

广义分数布朗运动下的双重 Heston 跳扩散模型欧式期权定价

张赵柳,范小明*

(西南交通大学数学学院,四川成都611756)

摘要:首先在风险中性概率测度下提出基于广义分数布朗运动的双重 Heston 跳扩散模型,并通过求解特征函数的偏微分方程组推出该模型相应欧式看涨期权定价公式。通过蒙特卡罗模拟验证欧式期权定价公式的准确性,通过数值分析验证所建立的期权定价模型的合理性和有效性,并讨论广义分数布朗运动参数 H 及波动率等对期权价格的影响。

关键词:期权定价;广义分数布朗运动;双重 Heston 模型;跳扩散模型

中图分类号:O211.61; F830.9 **文献标志码:**A

引用格式:张赵柳,范小明.广义分数布朗运动下的双重 Heston 跳扩散模型欧式期权定价[J].山东大学学报(理学版),2025,60(3):60-68.

European option pricing under double Heston jump-diffusion model with generalized fractional Brownian motion

ZHANG Zhaoliu, FAN Xiaoming*

(School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, Sichuan, China)

Abstract: First, a double Heston jump-diffusion model based on generalized fractional Brownian motion is proposed under the risk-neutral probability measure, and the corresponding European call option pricing formula of the model is introduced by solving the partial differential equation system of the characteristic function. The Monte Carlo simulation verifies the accuracy of the European option pricing formula. The rationality and effectiveness of the established option pricing model are verified by numerical analysis, and the influence of generalized fractional Brownian motion parameter H and volatility on option price is discussed.

Key words: option pricing; generalized fractional Brownian motion; double Heston model; jump-diffusion model

0 引言

自1973年 Black-Scholes (B-S) 期权定价模型^[1]被提出以来,期权定价问题一直备受关注,然而因其强假设,B-S 模型存在一定缺陷从而与真实金融市场相矛盾,尤其在价格波动建模中使用标准布朗运动 (Brownian motion),缺乏对金融市场长记忆特性的考虑。Mandelbrot 等^[2]提出一种改进方法,用分数布朗运动 (fractional Brownian motion) 代替标准布朗运动,然而分数布朗运动平稳增量无法捕捉金融市场中非平稳特征,且不是马尔可夫过程和半鞅过程 (Hurst 指数 $H=0.5$ 除外)。为了克服这些问题,Bojdecki 等^[3]提出次分数布朗运动 (sub-fractional Brownian motion),保留了分数布朗运动的自相似性和长记忆性等重要性质,同时具有更快的衰减率和非平稳二阶矩增量,表现出更高的灵活性。

此外,金融市场的跳跃行为和波动率也是影响期权价格重要因素。Merton^[4]在1976年引入 Merton 跳扩散模型,将泊松过程集成到经典 B-S 模型中来表征资产价格跳跃。一些研究通过提出基于混合次分数的跳扩散模型^[5]、混合分数跳扩散模型^[6]、子混合分数跳扩散模型^[7]等进行一定扩展。同时,Heston 随机波动率模型将波动率作为随机变量处理,并考虑股票收益和方差之间的相关性^[8],是一种更灵活的双因素

收稿日期:2024-08-05; 网络出版时间:2024-12-10 17:05:29

基金项目:国家自然科学基金资助项目(12371178); 西南交大创新项目(P113123G02004)

第一作者:张赵柳(2002—),女,硕士研究生,研究方向为金融统计。E-mail:1906332093@qq.com

*通信作者:范小明(1972—),男,教授,博士,研究方向为动力系统与随机微分方程、金融统计。E-mail:fanxm@swjtu.edu.cn

模型。Chang 等^[9]基于双重 Heston 模型解决了近似分数波动率下的期权定价问题。

然而,现实金融市场复杂多变,单一的分分数布朗运动或次分分数布朗运动中的一个参数难以充分捕捉金融资产价格的动态特征,因此,2017 年 Zili^[10]提出一种更通用的高斯过程广义分数布朗运动(generalized fraction Brownian motion, GFBM),是标准布朗运动、分分数布朗运动和次分分数布朗运动的推广。广义分数布朗运动不仅同时具有分分数布朗运动和次分分数布朗运动的性质,克服了单一参数的局限性,同时更适合捕捉金融市场资产价格的动态特征。一些研究在广义固定收益模型下考虑欧式期权定价问题^[11],提出广义分数 B-S 模型。Guo 等^[12]也在此基础上考虑标的资产价格跳跃行为的显著特征,但是,他们只考虑了单一跳跃行为的影响。

受上述研究启发,本文提出一种具有广义分数波动率的双重 Heston 跳扩散模型,在文献[12]的基础上引入双因素波动率模型,将传统 Heston 模型扩展至含有广义分数波动率的双重 Heston 模型,使波动率刻画更灵活。与经典定价模型相比,本文模型不仅拓展了广义分数布朗运动在期权定价领域的应用,还在双重 Heston 模型的基础上引入跳扩散机制,对市场波动率的描述维度和建模更精确。本文推导了相应的期权定价公式,对广义分数布朗运动的性质进行了延展性运用。

1 预备知识

本章主要对广义分数布朗运动、复合泊松过程和 Feynman-Kac 定理等进行介绍。

1.1 广义分数布朗运动

定义 1^[11] 在完备概率空间 $(\Omega, F, (F_t, t \geq 0), Q)$ 上,广义分数布朗运动 $Z_t^{H,a,b}$ (简称为 Z_t^H)定义为

$$Z_t^{H,a,b} = aW_t^H + bW_{-t}^H,$$

其中: a, b 为常数且 $a^2 + b^2 \neq 0$; W_t^H 为带 Hurst 指数的双面分数布朗运动($H \in (0, 1)$),当 $b = 0$ 且 $H = \frac{1}{2}$ 或 $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 且 $H = \frac{1}{2}$, W_t^H 是一个标准布朗运动;当 $H \neq \frac{1}{2}$, $b = 0$, W_t^H 是一个分分数布朗运动;当 $H \neq \frac{1}{2}$ 且 $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$, W_t^H 是一个次分分数布朗运动。

广义分数布朗运动有如下性质:

- (1) Z_t^H 是一个中心高斯过程,但不是马尔可夫过程;
- (2) Z_t^H 路径连续, $Z_0^H = 0$, $E(Z_t^H) = 0$;
- (3) 任意给定的 $t, s \in \mathbf{R}^+$ 有

$$\text{cov}(Z_t^H, Z_s^H) = \frac{(a+b)^2}{2} (s^{2H} + t^{2H}) - ab(s+t)^{2H} - \frac{a^2 + b^2}{2} |t-s|^{2H}.$$

特别地,当 $t = s$ 时, $E[(Z_t^H)^2] = [(a+b)^2 - 2^{2H}ab]t^{2H}$ 。

引理 1^[2] $B_t^H = \frac{1}{\Gamma\left(H + \frac{1}{2}\right)} \left[A_t + \int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dW_s \right],$

其中 $A_t = \int_{-\infty}^0 ((t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}}) dW_s$; W_s 为标准布朗运动; Γ 为伽马函数。

引理 2^[11] 任意给定 $t \in \mathbf{R}^+$ 有

$$dZ_t^H dZ_t^H = 2H[(a+b)^2 - 2^{2H}ab]t^{2H-1} dt.$$

1.2 复合泊松过程

定义 2 令 $\{N_t, t \geq 0\}$ 为强度为 λ 的泊松过程, $\{Y_i, i = 1, 2, \dots\}$ 为独立同分布随机变量序列,且与 $\{N_t\}$

无关,使得 $Q_t = \sum_{i=0}^{N_t} Y_i, t \geq 0$,则 $\{Q_t, t \geq 0\}$ 称为复合泊松过程。

1.3 广义分数布朗运动的伊藤公式

定理 1 若 $f(z, t)$ 是二阶可微函数, $z = Z_t^H$ 是广义分数布朗运动,其伊藤公式为

$$df(Z_t^H, t) = \frac{\partial f}{\partial z} dZ_t^H + \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + H[(a+b)^2 - 2^{2H}ab]t^{2H-1} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right\} dt.$$

证明 由伊藤引理展开,有

$$\begin{aligned} df(Z_t^H, t) &= \frac{\partial f}{\partial z} dt + \frac{\partial f}{\partial z} dZ_t^H + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} (dZ_t^H)^2 \\ &= \frac{\partial f}{\partial z} dt + \frac{\partial f}{\partial z} dZ_t^H + \frac{1}{2} [(a+b)^2 - 2^{2H} ab] \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dt^{2H} \\ &= \frac{\partial f}{\partial z} dZ_t^H + \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + H[(a+b)^2 - 2^{2H} ab] t^{2H-1} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right\} dt. \end{aligned}$$

引理 3^[12] 若 $f(d, t)$ 是二阶可微函数, $D_t = Z_t^H + (e^J - 1)N_t - \theta\lambda t$, 其中 N_t 是一个泊松过程, 跳跃强度 λ 与 Z_t^H 无关, $\{J_i, i \geq 1\}$ 是一系列独立且同分布的非负随机变量满足 $J_i = e^{Y_i}$, 其中 $Y_i \sim N(\mu_J, \sigma_J^2)$, $\theta = E(J_i - 1) = e^{\mu_J + \frac{1}{2}\sigma_J^2} - 1$, 则有如下伊藤公式:

$$\begin{aligned} df(D_t, t) &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} - \theta\lambda \right) dt + H[(a+b)^2 - 2^{2H} ab] t^{2H-1} \frac{\partial^2 f}{\partial d^2} dt \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial d} dZ_t^H + [f(t, D_t) - f(t-, D_{t-})], \end{aligned}$$

其中 D_{t-} 为 D_t 在跳跃前时刻的值。

1.4 Feynman-Kac 定理

定理 2 考虑随机微分方程 $dX(u) = \beta(u, X(u))du + \gamma(u, X(u))dW(u)$, 设 $h(y)$ 是博雷尔可测函数, 利率 r 是常数. 给定 $T > 0$, $t \in [0, T]$. 定义函数 $f(t, x) = E^{t,x} [e^{-r(T-t)} h(X(T))]$ (假定对所有的 t 和 x , $E^{t,x} |h(X(T))| < \infty$), 那么 $f(t, x)$ 满足偏微分方程

$$f_t(t, x) + \beta(t, x)f_x(t, x) + \frac{1}{2}\gamma^2(t, x)f_{xx}(t, x) = rf(t, x),$$

且对于 $\forall x, f(T, x) = h(x)$ 终值条件成立。

2 欧式看涨期权定价

通常情况下, 期权定价模型的参数是通过市场期权价格进行校准的. 本文直接在风险中性概率测度下进行模型分析^[13], 给定一个概率空间 (Ω, F, Q) , F_t 是一个 σ -代数流且具有完备右连续的通畅性条件, Q 是风险中性概率测度, 且所涉及的随机过程都在此概率空间中, 适应于流的可测过程。

在对波动率过程的建模中, 常见的 Heston 模型因具有均值回归和非负特性等优点, 且只须探索特征函数即可获得期权的定价公式而备受青睐, 模型表示为

$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^s, \\ dv_t = k(\theta - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_t^v, \end{cases} \quad (1)$$

其中: S_t 为资产价格; μ 为资产价格的预期收益率; v_t 为瞬时方差; k 为均值回复速度; θ 为均值回复水平; σ 为波动率过程的波动率; W_t^s 和 W_t^v 为标准布朗运动, 且 $d[W_t^s, W_t^v] = \rho$ 。

但在某些情况下, 股票收益和方差之间的相关性可能是非常数的, 单因素波动率过程无法解释波动率微笑的现象, 因此并不总是适合用于构建期权定价模型^[8]。为解决这个问题提出双因素模型

$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^s + \sqrt{\tilde{v}_t} S_t d\tilde{W}_t^s, \\ dv_t = k(\theta - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_t^v, \\ d\tilde{v}_t = \tilde{k}(\tilde{\theta} - \tilde{v}_t) dt + \tilde{\sigma} \sqrt{\tilde{v}_t} d\tilde{W}_t^v, \end{cases} \quad (2)$$

其中: \tilde{W}_t^s 、 \tilde{W}_t^v 和 W_t^s 均为布朗运动, 且 $d[\tilde{W}_t^s, \tilde{W}_t^v] = \rho dt$, 其余相互独立。

本文在考虑上述 Heston 相关模型及跳扩散模型基础上, 通过补偿泊松过程来建立基于广义分数布朗运动的模型, 提出基于广义分数布朗运动的双重 Heston 跳扩散模型并进行期权定价. 本章首先给出风险中性条件下基于广义分数布朗运动的双重 Heston 跳扩散模型, 再通过测度变换证明只需要求得特征函数就可获得期权定价价格。

2.1 基于广义分数布朗运动的双重 Heston 跳扩散模型

在概率空间 (Ω, F, Q) 中, 股价过程 $S = (S_t)_{t \in [0, T]}$ 和方差过程 $v = (v_t)_{t \in [0, T]}$, $\tilde{v} = (\tilde{v}_t)_{t \in [0, T]}$ 由如下动态模型给出

$$\begin{cases} dS_t = (r - \lambda \mu_S) S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^s + \sqrt{\tilde{v}_t} S_t d\tilde{W}_t^s + S_{t-} (e^J - 1) dN_t, \\ dv_t = k(\theta - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dZ_t^{H,a,b}, \\ d\tilde{v}_t = \tilde{k}(\tilde{\theta} - \tilde{v}_t) dt + \tilde{\sigma} \sqrt{\tilde{v}_t} d\tilde{W}_t^v, \end{cases} \quad (3)$$

其中: λ 表示跳跃强度; J 表示跳跃大小; $\tilde{W}_t^s, \tilde{W}_t^v$ 和 W_t^s 都是标准布朗运动, 且 $d[\tilde{W}_t^s, \tilde{W}_t^v] = \rho dt$, 其余相互独立; $\mu_S = E^Q(e^J - 1) = \frac{p\eta_1}{\eta_1 - 1} + \frac{q\eta_2}{\eta_2 + 1} - 1$; $y = \ln J$ 服从密度为 $pdf_y(z)$ 的非对称双指数分布 $pdf_y(z) = p\eta_1 e^{-\eta_1 z} I_{|z| > 0} + q\eta_2 e^{\eta_2 z} I_{|z| \leq 0}$, $\eta_1 > 1, \eta_2 > 0$, 其中 p 和 q 分别是向上向下异常的概率满足 $p > 0, q > 0, p + q = 1$ 。特别地, 当只考虑一个方差过程 $v = (v_t)_{t \in [0, T]}$, $J = 0$ 且 $b = 0, H = \frac{1}{2}$ 或 $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}, H = \frac{1}{2}$ 时, 模型(3)退化为 Heston 模型; 当 $J = 0$ 且 $b = 0, H = \frac{1}{2}$ 或 $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}, H = \frac{1}{2}$ 时, 模型(3)退化为双重 Heston 模型。

2.2 动态模型的测度变化

本文利用 Random-Nikodym 导数和特征函数获得看涨期权, 在测度 Q 下, 看涨期权价格是收益贴现价值的预期, 可表示为

$$C(T, k) = E^Q(e^{-r(T-t)} \max(S_T - K, 0) | F_t) = e^{-r\tau} E^Q(S_T I_{|x_T > k|} | F_t) - e^{-r\tau} K E^Q(I_{|x_T > k|} | F_t), \quad (4)$$

其中, K 为执行价格; $x_t = \ln S_t$; $\tau = T - t$; $k = \ln K$ 。

使用 Random-Nikodym 导数将测度 Q 转变为测度 Q^S :

$$\frac{dQ^S}{dQ} = \frac{e^{-r\tau} e^{x_T}}{e^{x_t}}, \quad (5)$$

其中 $S = e^{x_t} = E^Q(e^{-r\tau} e^{x_T} | F_t)$ 。

由此可得

$$C(T, k) = S_t E^{Q^S}(I_{|x_T > k|} | F_t) - e^{-r\tau} K E^Q(I_{|x_T > k|} | F_t). \quad (6)$$

密度函数 $f(y)$ 和特征函数 $\varphi(u)$ 满足

$$\varphi(u) = \int_{\mathbf{R}} e^{iuy} f(y) dy, \quad f(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{-iuy} \varphi(u) du, \quad (7)$$

其中 i 为虚数单位。定义在测度 Q^S 下的特征函数为

$$\varphi_s(u) := E^{Q^S}(e^{iux_T} | F_t), \quad (8)$$

在测度 Q 下的特征函数为

$$\varphi(u) := E^Q(e^{iux_T} | F_t). \quad (9)$$

根据 Randon-Nikodym 导数有

$$\varphi_s(u) = E^{Q^S}(e^{iux_T} | F_t) = E^Q\left(\frac{e^{-r\tau} e^{x_T} e^{iux_T}}{e^{x_t}} | F_t\right) = \frac{\varphi(u-i)}{\varphi(-i)} = \frac{\varphi(u-i)}{S_t e^{r\tau}}. \quad (10)$$

综上, 可以得到

$$C(T, k) = S_t \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-iuk} \varphi(u-i)}{iu S_t e^{r\tau}} du \right) - K e^{-r\tau} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-iuk} \varphi(u)}{iu} du \right), \quad (11)$$

由此, 只要求得特征函数就可以知道期权定价价格。

3 特征函数

定理 3 如果标的资产价格遵循模型(3)的表达式, 则关于标的资产的特征函数表达式为

$$\varphi(u; t) = \exp(C(u, t) + D(u, t)x_t + E(u, t)v_t + F(u, t)\tilde{v}_t),$$

其中:

$$C(u, t) = \frac{\tilde{k}\tilde{\theta}}{\tilde{\sigma}_v^2} [(T-t)(\tilde{\zeta} + \rho i u \tilde{\sigma}_v - \tilde{k}) + 2 \ln \frac{(\tilde{\zeta} - \rho i u \tilde{\sigma}_v + \tilde{k}) e^{\tilde{\zeta}(t-T)}}{(\tilde{\zeta} - \rho i u \tilde{\sigma}_v + \tilde{k}) e^{\tilde{\zeta}(t-T)} + \tilde{\zeta} + \rho i u \tilde{\sigma}_v - \tilde{k}}] + \frac{2k\theta}{2\sigma_v^2 H^2 [(a+b)^2 - 2^{2H} ab] b^{-2H} e^{-2iH\pi} \Gamma(2H)} \int \frac{e^{-kt}}{Y(2H, bTe^{i\pi}) - Y(2H, bte^{i\pi})} dt + (r - \lambda\mu_s) iut + \lambda M(u)t;$$

$$D(u, t) = iu;$$

$$E(u, t) = \frac{2e^{-kt} \Gamma(2H+1)}{2\sigma_v^2 H^2 [(a+b)^2 - 2^{2H} ab] b^{-2H} e^{-2iH\pi} \Gamma(2H) [Y(2H, bTe^{i\pi}) - Y(2H, bte^{i\pi})]};$$

$$F(u, t) = \frac{[(iu)^2 - iu] [e^{\tilde{\zeta}(t-T)} - 1]}{\tilde{\zeta} + \rho i u \tilde{\sigma}_v - \tilde{k} + (\tilde{\zeta} - \rho i u \tilde{\sigma}_v + \tilde{k}) e^{\tilde{\zeta}(t-T)}};$$

$$\tilde{\zeta} = \sqrt{(\rho i u \tilde{\sigma}_v - \tilde{k})^2 - \tilde{\sigma}_v^2 [(iu)^2 - iu]}, \quad Y(s, x) = \int_0^x t^{s-1} e^{-t} dt;$$

$$M(u) = \frac{p\eta_1}{\eta_1 - iu} + \frac{q\eta_2}{\eta_2 + iu} - 1.$$

证明 由引理3可得模型(3)伊藤公式

$$dV(S_t, v_t, \tilde{v}_t, t) = \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S_t} S_t (r - \lambda\mu_s) + \frac{\partial V}{\partial v_t} k(\theta - v_t) + \frac{\partial V}{\partial \tilde{v}_t} \tilde{k}(\tilde{\theta} - \tilde{v}_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} S_t^2 (v_t + \tilde{v}_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial v_t^2} \tilde{\sigma}_v^2 \tilde{v}_t + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial S_t \partial \tilde{v}_t} \tilde{\sigma}_v \rho \tilde{v}_t S_t + \frac{\partial^2 V}{\partial v_t^2} \sigma_v^2 v_t H [(a+b)^2 - 2^{2H} ab] t^{2H-1} \right] dt + \frac{\partial V}{\partial S_t} S_t \sqrt{v_t} dW_t^s + \frac{\partial V}{\partial S_t} S_t \sqrt{\tilde{v}_t} d\tilde{W}_t^s + \frac{\partial V}{\partial v_t} \sigma_v \sqrt{v_t} dZ_t^H + \frac{\partial V}{\partial \tilde{v}_t} \tilde{\sigma}_v \sqrt{\tilde{v}_t} d\tilde{W}_t^v + \lambda E [V(t) - V(t-)]. \quad (12)$$

取 $x_t = \ln S_t$, 根据文献[8], 通过定理2, 可得 $\varphi(u)$ 满足

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_t} (r - \lambda\mu_s) + \frac{\partial \varphi}{\partial v_t} k(\theta - v_t) + \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{v}_t} \tilde{k}(\tilde{\theta} - \tilde{v}_t) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_t^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_t} \right) (v_t + \tilde{v}_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v_t^2} \tilde{\sigma}_v^2 \tilde{v}_t + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v_t^2} \sigma_v^2 v_t H [(a+b)^2 - 2^{2H} ab] t^{2H-1} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \tilde{v}_t} \tilde{\sigma}_v \rho \tilde{v}_t + \lambda \int_{\mathbf{R}} (\varphi(x+y) - \varphi(x)) f(y) dy = 0, \quad (13)$$

根据仿射跳扩散模型的框架^[14], 假设解有如下的指数仿射形式:

$$\varphi(u; \tau) = \varphi(u; T-t) = \exp(C(u, T-t) + D(u, T-t)x_t + E(u, T-t)v_t + F(u, T-t)\tilde{v}_t).$$

由初始条件 $C(u, 0) = 0$, $D(u, 0) = iu$, $E(u, 0) = 0$, $F(u, 0) = 0$, 故有

$$(-C_t - D_t x_t - E_t v_t - F_t \tilde{v}_t) + (r - \lambda\mu_s) D + k(\theta - v_t) E + \tilde{k}(\tilde{\theta} - \tilde{v}_t) F + \frac{1}{2} (D^2 - D) v + \frac{1}{2} (D^2 - D) \tilde{v} + \frac{1}{2} F^2 \tilde{\sigma}_v^2 \tilde{v}_t + E^2 \sigma_v^2 v_t H [(a+b)^2 - 2^{2H} ab] t^{2H-1} + F D \tilde{\sigma}_v \rho \tilde{v}_t + \lambda M(u) = 0, \quad (14)$$

$$\text{其中 } M(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{iuy} - 1) f(y) dy = \frac{p\eta_1}{\eta_1 - 1} + \frac{q\eta_2}{\eta_2 + 1} - 1.$$

由此, 可得如下方程组:

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} = (r - \lambda\mu_s) D + k\theta E + \tilde{k}\tilde{\theta} F + \lambda M, \\ \frac{\partial D}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial E}{\partial t} = -kE + \frac{1}{2} (D^2 - D) + E^2 \sigma_v^2 H [(a+b)^2 - 2^{2H} ab] t^{2H-1}, \\ \frac{\partial F}{\partial t} = -\tilde{k}F + \frac{1}{2} (D^2 - D) + \frac{1}{2} F^2 \tilde{\sigma}_v^2 + F D \rho \tilde{\sigma}_v. \end{cases} \quad (15)$$

将方程组求解后, 可得特征方程解析解。

4 数值实验

本章通过数值分析来验证所提出模型的合理性和有效性。考虑到期日 $T=1.0$, $S_0=100$, $r=0.05$ 的欧式看涨期权,其他参数的初始值如下: $a=b=0.5$, $p=q=0.5$, $H=0.6$, $k=2.0$, $\bar{k}=0.5$, $\theta=0.15$, $\bar{\theta}=0.02$, $\rho=0.6$, $\lambda=0.2$ 。

4.1 不同模型下期权价格对比

在给定参数初始值的情况下,对不同期权定价模型的资产价格模拟路径如图 1 所示,其中 B-S、Heston、D-H、Merton 和 GFMJ-DH 分别代表 Black-Scholes 模型、Heston 模型、双重 Heston 模型、跳扩散模型和所提出的基于广义分数布朗运动下的双重 Heston 跳扩散模型。不同模型间股价 S 的变化趋势基本一致,也证明了模型建立的合理性。在所有输入参数相同的条件下,GFMJ-DH 模型表现出更好的稳定性。

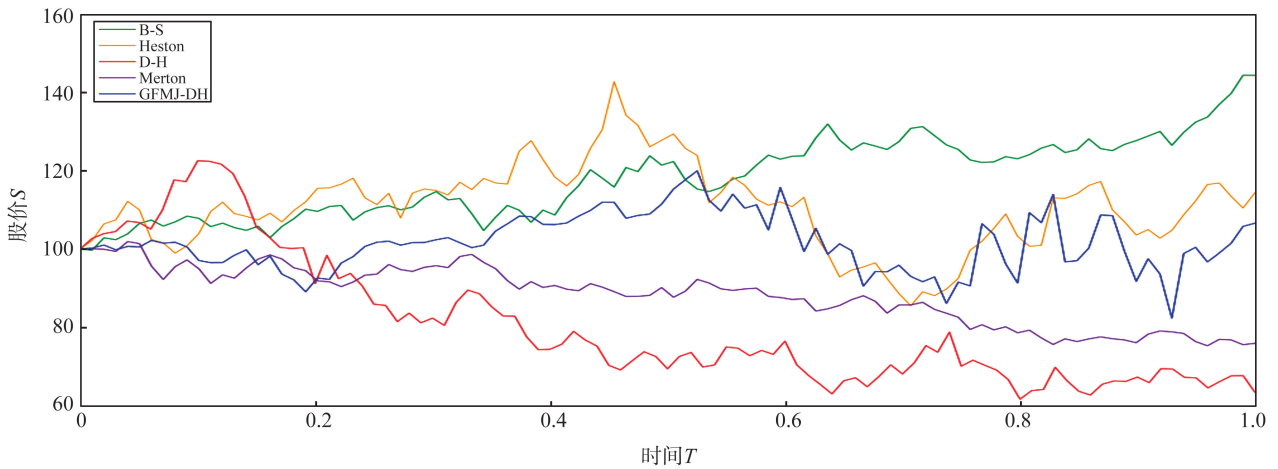


图 1 5 个模型下股价与相关参数的模拟路径
Fig.1 Simulation paths of stock price and related parameters under five models

为验证得到的定价公式(11)的准确性,将其与蒙特卡罗模拟计算出的期权价格进行比较,结果如图 2 所示。图 2 中的结果是通过模拟标的资产价格的 1 000 条路径得到,可以看到定价公式(11)的期权价格与蒙特卡罗模拟价格非常吻合,并且根据模型计算得到欧式看涨期权价格是执行价格的单调递减函数,执行价格越高,实际执行获利的可能性越小,期权价格越低,与经济学中基本原理一致。进一步计算与蒙特卡罗模拟价格之间的相对误差结果如图 3 所示。从图中可以看出,该点的最大相对误差小于 1%。综上,证明了推导所得公式的有效性。

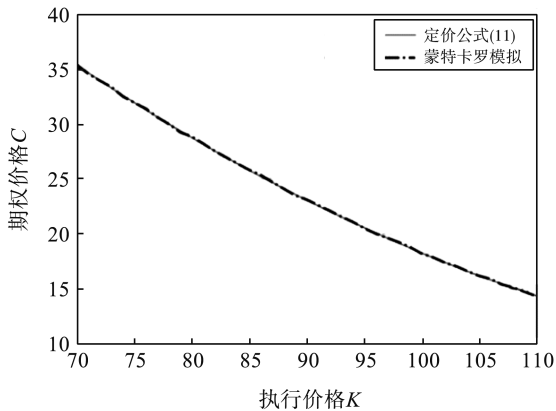


图 2 定价公式(11)与蒙特卡罗模拟期权定价情况对比
Fig.2 Comparison of pricing formula (11) and Monte Carlo simulation option pricing

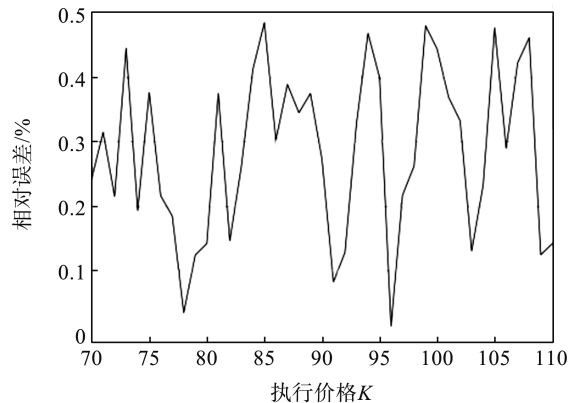


图 3 定价公式(11)期权定价相对误差
Fig.3 Relative error of formula (11) option pricing

4.2 不同参数对模型的影响

本节将基准数据代入基于广义分数布朗运动下的双重 Heston 跳扩散模型的欧式期权定价公式,采用控制变量法研究某个或某些参数对期权定价的影响,应用 Python 软件画图,可以观察到广义分数布朗运动下的双重 Heston 跳扩散模型期权价格的走势。

图 4 展示了相关系数对隐含波动率的影响,分别选择 $\rho=0.6$, $\rho=0$, $\rho=-0.6$ 并画出隐含波动率曲面。例如当 ρ 取值为负时,波动率随收益率下降呈上升趋势,表现出杠杆效应,模型则表现出左端厚尾,而波动率曲面与左端厚尾的市场隐含波动率曲面则一致,表明模型与市场拟合较好^[13]。

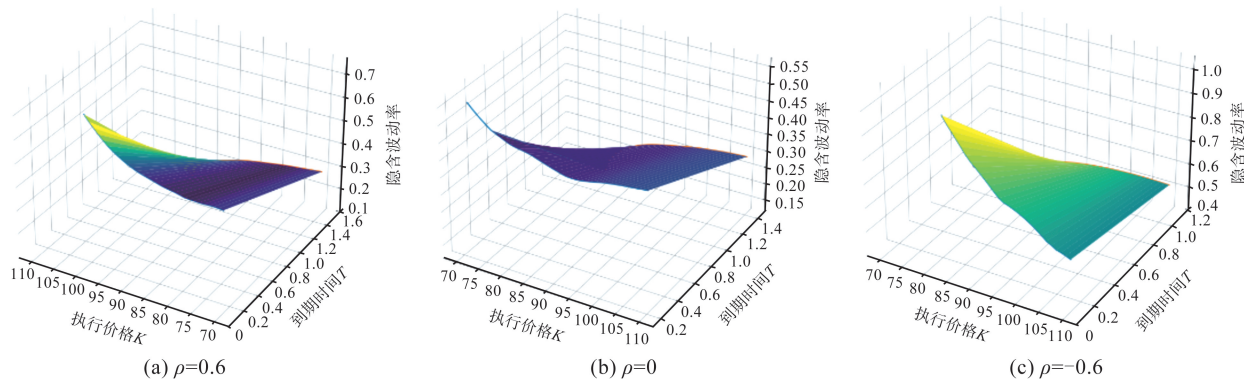


图 4 不同相关系数下的隐含波动率曲面

Fig.4 Implied volatility surface under different correlation coefficients

图 5 描述了 Hurst 指数 H 对期权价格的影响。当执行价格 K 在 $[70, 110]$ 上变化, Hurst 指数 H 分别取 0.5、0.6、0.7 和 0.8,通过定价模型的期权定价价格对比可以发现,随着 K 的增大,期权价格呈下降趋势,且当 H 值增加 K 固定时,期权价格降低。图 6 描述了执行价格 K 和到期时间 T 对欧式看涨期权价格的影响,显示欧式看涨期权随着 K 的增加而减少,与实际情况相符,特别地,当执行价格 K 高于股票价格 S 时,期权持有者不会行权。

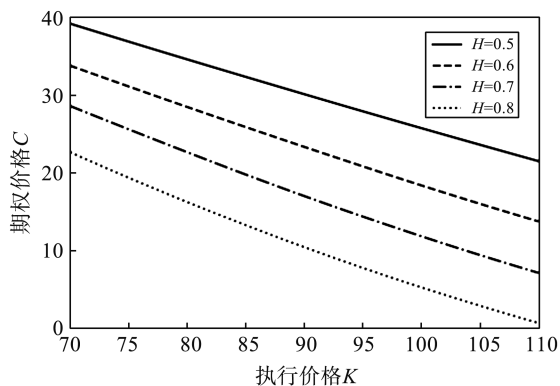


图 5 不同 Hurst 指数 H 下的期权价格

Fig.5 Option prices under different Hurst indexes H

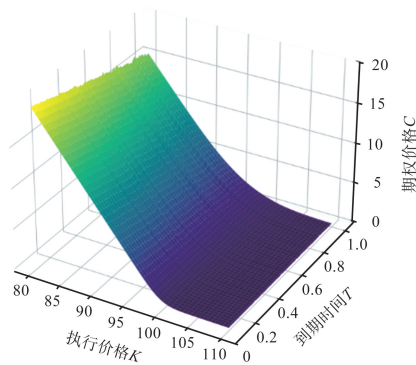


图 6 不同执行价格 K 和到期时间 T 下的期权价格

Fig.6 Option prices at different strike prices K and expiration times T

表 1 列出了不同波动率下的欧式看涨期权价格。对于期权而言,股价波动越大越有利于盈利。从表 1 中可以看出,在保持其余参数相同的条件下,当波动率增大时,期权价格也随之增大。表 2 中的欧式看涨期权价格分别是在 B-S 模型、Heston 模型、双重 Heston 模型、跳扩散模型和广义分数布朗运动下的双重 Heston 跳扩散模型下计算的,具有不同执行价格 K 和到期时间 T 。对于图 3—6 中的参数以及表 1、2 中所示的欧式看涨期权价格的数值分析证明了模型 (3) 的稳健性,符合实际发展情况。

表 1 不同波动率下期权价格

Table 1 Option prices at different volatility

波动率 σ	σ_1	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40
		σ_2	0.30	0.35	0.40	0.45
期权价格 C		20.569	21.385	22.782	23.173	23.652

表2 不同模型的(不同到期时间 T 、不同执行价格 K) 期权价格
Table 2 Option pricing prices for different models ($K=90, 95, 100$)

T	K	B-S	Merton	Heston	Double Heston	GFJD-DH
0.1	90	10.991	10.984	10.954	12.227	10.448
0.2		12.261	12.175	12.191	15.386	11.451
0.3		13.427	14.012	13.632	16.853	12.604
0.4		14.495	14.136	15.402	20.737	13.905
0.5		15.485	15.732	15.382	20.273	15.021
0.6		16.414	16.071	18.313	21.683	16.125
0.7		17.293	17.531	18.353	22.994	16.999
0.8		18.129	19.831	19.455	25.138	17.803
0.9		18.928	18.926	18.937	28.529	19.021
1.0		19.697	21.469	19.781	27.967	19.892
0.1	95	7.045	10.984	7.283	9.051	6.692
0.2		8.693	9.125	9.113	11.505	8.083
0.3		0.052	10.535	11.331	13.378	8.473
0.4		11.246	10.938	12.276	16.723	9.528
0.5		12.327	12.682	13.664	17.460	10.402
0.6		13.328	12.956	15.020	20.853	10.971
0.7		14.265	14.472	16.852	22.211	12.643
0.8		15.150	16.768	16.196	22.367	13.524
0.9		15.994	15.932	19.175	23.843	13.962
1.0		16.801	18.360	17.793	23.735	15.475
0.1	100	4.028	4.050	4.234	5.968	5.046
0.2		5.834	6.250	6.536	9.055	5.245
0.3		7.270	7.723	8.101	11.460	7.423
0.4		8.514	8.279	9.376	13.512	7.863
0.5		9.634	10.079	10.149	15.838	8.117
0.6		10.666	10.250	11.161	18.028	8.311
0.7		11.629	11.835	14.151	17.571	8.781
0.8		12.539	14.008	14.036	20.663	9.938
0.9		13.404	13.292	15.080	22.037	11.082
1.0		14.231	15.630	16.313	25.013	11.963

5 结语

本文主要研究了广义分数布朗运动下的双重 Heston 跳扩散模型的欧式期权定价模型。通过数值实验,验证了模型推导的准确性及定价结果的有效性,并且揭示广义分数布朗运动引入的长记忆效应及跳扩散机制对期权定价具有显著影响,尤其在复杂市场环境下表现出更高的稳健性和定价精度。这表明本文模型在处理市场波动率和跳跃行为的定价问题上具有一定的普遍性和应用潜力。然而,实验过程中也发现,当市场表现出极端或非线性特征时,模型的表现仍存在一定局限,尤其是在参数 H 等接近临界时,定价精度可能出现波动。未来研究可以进一步探索该模型在更广泛的市场条件下的表现,特别是针对参数优化和极端市场情形的处理,以提升模型的适用性和稳定性。

参考文献:

[1] BLACK F, SCHOLLES M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Journal of Political Economy, 1973, 81(3):637-654.

[2] MANDELBROT B B, VAN N J W. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications[J]. SIAM Review,

- 1968, 10(4):422-437.
- [3] BOJDECKI T, GOROSTIZA L G, TALARCZYK A. Sub-fractional Brownian motion and its relation to occupation times[J]. *Statistics & Probability Letters*, 2004, 69(4):405-419.
- [4] MERTON R C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous[J]. *Journal of Financial Economics*, 1976, 3(1/2):125-144.
- [5] 安翔, 郭精军. 混合次分数跳扩散模型下回望期权的定价及模拟[J]. *山东大学学报(理学版)*, 2022, 57(4):100-110.
AN Xiang, GUO Jingjun. Pricing and simulation of lookback options under the mix sub-fractional jump-diffusion model[J]. *Journal of Shandong University(Natural Science)*, 2022, 57(4):100-110.
- [6] CHENG Panhong, XU Zhihong, DAI Zexing. Valuation of vulnerable options with stochastic corporate liabilities in a mixed fractional Brownian motion environment[J]. *Mathematics and Financial Economics*, 2023, 17(3):429-455.
- [7] JI Binxin, TAO Xiangxing, JI Yanting. Barrier option pricing in the sub-mixed fractional Brownian motion with jump environment[J]. *Fractal and Fractional*, 2022, 6(5):244.
- [8] CHRISTOFFERSEN P, HESTON S, JACOBS K. The shape and term structure of the index option smirk: why multifactor stochastic volatility models work so well[J]. *Management Science*, 2009, 55(12):1914-1932.
- [9] CHANG Ying, WANG Yiming, ZHANG Sumei. Option pricing under double Heston jump-diffusion model with approximative fractional stochastic volatility[J]. *Mathematics*, 2021, 9(2):126.
- [10] ZILI M. Generalized fractional Brownian motion[J]. *Modern Stochastics: Theory and Applications*, 2017, 4(1):15-24.
- [11] ARANEDA A A. Price modelling under generalized fractional Brownian motion[EB/OL]. (2021-08-21)[2024-08-05]. <http://arxiv.org/abs/2108.12042>.
- [12] GUO Jingjun, WANG Yubing, KANG Weiyi. Pricing European option under the generalized fractional jump-diffusion model[J]. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2024, 27(4):1917-1947.
- [13] 吴胤昊, 陈荣达, 汪圣楠. 随机利率随机波动率混合指数跳扩散模型下的期权定价[J]. *系统科学与数学*, 2022, 42:2207-2234.
WU Yin hao, CHEN Rong da, WANG Sheng nan. Option pricing under the mixed-exponential jump diffusion model with stochastic internet rate and stochastic volatility[J]. *Journal of Systems Science and Mathematical*, 2022, 42:2207-2234.
- [14] DUFFIE D, PAN J, SINGLETON K. Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions[J]. *Econometrica*, 2000, 68(6):1343-1376.

(编辑:李艺)