近似解。具体算法过程如下。

首先将区间 $[0, d_{\max}]$ 平均分成 $K-1$ 个子区间,分点记为 $0 = a_1 < a_2 < \dots < a_K = d_{\max}$,其中 d_{\max} 为 ε 最大可能取值。计算每个分点处的 ENRM 值后,找到最大的 3 个 ENRM 值及其对应的分点,将其按升序排列并记为 b_1, b_2, b_3 。然后,分别计算区间 $[b_1, b_2]$ 和 $[b_2, b_3]$ 的中点 c_1 和点 c_2 处的 ENRM 值,从集合 $\{b_1, b_2, b_3, c_1, c_2\}$ 中选择对应 ENRM 值最大的 3 个的点,将 b_1, b_2, b_3 按升序更新为这 3 个点,并重复此过程。直到满足 $|b_1 - b_3| < \xi$ (ξ 值通常为主观设定),或者 2 个中点处的 ENRM 值都小于或等于区间端点 b_1, b_2 和 b_3 中最小的 ENRM 值,此时迭代终止,如图 2 所示。

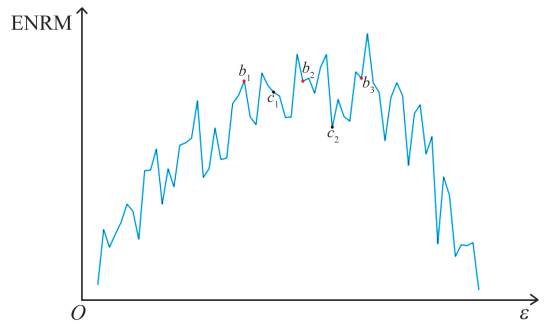


图2 终止迭代情形二

Fig.2 The second termination condition for iteration

此外,为了避免迭代陷入局部最大值,有必要将 K 设置为一个相对较大的数字,例如 $K=16$ 或 $K=32$ 。如图 3(a) 所示,若设置 $K=3$ 时,后面的迭代步骤将被限制在区间 $[c_1, c_2]$ 内,将得到一个远离目标区间的 ε ;若设置 $K=17$,在图 3(b) 中可以看到后续迭代会在目标区间内寻找 ε 的值。

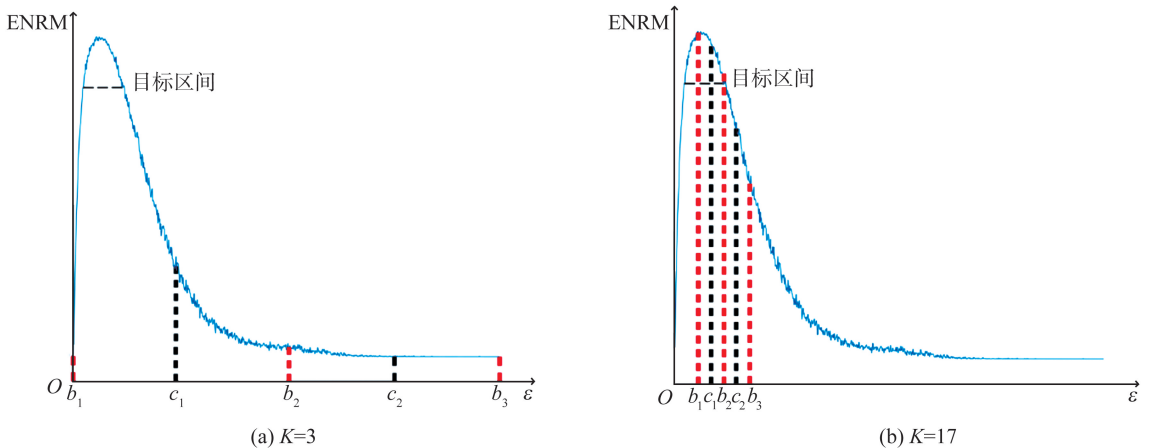


图3 K=3 和 K=17 时第一次迭代情况

Fig.3 The first iteration for K=3 and K=17

2.2 微态识别改进算法

另一个大量增加 ENRM 计算成本的问题在于递归矩阵中 $N \times N$ 型子矩阵的微态识别过程。主要原因有两点:一是以矩阵为分类对象较耗时;二是子矩阵数目会随着时间序列长度的增加而剧增。对于问题一,

Prado等^[20]提出对矩阵进行二进制十进制编码的方法进行优化,即假设 $N=4$ 的情况下,子矩阵为

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix},$$

其中 $p_{ij}=0$ 或 1 。对矩阵进行二进制十进制转换,即

$$p_{11}p_{12}\cdots p_{44}=p_{11}\times 2^{15}+p_{12}\times 2^{14}+\cdots+p_{44}\times 2^0,$$

这样就不需要进行矩阵-矩阵的配对,而是编号-编号的配对即可。

为了解决子矩阵数目过多问题,本文采取滚动窗口法替代滑动窗口法采样对递归矩阵遍历子矩阵。以 $N=2$ 为例,滑动窗口采样和滚动窗口采样如图4所示,图中方框为 2×2 维的采样窗口。在图4(a)滑动窗口法中,采样窗口以步长1依次向右和向下平移遍历所有子矩阵,因此相邻的窗口间有重复的元素。图4(b)滚动窗口法中的采样窗口则是依次向右和向下滚动 90° ,相邻窗口间不会有重复值。滑动窗口法和滚动窗口法所遍历到的递归矩阵元素基本相同,但是,对递归矩阵中的任意元素,滑动窗口法会产生 N^2 个包含该元素的子矩阵,而滚动窗口法只会产生一个,因此使用滚动窗口法可以提取与滑动窗口法相同的递归矩阵信息并提升一定的计算效率。当然,滚动窗口法必然会在结果上与滑动窗口法不相等,一般表现为滑动窗口法结果大于滚动窗口法结果,变化趋势基本相等,因此上文提到的阈值搜索法对2种采样方法而言结果基本相等。

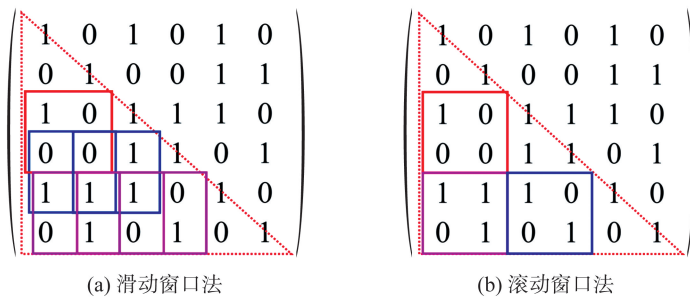


图4 滑动窗口采样法与滚动窗口法采样示意图

Fig.4 Plots of sampling with sliding window and rolling window

随机抽样的计算方法虽然提升了一定的计算效率,但抽样数目没有标准,数目太小时结果误差大,数量太大时效率又太低,需要多次实验调整。由于随机误差的存在,有时随机抽样法结果的变化趋势与滑动窗口法相比可能偏差较大,因此在多数情况下,使用滚动窗口确定的阈值 ε 从精确性而言优于随机抽样的方法,而且其结果唯一,无须多次调整确定实验结果的稳定性。也就是说,采用滚动窗口采样法可以在保证阈值 ε 近似解更接近真实解的情况下,计算某个阈值下的 ENRM 只消耗原计算成本约 $1/N^2$,因此用得到的阈值构造的递归矩阵获得的递归图结果也更加准确。

具体的 ENRM 改进计算模型为:在整个阈值值域内采取带初始分割的二分法与最大熵原理结合的方法搜索最优阈值近似解,其中计算固定阈值下的 ENRM 时,采用滚动窗口法对递归矩阵遍历子矩阵,再对子矩阵使用二进制与十进制转换的方式编码后计算 ENRM。

2.3 Logistic 模型模拟实验

本文通过 Logistic 混沌时间序列 $x_{t+1}=\mu x_t(1-x_t)$ 来比较 ENRM 改进计算模型与 ENRM 抽样计算模型的准确性,以滑动窗口计算模型得到的阈值 ε 结果为标准。设置参数 $\mu=3.6$,初值 $x_0=0.6$,时间序列长度 $L=1000$,微态维度 $N=4$,抽样计算模型样本数量 $\bar{N}=31125$ (即改进计算模型须计算的子矩阵数目),抽样计算模型与滑动窗口模型遍历间隔为 0.001 ,改进计算模型参数 $K=33$,对比结果见表1。可以看出,改进模型在计算时间上远比滑动窗口计算模型的少,所得到的 ε 结果也比抽样计算模型更接近滑动窗口计算模型结果,表明改进计算模型在结果的精确性和计算效率上都优于抽样计算模型,并可以在保证结果精度的同时,大幅度提高计算效率。

表1 3种计算模型结果对比
Table 1 Comparison of results from three computational models

计算模型	阈值 ε	计算时间/s	须计算 ε 的数量
改进计算模型	0.053 8	2.63	50
抽样计算模型	0.061 6	55.51	1 000
滑动窗口计算模型	0.046 1	647.13	1 000

为了进一步验证二分法与最大熵原理相结合的阈值搜索法的效率和滚动窗口法的准确性,在 Logistic 混沌时间序列中,以 0.001 为步长对区间[3.6,4]内 401 条不同参数 μ 的时序数据比较了改进模型与抽样模型的 ε 均方误差、ENRM 均方误差和计算时间(见表 2),其中抽样计算模型中同样采用二分法确定阈值。由图 5 可以观察到,抽样计算模型在部分点上与滑动窗口计算模型的 ε 结果明显相差许多,而改进计算模型则很少出现这种情况,其曲线也明显更接近滑动窗口计算模型。

表2 改进计算模型与抽样计算模型结果对比
Table 2 Comparison of the improved computational model and the sampling computational model

计算模型	ε 均方误差	ENRM 均方误差	计算时间/s
改进计算模型	1.11×10^{-3}	4.40×10^{-3}	440
抽样计算模型	1.42×10^{-3}	1.05×10^{-1}	481

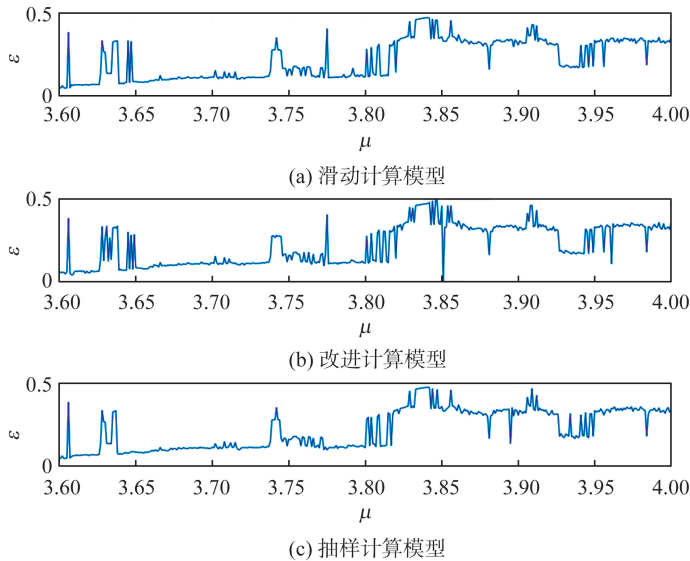


图5 3种模型 ε 结果序列图

Fig.5 The sequences of ε for the three models

表 2 中随机抽样模型 ε 均方误差误差为 1.42×10^{-3} ,而改进计算模型 ε 均方误差为 1.11×10^{-3} ,略小于抽样计算模型。改进计算模型的 ENRM 均方误差为 4.40×10^{-3} ,远小于抽样计算模型 ENRM 均方误差 1.05×10^{-1} ,说明滚动窗口采样能得到更加接近滑动窗口采样的结果。改进计算模型的计算时间仍比随机抽样计算模型少,由于在实验中随机抽样模型同样使用了二分法和最大熵原理相结合的阈值搜索法,因此两者计算效率相差无几,但改进计算模型仍具有更高的准确性,说明是滚动窗口法起到了作用。以上实验结果表明,改进计算模型能够在保证 ε 和 ENRM 的精度下进一步提升计算效率。

3 基于改进 ENRM 计算模型的市场有效性研究

近年来,非线性时序数据分析方法被广泛应用于金融时序数列研究中,尤其是动力学领域时序数据复杂性研究技术^[22-24]。在有效市场假说中,主要是基于历史价格序列的可预测性判断市场的有效性,但在真实金融市场中指数价格序列往往是不平稳的,少有方法能直接对其进行市场有效性研究。由于递归图技术不对时间序列平稳性做要求,并且 ENRM 和 ENTR 可作为递归图量化数据混沌程度的指标,序列越混沌,可预测性越差,市场有效性越低,因此递归图技术可用于市场有效性研究。李燕^[24]对股指数据对数收益率进行 ENTR 单指标量化市场有效性研究,并得出市场有效性随时间和时间尺度动态变化的结论,但是该方法将阈

值视为超参数,且 ENTR 单指标所进行的有效量化研究无法结合递归图提取更多的时间序列特征。

ENRM 不仅可以量化时间序列的混沌性,也能确定一个较合理的阈值,因此本文针对更符合市场有效性定义的研究对象指数价格序列,通过改进计算模型所得 ENRM 和阈值来计算 ENTR,并使用 ENTR 与 ENRM相结合的方式量化市场有效性。当 ENRM 较小而 ENTR 较大时,递归图以递归结构为主,数据可预测性强,市场有效性偏低;当 ENRM 较大而 ENTR 较小时,递归图以层流结构为主,数据可预测性弱,则市场有效性偏强;ENRM 与 ENTR 均较大或较小,递归图中存在递归点过多或过少且递归结构与层流结构均匀分布现象,数据在该时间范围内有效性动态变化,须缩小时间尺度进一步研究。

本文收集了 1992 年 1 月 1 日至 2023 年 2 月 13 日的上证综指价格时间序列数据,进行时间窗为 1 000,约 4 a 的滚动窗口研究,使用改进计算模型只需要几分钟,而抽样与滑动窗口模型均要几小时,所得结果如图 6 所示。根据上文所提的有效性判断原则,对比第 4 001—5 000 个交易日和第 6 001—7 000 个交易日内的指数序列结果,前者 ENTR 较大而 ENRM 较小,而后者反之。对比两者递归图,图 7(a)有明显的递归结构长时间连续区域,该时间范围也对应 2008 年金融危机期间,市场有效性低,与现有研究相符;图 7(b)则垂直线段居多,层流结构为主导,递归点均匀分布,符合较高有效性数据递归图特征。

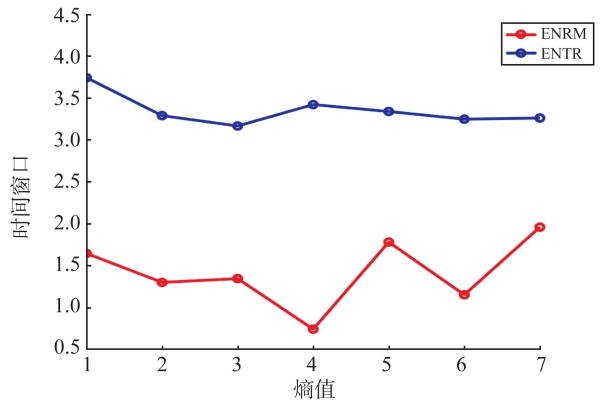


图 6 时间窗为 1 000 的改进计算模型结果
Fig.6 The improved computational model results with a time window of 1 000



(a) 第4001—5000个交易日



(b) 第6001—7000个交易日

图 7 第 4 001—5 000 个交易日(a)和第 6 001—7 000 个交易日(b)的递归图
Fig.7 Recurrence plots for trading days from 4 001 to 5 000 (a) and from 6 001 to 7 000 (b)

此外,第 1—1 000 个交易日指数序列的 ENRM 和 ENTR 都大于第 1 001—2 000 个交易日指数序列,须缩小时间尺度进一步研究。再对第 1—2 000 个交易日指数序列进行时间窗长度为 250 的计算。从图 8 中看出,当时间尺度缩小后,ENRM 值普遍大于时间窗为 1 000 的值,ENTR 则相反,说明时间尺度越小,市场有效性越大,与已有的研究结论相符。

对于第 1—1 000 个交易日指数序列而言,第 1 至第 250 个交易日序列有效性明显低于后 3 个时间窗,对于第 1 001—2 000 个交易日指数序列,第 1 001—1 250 个交易日指数序列有效性也明显低于其他时间窗。图 9 为 2 个有效性较低的时间段内的递归图,明显递归结构保持长时间连续。除了这两点,其他时间范围内 ENTR 都较小,ENRM 并不过小,有效性较高。

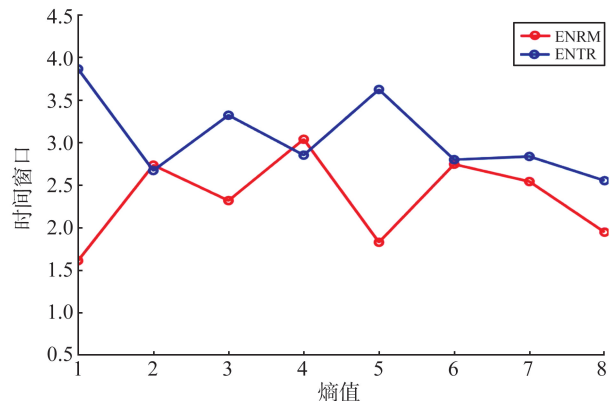


图 8 第 1—2 000 个交易日时间窗等于 250 的计算结果
Fig.8 Computational results with a time window of 250 for trading days from 1 to 2 000

缩小时间尺度观察到的市场有效性变化的结果符合 ENRM 与 ENTR 相结合分析市场有效性的结论,进一步证明现有的市场有效性是动态演化的研究结果。

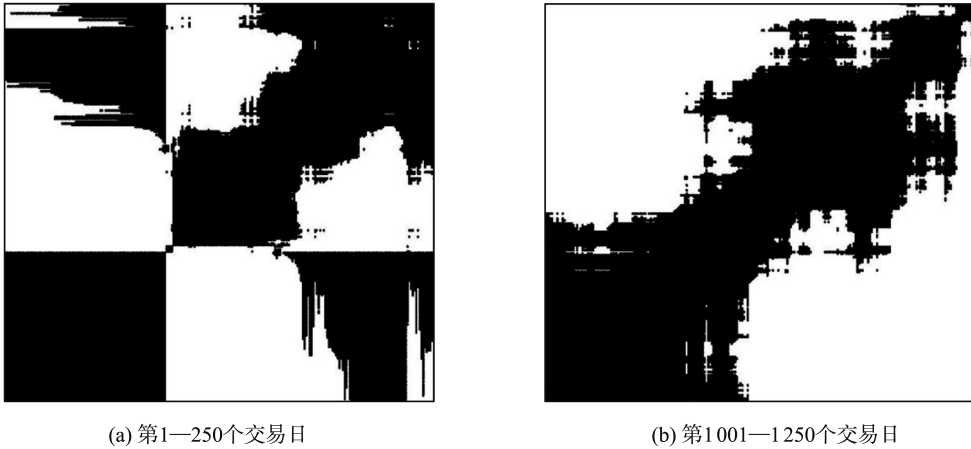


图9 低有效性时间段的递归图
Fig.9 Recurrence plots of low efficiency periods

4 结语

本文提出了一种改进的 ENRM 计算模型,该模型在已有计算模型的基础上,使用滚动窗口采样法遍历子矩阵,既提高了算法计算效率和稳定性,同时具有比已有算法更高的准确性。此外,结合 ENRM 能够识别时间序列混沌特性以及 ENRM 所确定的阈值更稳定准确的优点,本文基于 ENRM 进行了股指期货的有效性研究,发现使用 ENRM 与 ENTR 相结合分析市场有效性的方法不仅具有 ENTR 单指标量化有效性的作用,还能进行 ENTR 接近的时间段间的市场有效性研究,进一步验证了市场有效性呈动态演化的结论。该方法拓宽了递归图技术进行非动力学领域时序数据的途径,也肯定了 ENRM 的应用意义。当然,本文的假设条件缺乏严格的理论证明,是基于实验结果导向的结论,ENRM 本身的理论解释也存在尚待补充的部分,包括其推广到高维数据的可行性,这些都是进一步研究的方向。

参考文献:

- [1] LEKIEN F, LEONARD N. Dynamically consistent Lagrangian coherent structures[C]// Experimental Chaos: 8th Experimental Chaos Conference. Florence: AIP Publishing, 2004:132-139.
- [2] SHADDEN S C, LEKIEN F, MARSDEN J E. Definition and properties of Lagrangian coherent structures from finite-time Lyapunov exponents in two-dimensional aperiodic flows[J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 2005, 212:271-304.
- [3] SAPSIS T, HALLER G. Inertial particle dynamics in a hurricane[J]. Journal of the Atmospheric Sciences, 2009, 66:2481-2492.
- [4] CARDWELL B M, MOHSENI K. Vortex shedding over two-dimensional airfoil: where do the particles come from? [J]. AIAA Journal, 2008, 46(3):545-547.
- [5] TANG W B, CHAN P W, HALLER G. Accurate extraction of Lagrangian coherent structures over finite domains with application to flight data analysis over Hong Kong International Airport[J]. Chaos, 2010, 20:017502.
- [6] BADAS M G, DOMENICHINI F, QUERZOLI G. Quantification of the blood mixing in the left ventricle using finite time Lyapunov exponents[J]. Meccanica, 2017, 52:529-544.
- [7] LIPINSKI D, MOHSENI K. Flow structures and fluid transport for the hydromedusae Sarsia tubulosa and Aequorea victoria [J]. Journal of Experimental Biology, 2009, 212:2436-2447.
- [8] GREEN M A, ROWLEY C W, SMITS A J. Using hyperbolic Lagrangian coherent structures to investigate vortices in bio-inspired fluid flows[J]. Chaos, 2010, 20:017510.
- [9] LUKENS S, YANG X Z, FAUCI L. Using Lagrangian coherent structures to analyze fluid mixing by cilia[J]. Chaos, 2010,

20:017511.

- [10] MANDA B M, SENYANGE B, SKOKOS C. Chaotic wave-packet spreading in two-dimensional disordered nonlinear lattices [J]. *Physical Review E*, 2020, 101:032206.
- [11] LASAGNA D, SHARMA A, MEYERS J. Periodic shadowing sensitivity analysis of chaotic systems[J]. *Journal of Computational Physics*, 2019, 391:119-141.
- [12] CARUSONE A, SICOT C, BONNET J P. Transient dynamical effects induced by single-pulse fluidic actuation over an airfoil [J]. *Experiments in Fluids*, 2021, 62:25.
- [13] ECKMANN J P, KAMPHORST S O, RUELE D. Recurrence plots of dynamical systems[J]. *Europhysics Letters*, 1987, 4(9):973-977.
- [14] 崔澜,张宏立,马萍,等. 基于递归熵及长短期记忆神经网络的滚动轴承退化趋势预测[J]. *轴承*, 2021, 496(3):45-51, 55. CUI Lan, ZHANG Hongli, MA Ping, et al. Prediction on degradation trend of rolling bearings based on recurrent entropy and long short-term memory neural network[J]. *Bearing*, 2021, 496(3):45-51, 55.
- [15] 尚前明,朱仁杰,杨安声,等. 基于RP-CNN的柴油机故障识别[J]. *船舶工程*, 2022, 44(6):89-116. SHANG Qianming, ZHU Renjie, YANG Ansheng, et al. Fault identification of diesel engine based on RP-CNN[J]. *Ship Engineering*, 2022, 44(6):89-116.
- [16] 钟季康,宋志怀,郝为强. RQA在肌电分析中的应用[J]. *生物物理学报*, 2002, 18(2):241-245. ZHONG Jikang, SONG Zhihui, HAO Weiqiang. Application of recurrence qualification analysis to emg[J]. *Acta Biophysica Sinica*, 2002, 18(2):241-245.
- [17] WEBBER C L, ZBILUT J P. Dynamical assessment of physiological systems and states using recurrence plot strategies[J]. *Journal of Applied Physiology*, 1994, 76(2):965-973.
- [18] MARWAN N, ROMANO M C, THIEL M, et al. Recurrence plots for the analysis of complex systems[J]. *Physics Reports*, 2007, 438(5/6):237-329.
- [19] CORSO G, PRADO T L, LIMA G, et al. Quantifying entropy using recurrence matrix microstates[J]. *Chaos*, 2018, 28:083108.
- [20] PRADO T L, CORSO G, LIMA G, et al. Maximum entropy principle in recurrence plot analysis on stochastic and chaotic systems[J]. *Chaos*, 2020, 30:043123.
- [21] YOU Guoqiao, KE Yilong. ENRM: an alternative tool for studying dynamical systems[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2023, 174:113889.
- [22] 吴礼斌,刘盛宇,王焱. 基于递归定量分析与内生结构突变模型的股票市场非线性特征研究[J]. *中国管理科学*, 2012, 20:315-321. WU Libin, LIU Shengyu, WANG Ye. Using recurrence quantification analysis and endogenous structural break test to distinguish nonlinear dynamic characteristics of China's stock market[J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2012, 20:315-321.
- [23] 李燕,郝晓玲,李湛. 全球股市有效性的动态演化及量化比较研究[J]. *管理科学学报*, 2022, 25(4):21-43. LI Yan, HAO Xiaoling, LI Zhan. Dynamic evolution and quantitative comparison of global stock market effectiveness[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2022, 25(4):21-43.
- [24] 李燕. 基于递归图的股票市场非线性动力学演化研究[D]. 上海:上海财经大学, 2020. LI Yan. Research on nonlinear dynamics evolution of stock market based on recurrence plot[D]. Shanghai: Shanghai University of Finance and Economics, 2020.

(编辑:李艺)