

一类具有合作捕获与群体防御的扩散捕食者-食饵模型的力学分析

徐英婷,赵建涛,魏新*

(黑龙江大学数学科学学院,黑龙江 哈尔滨 150080)

摘要:建立具有扩散、合作捕获和群体防御的捕食者-食饵模型,并研究扩散引起的 Turing 不稳定性以及 Turing-Hopf 分支的存在性。以扩散作为分支参数,分析该模型共存稳态解的稳定性,通过计算 Turing-Hopf 分支点附近的规范型,深入探讨系统的复杂动力学性质。此外,通过数值模拟对理论分析的结果进行解释。研究表明,系统在 Turing-Hopf 分支点附近展现出复杂的动力学行为,包括稳态解、齐次周期解、非齐次稳态解和非齐次周期解等。

关键词:合作捕获;群体防御;Turing-Hopf 分支;扩散;捕食者-食饵模型

中图分类号:O175 **文献标志码:**A

引用格式:徐英婷,赵建涛,魏新.一类具有合作捕获与群体防御的扩散捕食者-食饵模型的力学分析[J].山东大学学报(理学版),2025,60(4):104-117.

Dynamical analysis in a diffusive predator-prey model with cooperative hunting and group defense

XU Yingting, ZHAO Jiantao, WEI Xin*

(School of Mathematical Science, Heilongjiang University, Harbin 150080, Heilongjiang, China)

Abstract: In this paper, we propose a diffusive predator-prey model with cooperative hunting and group defense, and investigate the existence of Turing instability and Turing-Hopf bifurcation induced by diffusion. Taking coefficient of diffusion as bifurcation parameter, we analyze the stability of the coexistence equilibrium, and explore the complex dynamical behaviours of the system by calculating the normal forms near the Turing-Hopf bifurcation points. Moreover, we carry out some numerical simulations to illustrate the theoretical analysis. Our study shows that the system demonstrates complex dynamical behaviours near the Turing-Hopf bifurcation point, including steady-state solutions, homogeneous periodic solutions, non-homogeneous steady-state solutions, and non-homogeneous periodic solutions.

Key words: cooperative hunting; group defense; Turing-Hopf bifurcation; diffusion; predator-prey model

0 引言

随着 Lotka-Volterra 系统的建立^[1-2],学者们开始通过建立数学模型来模拟 2 个物种之间的关系。近年来,许多学者热衷于研究种群模型中功能反应函数的影响。针对自然界捕食者的实际情况,Cosner 等^[3]提出了如下带功能反应函数的捕食者-食饵模型:

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u)u - \xi(u)v, \\ \dot{v} = \beta\xi(u)v - mv, \end{cases} \quad (1)$$

其中, u 表示食饵的种群密度, v 表示捕食者的种群密度, $f(u)$ 为食饵出生率, $\xi(u)$ 表示功能反应函数(捕食者单位时间内捕获的食饵数量与食饵分布密度的函数), β 表示捕食者捕食食饵的转化率, m 表示捕食者个

收稿日期:2023-12-01;网络出版地址:2024-10-24 12:07:14

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11901172);黑龙江省省属高校基本科研业务费(2022-KYYWF-1043, 2021-KYYWF-0017)

第一作者:徐英婷(1999—),女,硕士研究生,研究方向为微分方程分支理论的研究及应用。E-mail:xyingt1999@163.com

*通信作者:魏新(1982—),女,副教授,博士,研究方向为微分方程分支理论的研究及应用。E-mail:weixin@hlju.edu.cn

体的自然死亡率。学者们提出了多种功能反应函数,其中最经典的有 Holling I 型、II 型和 III 型^[4-6]。

在自然界中,物种间的群体合作行为对种群的生存和发展有着重要的影响。近年来,捕食者种群间的合作狩猎行为和被捕食者种群间的群体防御行为已成为学者们研究和讨论的热点。事实上,许多物种经常选择合作狩猎以求更快、更高效的捕获猎物,如狼^[7]、狮子^[8]、鬣狗^[9]、电鳗等。考虑到掠食性攻击的速率和处理时间会随捕食者的密度的变化而发生变化,Berec^[10]提出了一个带有合作狩猎和 Holling II 型的捕食者-食饵模型,并结合数值模拟分析了合作捕获对系统动力学性质的影响。合作狩猎可能会导致捕食者的攻击率随捕食者密度的增加而增加,因此在 Berec 模型的基础上,Alves 和 Hilker^[11]在捕食者的攻击率中增加了一个合作项,建立了具有 Holling I 型功能反应函数的合作狩猎模型:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = ru\left(1 - \frac{u}{K}\right) - (\lambda + cv)uv, \\ \frac{dv}{dt} = \beta(\lambda + cv)uv - mv, \end{cases} \quad (2)$$

其中, r 表示食饵的内禀增长率, K 表示食饵的最大环境容纳量。 λ 表示捕食者对食饵的攻击率, $c \geq 0$ 表示捕食者之间的合作捕猎程度, r, K, β, m, λ 均为正常数。若 $c=0$,则系统(2)变为经典的 Logistic 增长 Lotka-Volterra 模型。之后,越来越多具有合作狩猎捕食者-食饵模型得到了广泛的研究。

近年来,许多文献也用相应的功能反应函数来描述食饵之间的群体防御^[12-18]。Venturino 和 Petrovski^[19]提出了一个具有一般性的功能反应函数 λu^α ,其中 $\alpha \in (0, 1)$ 表示食饵群体的聚集效率。Du 等^[20]同时考虑了捕食者的合作捕猎和食饵的群体防御,提出了如下具合作捕获和群体防御的捕食者-食饵模型:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = ru\left(1 - \frac{u}{K}\right) - (\lambda + cv)u^\alpha v, \\ \frac{dv}{dt} = \beta(\lambda + cv)u^\alpha v - mv, \end{cases} \quad (3)$$

针对参数在不同变化范围内,分析了物种共存、持续振荡或单个物种存活的情况。研究表明,合作狩猎和群体防御可能会改变平衡点的数量,影响正平衡点的稳定性。

然而,捕食者和食饵在不同位置的分布是不均匀的,因此,空间扩散在种群进化中起着重要作用。近年来,扩散引起的 Turing 不稳定性和扩散导致的 Turing-Hopf 分支问题引起了学者们的广泛关注,而关于具扩散、合作狩猎和群体防御的捕食者-食饵模型的研究尚未出现。因此,本文将基于文献[20]中的模型,研究如下具有合作捕获和群体防御的捕食者-食饵反应扩散系统:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u = ru\left(1 - \frac{u}{K}\right) - (\lambda + cv)u^\alpha v, & x \in (0, l\pi), \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d_2 \Delta v = \beta(\lambda + cv)u^\alpha v - mv, & x \in (0, l\pi), \\ \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, & x = 0, l\pi, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, \quad v(x, 0) = v_0(x) \geq 0, & x \in (0, l\pi), \end{cases} \quad (4)$$

其中 d_1, d_2 分别为食饵和捕食者的扩散系数。对系统进行无量纲化,令

$$\tilde{v} = \frac{\lambda}{m}v, \quad \tilde{t} = mt, \quad \tilde{r} = \frac{r}{m}, \quad \tilde{c} = \frac{cm}{\lambda^2}, \quad \tilde{\beta} = \frac{\lambda\beta}{m},$$

并去掉上标,可得到如下简化系统:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u = ru\left(1 - \frac{u}{K}\right) - (1 + c\tilde{v})u^\alpha v, & x \in (0, l\pi), \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d_2 \Delta v = \beta(1 + c\tilde{v})u^\alpha v - v, & x \in (0, l\pi), \\ \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, & x = 0, l\pi, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, \quad v(x, 0) = v_0(x) \geq 0, & x \in (0, l\pi). \end{cases} \quad (5)$$

本文假设 α, r, c, β, K 均为正, 且 $\alpha \in (0, 1)$ 。

1 扩散诱导的 Turing 不稳定性和 Turing-Hopf 分支

本章考虑了扩散对平衡解稳定性的影响。经计算可得, 系统(5)有两个边界平衡: $E_0 = (0, 0)$, $E_1 = (K, 0)$, 以及正平衡解 $E_* = (u_*, v_*)$, 并且 $E_* = (u_*, v_*)$, 满足

$$\begin{cases} ru\left(1-\frac{u}{K}\right) = \frac{1}{\beta}v, \\ v = \frac{1-\beta u^\alpha}{c\beta u^\alpha}. \end{cases} \tag{6}$$

定义

$$c_1 = \frac{1-\beta u_1^\alpha}{\beta^2 r u_1^{\alpha+1} \left(1-\frac{u_1}{K}\right)}. \tag{7}$$

其中 u_1 如图 1 所示。关于正平衡解的存在性, 主要讨论以下 3 种情形:

- (1) 当 $\left(\frac{1}{\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha}} < K$ 时, 系统(5)有唯一正平衡解 $E_* = (u_*, v_*)$;
- (2) 当 $\left(\frac{1}{\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha}} > K$ 且 $c = c_1$ 时, 系统(5)有唯一正平衡解 $E_{**} = (u_{**}, v_{**})$;
- (3) 当 $\left(\frac{1}{\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha}} > K$ 且 $c > c_1$ 时, 系统(5)有两个正平衡解 $E_+ = (u_+, v_+)$ 和 $E_- = (u_-, v_-)$, 其中 c_1 的定义见式(7), E_*, E_{**}, E_-, E_+ 均满足公式(6)。

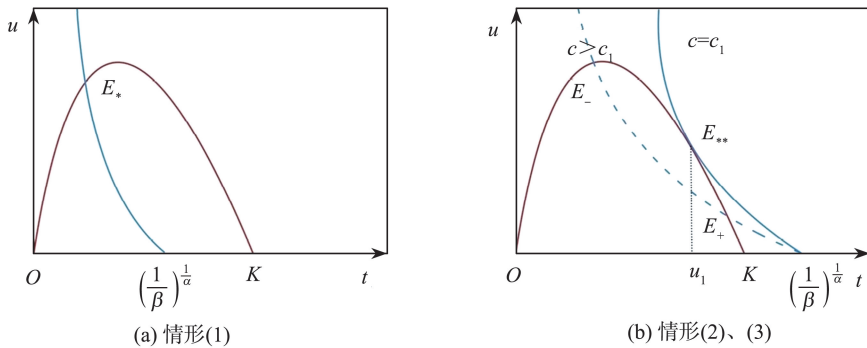


图 1 正平衡解的存在性

Fig.1 Existence of a positive equilibrium point

由参考文献[20] 定理 3.2、定理 3.5 可得以下结论。

引理 1 记 $c_H^* = \frac{1-\beta(u_H^*)^\alpha}{\beta^2(u_H^*)^{\alpha+1}r\left(1-\frac{u_H^*}{K}\right)}$ 。若假设条件

$$H_1: \frac{1-\alpha}{2-\alpha}K < \left(\frac{1}{\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha}} < K \text{ 且 } c < c_H^*,$$

$$H_2: \left(\frac{1}{\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha}} > K \text{ 且 } c_1 < c < c_H^*$$

中任一个成立, 则当扩散不出现 ($d_1 = d_2 = 0$) 时, E_* 局部渐近稳定。并且当 $c = c_H^*$ 时, 系统(5)在 E_* 处经历 Hopf 分支, 其中 u_H^* 满足 $r\left(1-\alpha-\frac{2-\alpha}{K}u_H^*\right) + 1-\beta u_H^{*\alpha} = 0$ 。

定义实值 Sobolev 空间为

$$X := \left\{ (u, v)^T \in H^2(0, l\pi) \times H^2(0, l\pi), \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0, x = 0, l\pi \right\}.$$

系统(5)在其平衡解处的线性化系统可表示为

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix} = \mathbf{D} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} + \mathbf{A} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} =: \mathbf{L} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \tag{8}$$

其中

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} r(1 - \frac{u}{K}) - ru \frac{1}{K} - \alpha v(1 + cv) u^{\alpha-1} & -u^\alpha - 2cu^\alpha v \\ \alpha\beta v(1 + cv) u^{\alpha-1} & \beta(1 + 2cv) u^\alpha - 1 \end{pmatrix}.$$

易知 $D\Delta$ 在 X 上的特征值为 $-d_1 \frac{n^2}{l^2}, -d_2 \frac{n^2}{l^2}, n \in \mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, 从而, 对应的特征方程可写成

$$\Delta_n = |\lambda I + \frac{n^2}{l^2} \mathbf{D} - \mathbf{A}| = 0, \quad n \in \mathbf{N}_0. \tag{9}$$

定理 1 关于系统(5), 有以下结论:

- (1) $E_0(0, 0)$ 是不稳定的;
- (2) 若 $d_2 > \frac{l^2}{n^2}(\beta K^\alpha - 1)$, 则 $E_1(K, 0)$ 局部渐近稳定;
- (3) 若 $d_2 < \frac{l^2}{n^2}(\beta K^\alpha - 1)$, 则 $E_1(K, 0)$ 不稳定。

证明 对 $E_0(0, 0)$, 经计算可得, 系统(5)在 $E_0(0, 0)$ 处的雅可比矩阵为

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

因此, 式(9)变为

$$\left(\lambda + \frac{d_1 n^2}{l^2} - r\right) \left(\lambda + \frac{d_2 n^2}{l^2} + 1\right) = 0,$$

注意到 $r > 0$, 所以 $E_0(0, 0)$ 不稳定。类似地, 可计算得到系统(5)在 $E_1(K, 0)$ 处的雅可比矩阵为

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -r & -K^\alpha \\ 0 & \beta K^\alpha - 1 \end{pmatrix},$$

于是, 式(9)变为

$$\left(\lambda + \frac{n^2 d_1}{l^2} + r\right) \left(\lambda + \frac{n^2 d_2}{l^2} - \beta K^\alpha + 1\right) = 0,$$

因此, 关于 $E_1(K, 0)$ 的稳定性有以下结果:

- (1) 若 $d_2 > \frac{l^2}{n^2}(\beta K^\alpha - 1)$, 则 $E_1(K, 0)$ 局部渐近稳定;
- (2) 若 $d_2 < \frac{l^2}{n^2}(\beta K^\alpha - 1)$, 则 $E_1(K, 0)$ 不稳定。

考虑到正平衡解 $E_- = (u_-, v_-)$ 稳定性分析的方法与 $E_* = (u_*, v_*)$ 的方法相同。在下文中, 始终将系统(5)的正平衡解记为 $E_* = (u_*, v_*)$ 。下面讨论正平衡解 $E_*(u_*, v_*)$ 的稳定性, 并推导出系统(5)在 $E_*(u_*, v_*)$ 经历 Turing-Hopf 分支的充分条件。

定理 2 当 $c < c_H^*$ 时, 对于系统(5), 存在正整数 k_* , 使得当 $n \geq k_*$ 时, 有

(1) 若 $d_2 > d_2^*$, 则 E_* 是局部渐近稳定的。

(2) 若 $d_2 < d_2^*$, 则 E_* 不稳定。此外, 当 $d_2 = d_2^*$ 时, 系统(5)在 E_* 点处经历 Turing 分支; 进一步, 当 $(c, d_2) = (c_H^*, d_2^*)$ 时, 系统(5)在 (u_*, v_*) 处经历 Turing-Hopf 分支, 其中

$$k_* = \left\lfloor \sqrt{\frac{rc(1-\alpha-\frac{2-\alpha}{K}u_*) + \alpha u_*^{\alpha-1}(1+cv_*)(1+2cv_*)}{cd_1}} \right\rfloor + 1,$$

$$d_2(n^2) = \frac{l^2 n^2 d_1 \beta c u_*^\alpha v_* - l^4 (\beta c u_*^\alpha v_* r(1-\alpha-\frac{2-\alpha}{K}u_*) + \alpha u_*^{\alpha-1} v_* (1+cv_*))}{n^2(n^2 d_1 - l^2 r(1-\alpha-\frac{2-\alpha}{K}u_*))}, \quad (10)$$

$$k_0^* = \{n : d_2((k_0^*)^2) = \max_{n \in \mathbf{N}} d_2(n^2)\},$$

$$d_2^* = d_2((k_0^*)^2).$$

证明 $E_*(u^*, v^*)$ 处对应的雅可比矩阵为

$$A_{E_*} = \begin{pmatrix} r(1-\alpha-\frac{2-\alpha}{K}u_*) & -u_*^\alpha(1+2cv_*) \\ \beta \alpha v_*^\alpha(1+cv_*)u_*^{\alpha-1} & \beta c u_*^\alpha v_* \end{pmatrix},$$

其对应的特征方程可写成

$$\Delta_n = \lambda^2 - T_n \lambda + D_n = 0, \quad n \in \mathbf{N}_0, \quad (11)$$

其中

$$T_n = -\frac{n^2}{l^2} d_1 - \frac{n^2}{l^2} d_2 + r(1-\alpha-\frac{2-\alpha}{K}u_*) + \beta c u_*^\alpha v_*,$$

$$D_n = \frac{n^4}{l^4} d_1 d_2 - \frac{n^2}{l^2} d_1 \beta c u_*^\alpha v_* - \frac{n^2}{l^2} d_2 r(1-\alpha-\frac{2-\alpha}{K}u_*)$$

$$+ \beta u_*^\alpha v_* r c (1-\alpha-\frac{2-\alpha}{K}u_*) + \alpha u_*^{\alpha-1} v_* (1+2cv_*). \quad (12)$$

当 $c < c_H^*$ 时, 如果存在 $n \in \mathbf{N}$, 使得 $\Delta_n = 0$ 的特征根具有正实部, 则 Turing 不稳定性出现。注意到当 $c < c_H^*$ 时, $T_n < 0$, 因此, 特征根的实部的符号由 D_n 的符号决定。

定义

$$d_2(n^2) = \frac{l^2 n^2 d_1 \beta c u_*^\alpha v_* - l^4 (\beta c u_*^\alpha v_* r(1-\alpha-\frac{2-\alpha}{K}u_*) + \alpha u_*^{\alpha-1} v_* (1+2cv_*))}{n^2(n^2 d_1 - l^2 r(1-\alpha-\frac{2-\alpha}{K}u_*))}.$$

由引理 1 知 $r(1-\alpha-\frac{2-\alpha}{K}u_*) < 0$ 。结合式(12)可得, $D_n = 0$ 等价于方程(10), 并且当 $d_2 < d_2(n^2)$ 时, $D_n < 0$; 当 $d_2 > d_2(n^2)$ 时, $D_n > 0$ 。因此, 当 $d_2 = d_2(n^2)$ 时, 系统(5)在 E_* 处发生 Turing 分支。记

$$k_* = \left\lfloor \sqrt{\frac{rc(1-\alpha-\frac{2-\alpha}{K}u_*) + \alpha u_*^{\alpha-1}(1+cv_*)(1+2cv_*)}{cd_1}} \right\rfloor + 1.$$

经计算可得, 当 $n \geq k_*$ 时, $d_2(n^2) > 0$ 。将 $d_2(n^2)$ 关于 n^2 求导, 可得

$$\frac{dd_2(n^2)}{dn^2} = \frac{-d_1 E n^4 + 2d_1 F n^2 - FG}{(d_1 n^4 - G n^2)^2},$$

其中

$$\begin{aligned}
 E &= l^2 d_1 \beta c u_*^\alpha v_* , \\
 F &= l^4 \left(\beta u_*^\alpha v_* r c \left(1 - \alpha - \frac{2-\alpha}{K} u_* \right) + v_* \alpha u_*^{\alpha-1} (1 + 2c v_*) \right) , \\
 G &= l^2 r \left(1 - \alpha - \frac{2-\alpha}{K} u_* \right) .
 \end{aligned} \tag{13}$$

令

$$\Phi(n^2) = -d_1 E n^4 + 2d_1 F n^2 - FG,$$

则

$$\text{Sign} \left\{ \frac{d d_2(n^2)}{d n^2} \right\} = \text{Sign} \{ \Phi(n^2) \} ,$$

令 $x = n^2$, 则

$$\Phi(x) = -d_1 E x^2 + 2d_1 F x - FG.$$

由引理 1 可得, $D_0 = \beta u_*^\alpha v_* r c \left(1 - \alpha - \frac{2-\alpha}{K} u_* \right) + \alpha u_*^{\alpha-1} v_* (1 + 2c v_*) > 0$, 因此 $F > 0$. 注意到 $r \left(1 - \alpha - \frac{2-\alpha}{K} u_* \right) < 0$, 从而 $G < 0$. 于是,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \Phi(x) = -FG > 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) < 0,$$

因此, 必存在 $x_* > 0$ 使得 $\Phi(x_*) = 0$, 并且当 $x \in (0, x_*)$ 时, $\Phi(x) > 0$; 而当 $x \in (x_*, +\infty)$ 时, $\Phi(x) < 0$. 令 $k_m = \lfloor \sqrt{x_*} \rfloor$, 若 $k_m \leq k_*$, 则 $d_2(n^2)$ 关于 n 递减; 若 $k_m > k_*$, 则当 $n \in [k_*, k_m]$ 时, $d_2(n^2)$ 关于 n 递增, 当 $n \in [k_m + 1, \infty]$ 时, $d_2(n^2)$ 关于 n 递减. 综上所述, 当 $k = k_*$, $k = k_m$ 或者 $k = k_m + 1$ 时, $d_2(n^2)$ 会达到最大值, 具体表述如下:

$$k_0^* = \begin{cases} k_* , & k_m < k_* , \\ k_m , & k_m \geq k_* \text{ 且 } d_2(k_m^2) \geq d_2((k_m + 1)^2) , \\ k_m + 1 , & k_m \geq k_* \text{ 且 } d_2(k_m^2) < d_2((k_m + 1)^2) , \end{cases}$$

因此, 可得 $d_2^* = d_2((k_0^*)^2) = \max_{n \in \mathbb{N}} d_2(n^2)$, 定理得证。

2 Turing-Hopf 分支的规范型

为研究系统(5)在 Turing-Hopf 分支点附近的时间和空间动力学行为, 本章将计算 Turing-Hopf 分支的规范型. 由于 v_* 中包含分支参数 c , E_* 会随着 c 的微小扰动发生变化, 这大大增加了规范型的计算难度.

假设 $\bar{u} = u - u_*$, $\bar{v} = v - v_*$, 下文为叙述方便, 均省略“~”, 系统(5)可重写为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u = r(u + u_*) \left(1 - \frac{(u + u_*)}{K} \right) - (1 + c(v + v_*)) (u + u_*)^\alpha (v + v_*), \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d_2 \Delta v = \beta (1 + c(v + v_*)) (u + u_*)^\alpha (v + v_*) - (v + v_*). \end{cases} \tag{14}$$

引入微扰参数 μ_1 和 μ_2 , 设 $\mu_1 = c - c^*$, $\mu_2 = d_2 - d_2^*$, 则 $\mu = (\mu_1, \mu_2) = (0, 0)$ 为平面 $\mu_1 - \mu_2$ 上的 Turing-Hopf 分支点. 接下来, 将上述系统 Taylor 展开, 有

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \Delta u + a_{11} u + a_{12} v + a_{13} u^2 + a_{14} uv + a_{15} v^2 + a_{16} u^2 v + a_{17} uv^2 + a_{18} u^3 + \mathcal{O}(4), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = (d_2 + \mu_2) \Delta v + a_{21} u + a_{22} v + a_{23} u^2 + a_{24} uv + a_{25} v^2 + a_{26} u^2 v + a_{27} uv^2 + a_{28} u^3 + \mathcal{O}(4), \end{cases} \tag{15}$$

其中

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= r \left(1 - \alpha - \frac{2-\alpha}{K} u_* \right) , \\
 a_{12} &= -u_*^\alpha (1 + 2(c + \mu_1) v_*) ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{13} &= -\frac{r}{k} - \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)r(u_*^{-1} - \frac{1}{K}), \\
a_{14} &= -\alpha u_*^{\alpha-1}(1+2(c+\mu_1)v_*), \\
a_{15} &= -(c+\mu_1)u_*^\alpha, \\
a_{16} &= \frac{1}{2} - \alpha(\alpha-1)u_*^{\alpha-2}(1+2(c+\mu_1)v_*), \\
a_{17} &= -(c+\mu_1)\alpha u_*^{\alpha-1}, \\
a_{18} &= -\frac{1}{6}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)u_*^{\alpha-3}v_*(1+(c+\mu_1)v_*), \\
a_{21} &= \alpha\beta u_*^{\alpha-1}v_*(1+(c+\mu_1)v_*), \\
a_{22} &= \beta(c+\mu_1)u_*^\alpha v_*, \\
a_{23} &= \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)\beta u_*^{\alpha-2}v_*(1+(c+\mu_1)v_*), \\
a_{24} &= \alpha\beta u_*^{\alpha-1}(1+2(c+\mu_1)v_*), \\
a_{25} &= \beta(c+\mu_1)u_*^\alpha, \\
a_{26} &= \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)\beta u_*^{\alpha-2}(1+2(c+\mu_1)v_*), \\
a_{27} &= \beta\alpha(c+\mu_1)u_*^{\alpha-1}, \\
a_{28} &= \frac{1}{6}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\beta u_*^{\alpha-3}v_*(1+(c+\mu_1)v_*).
\end{aligned} \tag{16}$$

设 $U(t) = (u(x, t), v(x, t))^T$, 系统(15)可以变形为

$$\frac{dU}{dt} = D(c^* + \mu_1, d_2^* + \mu_2)\Delta U(t) + L(c^* + \mu_1, d_2^* + \mu_2)U' + F(c^* + \mu_1, d_2^* + \mu_2, U'). \tag{17}$$

结合系统(15), 可以计算出

$$D(\mu) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2^* + \mu_2 \end{pmatrix}, \quad L(\mu) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

并且

$$F(u, v, \mu_1, \mu_2) = \begin{pmatrix} F^1(u, v, \mu_1, \mu_2) \\ F^2(u, v, \mu_1, \mu_2) \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{cases} F^1(u, v, \mu_1, \mu_2) = a_{13}u^2 + a_{14}uv + a_{15}v^2 + a_{16}u^2v + a_{17}uv^2 + a_{18}u^3, \\ F^2(u, v, \mu_1, \mu_2) = a_{23}u^2 + a_{24}uv + a_{25}v^2 + a_{26}u^2v + a_{27}uv^2 + a_{28}u^3, \end{cases}$$

为方便叙述, 令

$$\begin{aligned}
D(\mu) &= D_0 + D_1^{(1,0)}\mu_1 + D_1^{(0,1)}\mu_2, \\
L(\mu) &= L_0 + L_1^{(1,0)}\mu_1 + L_1^{(0,1)}\mu_2,
\end{aligned}$$

其中

$$L_0 = L(0) = \begin{pmatrix} a_{0,11} & a_{0,12} \\ a_{0,21} & a_{0,22} \end{pmatrix}.$$

设

$$\mathcal{M}_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda + d_1 \frac{n^2}{l^2} - a_{0,11} & -a_{0,12} \\ -a_{0,21} & \lambda + d_1 \frac{n^2}{l^2} - a_{0,22} \end{pmatrix}.$$

经计算,可以得出

$$\begin{aligned} \Phi_1(\theta) &= (\xi_0, \bar{\xi}_0), \quad \Phi_2(\theta) = \xi_{n_*}, \\ \Psi_1(\theta) &= \text{col}(\eta_0^T, \bar{\eta}_0^T), \quad \Psi_2(S) = \eta_{n_*}^T, \\ \xi_0 &= \begin{pmatrix} \xi_{01} \\ \xi_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i\omega_0 - a_{0,11}}{a_{0,12}} \end{pmatrix}, \quad \eta_0 = \begin{pmatrix} \eta_{01} \\ \eta_{02} \end{pmatrix} = D_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i\omega_0 - a_{0,11}}{a_{0,21}} \end{pmatrix}, \\ \bar{\xi}_0 &= \begin{pmatrix} \bar{\xi}_{01} \\ \bar{\xi}_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-i\omega_0 - a_{0,11}}{a_{0,12}} \end{pmatrix}, \quad \bar{\eta}_0 = \begin{pmatrix} \bar{\eta}_{01} \\ \bar{\eta}_{02} \end{pmatrix} = D_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-i\omega_0 - a_{0,11}}{a_{0,21}} \end{pmatrix}, \\ \xi_{n_*} &= \begin{pmatrix} \xi_{n_*1} \\ \xi_{n_*2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ d_1 \left(\frac{n_*}{l}\right)^2 - a_{0,11} \\ a_{0,12} \end{pmatrix}, \quad \eta_{n_*} = \begin{pmatrix} \eta_{n_*1} \\ \eta_{n_*2} \end{pmatrix} = D_2 \begin{pmatrix} 1 \\ d_1 \left(\frac{n_*}{l}\right)^2 - a_{0,11} \\ a_{0,21} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中

$$D_1 = \frac{a_{0,21}a_{0,12}}{a_{0,21}a_{0,12} + (i\omega_0 - a_{0,11})^2},$$

$$D_2 = \frac{a_{0,21}a_{0,12}}{a_{0,21}a_{0,12} + \left(d_1 \frac{n_*^2}{l^2} - a_{0,11}\right)^2}.$$

基于文献[21]中规范型的计算方法,可以得到 Turing-Hopf 分支的三阶截断规范型为

$$\dot{z} = Bz + \begin{pmatrix} B_{11}\mu_1 z_1 + B_{21}\mu_2 z_1 \\ B_{11}\mu_1 z_1 + B_{21}\mu_2 z_1 \\ B_{13}\mu_1 z_3 + B_{23}\mu_2 z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{210}z_1^2 z_2 + B_{102}z_1^2 z_2 \\ B_{210}z_1^2 z_2 + B_{102}z_1^2 z_2 \\ B_{111}z_1 z_2 z_3 + B_{003}z_3^3 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(|z| + |\mu^2|), \tag{18}$$

其中

$$\begin{aligned} B_{11} &= \eta_0^T L_1^{(1,0)} \xi_0, \\ B_{21} &= \eta_0^T L_1^{(0,1)} \xi_0, \\ B_{13} &= \eta_{n_*}^T \left(-\frac{n_*^2}{l^2} D_1^{(1,0)} \xi_{n_*} + L_1^{(1,0)} \xi_{n_*} \right), \\ B_{23} &= \eta_{n_*}^T \left(-\frac{n_*^2}{l^2} D_1^{(0,1)} \xi_{n_*} + L_1^{(0,1)} \xi_{n_*} \right), \end{aligned} \tag{19}$$

并且

$$\begin{aligned} B_{210} &= C_{210} + \frac{3}{2}(D_{210} + E_{210}), \\ B_{102} &= C_{102} + \frac{3}{2}(D_{102} + E_{102}), \\ B_{111} &= C_{111} + \frac{3}{2}(D_{111} + E_{111}), \\ B_{003} &= C_{003} + \frac{3}{2}(D_{003} + E_{003}). \end{aligned} \tag{20}$$

下面,还需计算 C_{ijk} 、 D_{ijk} 和 E_{ijk} 。设

$$F_{j_1 j_2}^{(1)} = \frac{\partial^{j_1+j_2} F^{(1)}}{\partial u^{j_1} \partial v^{j_2}}(0,0,0,0), \quad F_{j_1 j_2}^{(2)} = \frac{\partial^{j_1+j_2} F^{(2)}}{\partial u^{j_1} \partial v^{j_2}}(0,0,0,0)。$$

令

$$\mathbf{F}_{jij_2} = (\mathbf{F}_{jij_2}^{(1)}, \mathbf{F}_{jij_2}^{(2)})^T,$$

则通过计算,可得出

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{200} &= \mathbf{F}_{20} + 2\xi_{02}\mathbf{F}_{11} + \xi_{02}^2\mathbf{F}_{02} = \overline{\mathbf{A}_{020}}, \\ \mathbf{A}_{002} &= \mathbf{F}_{20} + 2\xi_{n_*2}\mathbf{F}_{11} + \xi_{n_*2}^2\mathbf{F}_{02}, \\ \mathbf{A}_{110} &= 2(\mathbf{F}_{20} + 2\text{Re}(\xi_{02})\mathbf{F}_{11} + |\xi_{02}|^2\mathbf{F}_{02}), \\ \mathbf{A}_{101} &= 2(\mathbf{F}_{20} + (\xi_{02} + \xi_{n_*2})\mathbf{F}_{11} + \xi_{02}\xi_{n_*2}\mathbf{F}_{02}) = \overline{\mathbf{A}_{011}}, \\ \mathbf{A}_{210} &= 3(\mathbf{F}_{30} + (2\xi_{02} + \overline{\xi_{02}})\mathbf{F}_{21} + (\xi_{02}^2 + 2|\xi_{02}|^2)\mathbf{F}_{12} + |\xi_{02}|^2\xi_{02}\mathbf{F}_{03}), \\ \mathbf{A}_{102} &= 3(\mathbf{F}_{30} + (\xi_{02} + 2\xi_{n_*2})\mathbf{F}_{21} + (\xi_{n_*2}^2 + 2\xi_{02}\xi_{n_*2})\mathbf{F}_{12} + \xi_{02}\xi_{n_*2}^2\mathbf{F}_{03}), \\ \mathbf{A}_{111} &= 6(\mathbf{F}_{30} + (\xi_{n_*2} + 2\text{Re}\xi_{02})\mathbf{F}_{21} + (|\xi_{02}|^2 + 2\xi_{n_*2}\text{Re}\xi_{02})\mathbf{F}_{12} + |\xi_{02}|^2\xi_{n_*2}\mathbf{F}_{03}), \\ \mathbf{A}_{003} &= \mathbf{F}_{30} + 3(\xi_{n_*2}\mathbf{F}_{21} + \xi_{n_*2}^2\mathbf{F}_{12}) + \xi_{n_*2}^2\mathbf{F}_{03}. \end{aligned} \quad (21)$$

因此

$$\mathbf{C}_{210} = \frac{1}{6l\pi}\boldsymbol{\eta}_0^T\mathbf{A}_{210}, \quad \mathbf{C}_{102} = \frac{1}{6l\pi}\boldsymbol{\eta}_0^T\mathbf{A}_{102}, \quad \mathbf{C}_{111} = \frac{1}{6l\pi}\boldsymbol{\eta}_{n_*}^T\mathbf{A}_{111}, \quad \mathbf{C}_{003} = \frac{1}{6l\pi}\boldsymbol{\eta}_{n_*}^T\mathbf{A}_{003}.$$

并且

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{210} &= \frac{1}{6l\pi i\omega_0} [-(\boldsymbol{\eta}_0^T\mathbf{A}_{200})(\boldsymbol{\eta}_0^T\mathbf{A}_{110}) + (\boldsymbol{\eta}_0^T\mathbf{A}_{110})(\overline{\boldsymbol{\eta}_0^T\mathbf{A}_{110}}) + \frac{2}{3}(\boldsymbol{\eta}_0^T\mathbf{A}_{020})(\overline{\boldsymbol{\eta}_0^T\mathbf{A}_{200}})], \\ \mathbf{D}_{102} &= \frac{1}{6l\pi i\omega_0} [-2(\boldsymbol{\eta}_0^T\mathbf{A}_{200})(\boldsymbol{\eta}_0^T\mathbf{A}_{002}) + (\boldsymbol{\eta}_0^T\mathbf{A}_{110})(\overline{\boldsymbol{\eta}_0^T\mathbf{A}_{002}}) + 2(\boldsymbol{\eta}_0^T\mathbf{A}_{002})(\overline{\boldsymbol{\eta}_{n_*}^T\mathbf{A}_{101}})], \\ \mathbf{D}_{111} &= \frac{1}{6l\pi i\omega_0} [(\boldsymbol{\eta}_{n_*}^T\mathbf{A}_{011})(\overline{\boldsymbol{\eta}_{n_*}^T\mathbf{A}_{110}}) + (\boldsymbol{\eta}_{n_*}^T\mathbf{A}_{101})(\boldsymbol{\eta}_0^T\mathbf{A}_{110})], \\ \mathbf{D}_{003} &= \frac{1}{6l\pi i\omega_0} [(\boldsymbol{\eta}_{n_*}^T\mathbf{A}_{011})(\overline{\boldsymbol{\eta}_{n_*}^T\mathbf{A}_{002}}) + (\boldsymbol{\eta}_{n_*}^T\mathbf{A}_{101})(\boldsymbol{\eta}_0^T\mathbf{A}_{002})], \\ \mathbf{E}_{210} &= \frac{1}{6}\boldsymbol{\eta}_0^T [S_{y_{z1}}\langle h_{00110} \rangle + S_{y_{z2}}\langle h_{00200} \rangle], \\ \mathbf{E}_{102} &= \frac{1}{6}\boldsymbol{\eta}_0^T [S_{y_{z1}}\langle h_{00002} \rangle + S_{y_{z3}}\langle h_{n_*0101} \rangle], \\ \mathbf{E}_{111} &= \frac{1}{6}\boldsymbol{\eta}_{n_*}^T [S_{y_{z1}}\langle h_{0n_*011} \rangle + S_{y_{z2}}\langle h_{0n_*10} \rangle + S_{y_{z3}}\langle h_{n_*n_*110} \rangle], \\ \mathbf{E}_{003} &= \frac{1}{6}\boldsymbol{\eta}_{n_*}^T [S_{y_{z3}}\langle h_{n_*n_*002} \rangle], \end{aligned} \quad (22)$$

其中

$$\begin{aligned} h_{00110} &= \frac{1}{l\pi} - [L_0(I_d)]^{-1}\mathbf{A}_{110} + \frac{1}{i\omega_0} [\boldsymbol{\eta}_0^T\mathbf{A}_{110}\xi_0 + \frac{1}{3}\overline{\boldsymbol{\eta}_0^T\mathbf{A}_{110}\xi_0}], \\ h_{00200} &= \frac{1}{l\pi} 2i\omega_0 - [L_0(I_d)]^{-1}\mathbf{A}_{200} - \frac{1}{i\omega_0} [\boldsymbol{\eta}_0^T\mathbf{A}_{200}\xi_0 + \frac{1}{3}\overline{\boldsymbol{\eta}_0^T\mathbf{A}_{110}\xi_0}], \\ h_{00002} &= -\frac{1}{l\pi} [L_0(I_d)]^{-1}\mathbf{A}_{002} + \frac{1}{l\pi i\omega_0} [\boldsymbol{\eta}_0^T\mathbf{A}_{002}\xi_0 - \overline{\boldsymbol{\eta}_0^T\mathbf{A}_{002}\xi_0}], \\ h_{n_*0101} &= \frac{1}{l\pi} [i\omega_0 + \frac{n_*^2}{l^2}\mathbf{D}_0 - L_0]^{-1}\mathbf{A}_{101} - \frac{1}{l\pi i\omega_0} [\boldsymbol{\eta}_{n_*}^T\mathbf{A}_{101}\xi_{n_*}], \\ h_{0n_*011} &= \frac{1}{l\pi} [-i\omega_0 + \frac{n_*^2}{l^2}\mathbf{D}_0 - L_0]^{-1}\mathbf{A}_{011} + \frac{1}{l\pi i\omega_0} [\boldsymbol{\eta}_{n_*}^T\mathbf{A}_{101}\xi_{n_*}], \end{aligned}$$

$$h_{n_* n_* 002} = \frac{1}{2l\pi} \left[\frac{2n_*^2}{l^2} \mathbf{D}_0 - \mathbf{L}_0 \right]^{-1} \mathbf{A}_{002} + h_{00002}, \tag{23}$$

$$h_{0n_* n_* 101} = h_{n_* 0101}, \quad h_{n_* n_* 110} = h_{00110},$$

综上所述,可得到 Turing-Hopf 分支的三阶截断规范型为

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \alpha_1(\mu)\rho + \kappa_{11}\rho^3 + \kappa_{12}\rho r^2, \\ \dot{r} = \alpha_2(\mu)r + \kappa_{21}\rho^2 r + \kappa_{22}r^3, \end{cases} \tag{24}$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha_1(\mu) &= \text{Re}(B_{11})\mu_1 + \text{Re}(B_{21})\mu_2, & \alpha_2(\mu) &= \text{Re}(B_{13})\mu_1 + \text{Re}(B_{23})\mu_2, \\ \kappa_{11} &= \text{Re}(B_{210}), & \kappa_{12} &= \text{Re}(B_{102}), & \kappa_{21} &= B_{111}, & \kappa_{22} &= B_{003} \circ \end{aligned}$$

3 数值模拟

在本章中,结合数值模拟来解释前面理论分析的结论。选取参数:

$$r = 0.8, \quad K = 3, \quad \alpha = 0.5, \quad \beta = 0.55, \quad d_1 = 2.6, \quad l = 3.$$

经过计算可知,本组参数满足 $\left(\frac{1}{\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha}} > K > \frac{1-\alpha}{2-\alpha}K$ 。由定理 2 可知,当 $(c_H^*, d_2^*) = (1.2121, 0.2877)$ 时,系统(5)在 $E_* = (2.3526, 0.3377)$ 附近经历 Turing-Hopf 分支, Turing-Hopf 分支点为 $(c_H^*, d_2^*) = (1.2121, 0.2877)$, 波数 $k_0^* = 2$, 如图 2 所示。

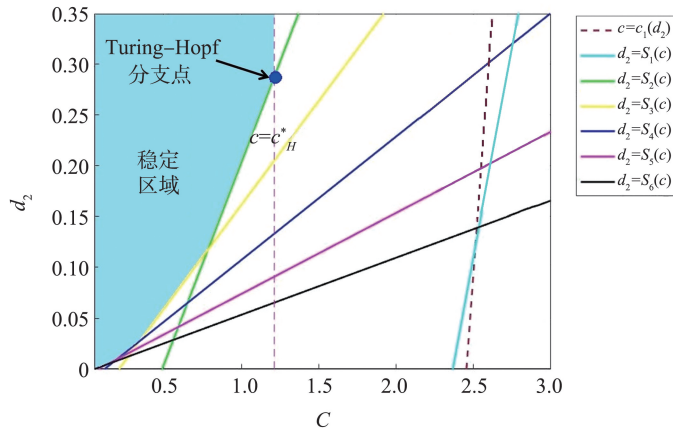


图 2 Hopf 分支曲线、Turing 分支曲线、 E_* 的稳定区域以及 Turing-Hopf 分支点
Fig.2 Coordinates of the Hopf-bifurcation curve and Turing-bifurcation curve, the stable region of E_* and the Turing-Hopf singularity

根据第 2 章中的计算结果,可得到三阶截断规范型为

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(0.23256\mu_2 - \rho^2 - 0.02966r^2), \\ \dot{r} = r(0.31553\mu_1 - 0.99556\mu_2 + 2.06318\rho^2 - r^2). \end{cases} \tag{25}$$

由于 $\rho > 0$, 系统(25)有以下平衡解:

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_0 &= (0, 0), \\ \widetilde{A}_1 &= (\sqrt{0.23256\mu_2}, 0), \quad \mu_2 > 0, \\ \widetilde{A}_2^\pm &= (0, \pm\sqrt{0.31553\mu_1 - 0.995567\mu_2}), \quad 0.31553\mu_1 - 0.995567\mu_2 > 0, \\ \widetilde{A}_3^\pm &= (\sqrt{0.21033\mu_1 + 0.0278\mu_2}, \pm\sqrt{0.74948\mu_1 - 0.93814\mu_2}), \\ &\quad 0.21033\mu_1 + 0.0278\mu_2 > 0, \quad 0.74948\mu_1 - 0.93814\mu_2 > 0. \end{aligned} \tag{26}$$

于是,可定义临界分支曲线如下:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0: \mu_1=0; & \quad \mathcal{T}: \mu_2=0.316\ 94\mu_1; \\ \mathcal{T}_1: \mu_2=-7.565\ 8\mu_1, \mu_1>0; & \quad \mathcal{T}_2: \mu_2=0.798\ 9\mu_1, \mu_1>0. \end{aligned} \tag{27}$$

利用这些分支曲线,可得 $\mu_1-\mu_2$ 参数平面上的分支图和系统(25)在平面 $\rho-r$ 上相应的相图。如图3、图4所示, $\mu_1-\mu_2$ 平面被 \mathcal{H}_0 、 \mathcal{T} 、 \mathcal{T}_1 和 \mathcal{T}_2 4条分支曲线划分为6个区域,分别表示为 $R_s, s=1,2,\dots,6$ 。系统(25)的平衡解 \widetilde{A}_0 、 \widetilde{A}_1 、 \widetilde{A}_2^\pm 以及 \widetilde{A}_3^\pm 分别对应了系统(5)的常值稳态解、空间齐次周期解、非常值稳态解和空间非齐次周期解。因此,原系统(5)在平面 $c-d_2$ 上 Turing-Hopf 分支点附近的动力学性质可以借助系统(25)的动力学性质来分析。

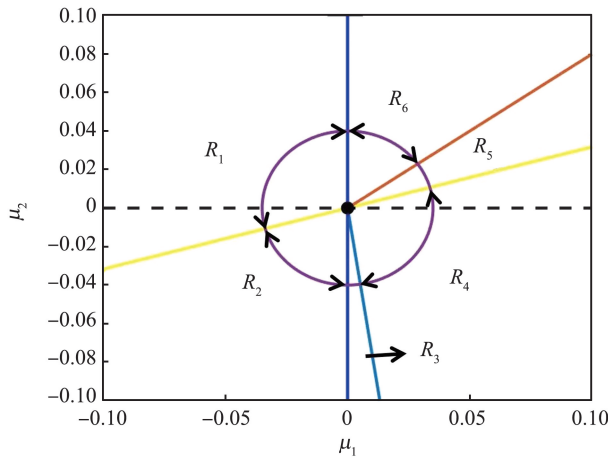


图3 Turing-Hopf 分支点附近的参数区域

Fig.3 Detailed parameter regions near the Turing-Hopf bifurcation singularity

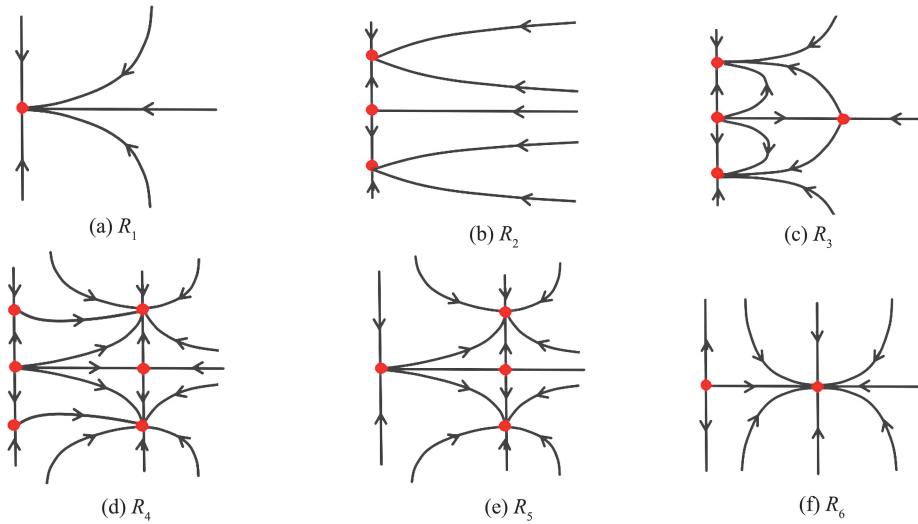


图4 R_1-R_6 区域的相图

Fig.4 Phase portraits in Region R_1-R_6

表 1 为式(25)在 6 个区域的平衡解稳定情况汇总。

表 1 各区域的平衡解稳定情况

Table 1 Equilibrium stabilization of each region

区域	平衡点	平衡解的稳定情况
R_1	\widetilde{A}_0	\widetilde{A}_0 是局部渐近稳定的
R_2	$\widetilde{A}_0, \widetilde{A}_2^\pm$	\widetilde{A}_2^\pm 是局部渐近稳定的, \widetilde{A}_0 是不稳定的
R_3	$\widetilde{A}_0, \widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2^\pm$	\widetilde{A}_2^\pm 是局部渐近稳定的, \widetilde{A}_0 和 \widetilde{A}_1 是不稳定的
R_4	$\widetilde{A}_0, \widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2^\pm, \widetilde{A}_3^\pm$	\widetilde{A}_3^\pm 是局部渐近稳定的, $\widetilde{A}_0, \widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2^\pm$ 是不稳定的
R_5	$\widetilde{A}_0, \widetilde{A}_1, \widetilde{A}_3^\pm$	\widetilde{A}_3^\pm 是局部渐近稳定的, $\widetilde{A}_0, \widetilde{A}_1$ 是不稳定的
R_6	$\widetilde{A}_0, \widetilde{A}_1$	\widetilde{A}_1 是局部渐近稳定的, \widetilde{A}_0 是不稳定的

在 R_1 中,系统(25)只有一个平衡解 \widetilde{A}_0 ,并且它是局部渐近稳定的,这意味着系统(5)的正平衡解 E_* 是渐近稳定的。如图 5 所示,选择参数 $(\mu_1, \mu_2) = (-0.1, 0.1)$, 选取初值为 $u_0(x, t) = 2.3526 - 0.01 \cos x, v_0(x, t) = 0.3377 - 0.01 \sin x$ 。

在 R_2 中,系统(25)有 3 个平衡解 \widetilde{A}_0 和 \widetilde{A}_2^\pm ,并且 \widetilde{A}_2^\pm 是稳定的,也就是说系统(5)具有一对稳定的空间非齐次稳态解。如图 6 所示,选择参数 $(\mu_1, \mu_2) = (-0.1, -0.1)$, 选取的初值为 $u_0(x, t) = 2.3526 - 0.01 \cos x, v_0(x, t) = 0.3377 - 0.01 \sin x$ 。

在 R_3 中,系统(25)有 4 个平衡解 $\widetilde{A}_0, \widetilde{A}_1$ 和 \widetilde{A}_2^\pm ,并且 \widetilde{A}_2^\pm 是稳定的,也就是说系统(5)存在一对稳定的空间非齐次稳态解。

在 R_4 中,系统(25)共有 6 个平衡解 $\widetilde{A}_0, \widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2^\pm$ 和 \widetilde{A}_3^\pm ,且 \widetilde{A}_3^\pm 是稳定的,这意味着系统(5)有一对稳定的空间非齐次周期解。如图 7 所示,选择参数 $(\mu_1, \mu_2) = (0.1, -0.1)$ 。选取的初值为 $u_0(x, t) = 2.3526 - 0.01 \cos x, v_0(x, t) = 0.3377 - 0.01 \sin x$ 。

在 R_5 中,系统(25)共有 4 个平衡解 $\widetilde{A}_0, \widetilde{A}_1$ 还有 \widetilde{A}_3^\pm ,并且 \widetilde{A}_3^\pm 是稳定的,这意味着系统(5)有一对稳定的空间非齐次周期解。

在 R_6 中,系统(25)有 2 个平衡解 \widetilde{A}_0 以及 \widetilde{A}_1 ,并且 \widetilde{A}_1 是稳定的,这意味着系统(5)存在一对稳定的空间齐次周期解,如图 8 所示,选择参数 $(\mu_1, \mu_2) = (0.1, 0.1)$ 。选取的初值为 $u_0(x, t) = 2.3526 - 0.01 \cos x, v_0(x, t) = 0.3377 - 0.01 \sin x$ 。

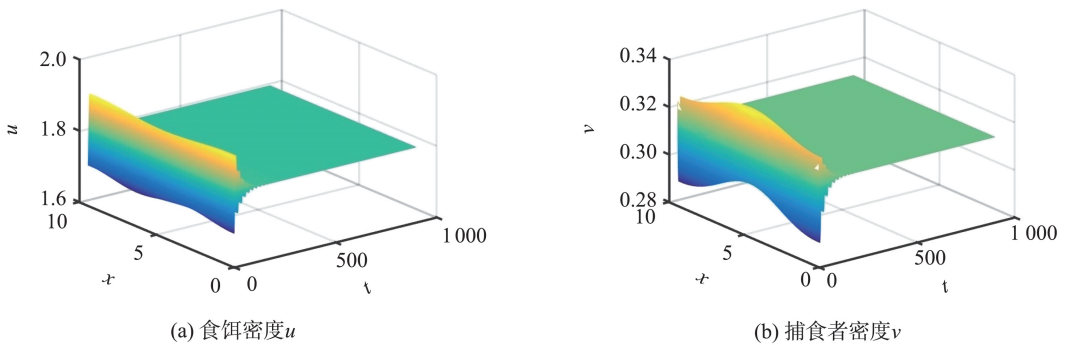


图 5 区域 R_1 中稳定的正平衡解
Fig.5 Stable constant steady state in R_1

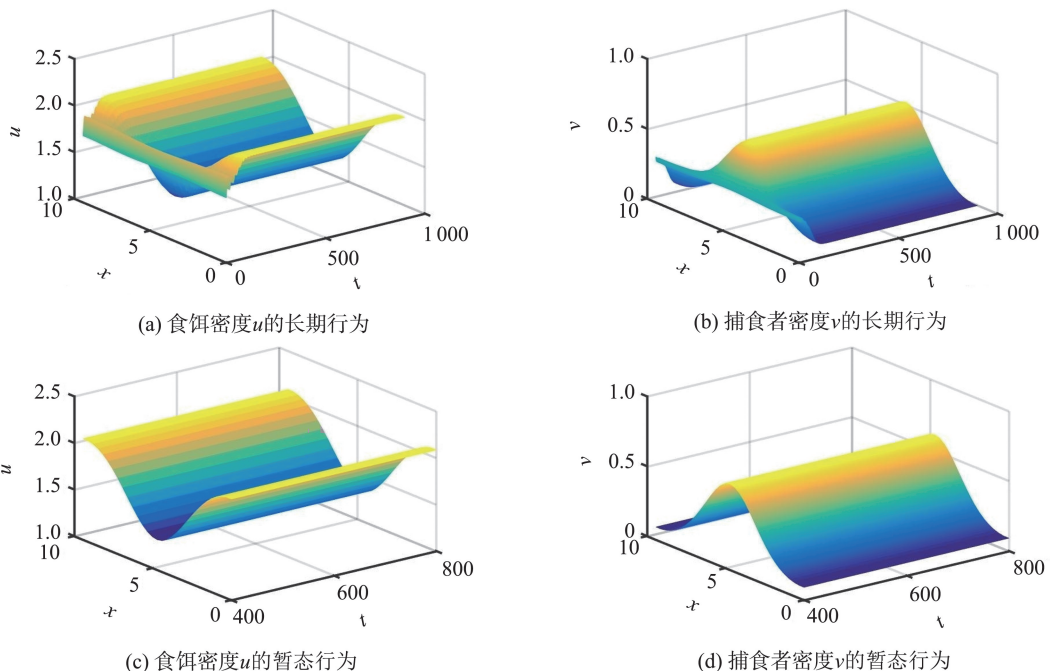


图 6 区域 R_2 中稳定的非常值稳态解
Fig.6 Stable non-constant steady state in R_2

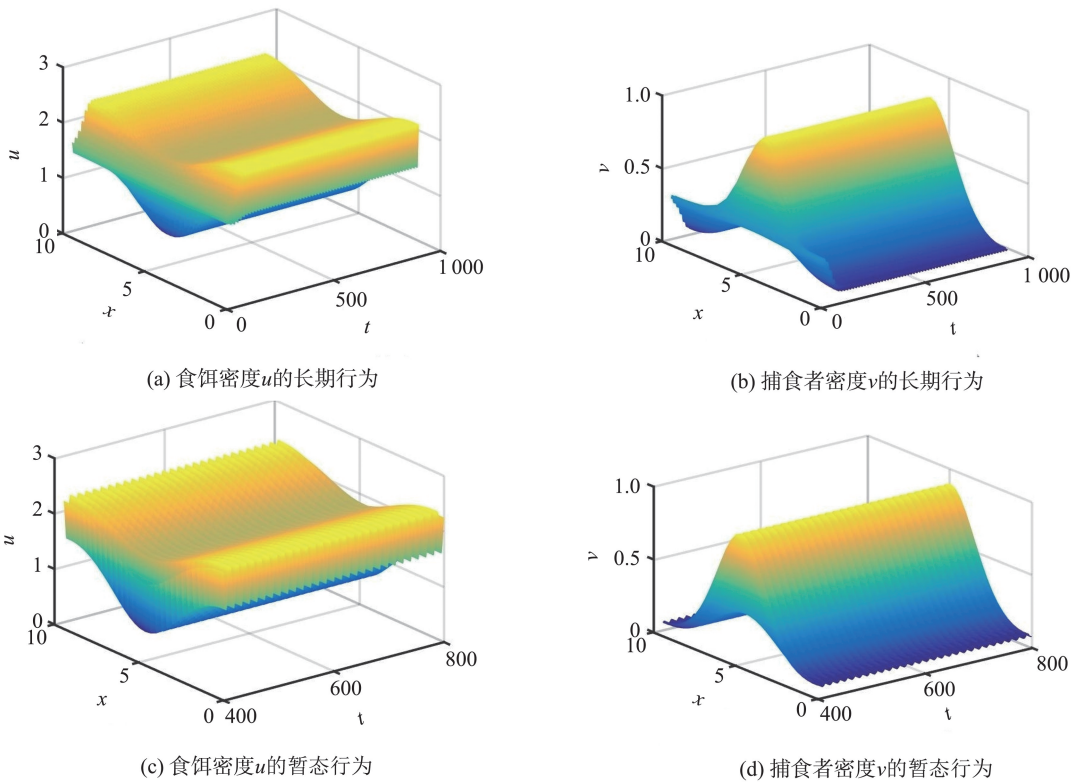


图 7 区域 R_4 中稳定的空间非齐次周期解
Fig.7 Stable spatially inhomogenous periodic solution in R_4

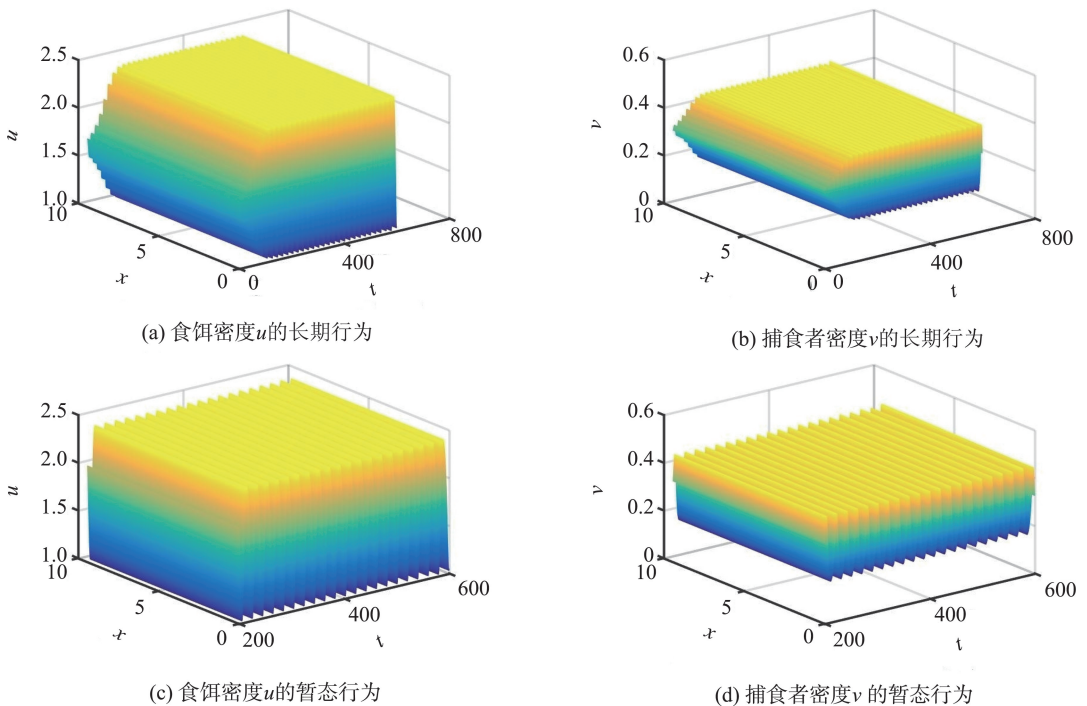


图 8 区域 R_6 中稳定的空间齐次周期解
Fig.8 Stable spatially homogenous periodic solution in R_6

4 结论

本文选取合作强度 c 和扩散系数 d_2 作为分支参数,考察了系统的 Turing-Hopf 分支的存在性。通过稳定性分析,划定了常值稳态解的稳定区域,研究了 Turing 不稳定性出现的充分条件。研究表明,当 $c < c_H^*$ 且 $d > d_2^*$ 时,系统正平衡解 E_* 是局部渐近稳定的。此外,还找到了 Turing-Hopf 分支点,揭示了系统在该

分支点附近的丰富的动力学行为。

通过对模型的数学分析和数值模拟,本文得出以下结论:

(1) 种群的群体行为和扩散对捕食者和食饵种群的稳定性都有显著的影响。在特定的参数下,系统(5)可能进入不稳定状态,导致捕食者和被捕食者的数量持续波动。

(2) 考虑到捕食者与被捕食者种群的扩散和群体行为,系统在一定条件下可能表现出空间齐次周期解、空间非齐次周期解和空间非齐次稳态解等复杂的动力学行为。

通过数值模拟,解释了上述理论分析的结果。数值模拟的结果与理论分析结果完全吻合,进一步展示了系统在 Turing-Hopf 分支点附近复杂的时空动力学行为。

参考文献:

- [1] LOTKA A J. Elements of physical biology[M]. Baltimore Maryland: Williams & Wilkins, 1925.
- [2] VOLTERRA V. Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically[J]. Nature, 1927, 119(2983):12-13.
- [3] COSNER C, DEANGELIS D L, AULT J S, et al. Effects of spatial grouping on the functional response of predators[J]. Theoretical Population Biology, 1999, 56(1):65-75.
- [4] HOLLING C S. The components of predation as revealed by a study of small-mammal predation of the european pine sawfly [J]. The Canadian Entomologist, 1959, 91(5):293-320.
- [5] KAZARINOFF N D, VAN DEN DRIESSCHE P. A model predator-prey system with functional response[J]. Mathematical Biosciences, 1978, 39(1/2):125-134.
- [6] TURCHIN P. Complex population dynamics: a theoretical/empirical synthesis (MPB-35)[M]. New Jersey: Princeton University Press, 2013.
- [7] SCHMIDT P A, MECH L D. Wolf pack size and food acquisition[J]. The American Naturalist, 1997, 150(4):513-517.
- [8] SCHEEL D, PACKER C. Group hunting behaviour of lions: a search for cooperation[J]. Animal Behaviour, 1991, 41(4):697-709.
- [9] COURCHAMP F, MACDONALD D W. Crucial importance of pack size in the African wild dog *Lycaon pictus*[C]// Animal Conservation Forum. Cambridge: Cambridge University Press, 2001:169-174.
- [10] BEREK L. Impacts of foraging facilitation among predators on predator-prey dynamics[J]. Bulletin of Mathematical Biology, 2010, 72:94-121.
- [11] ALVES M T, HILKER F M. Hunting cooperation and Allee effects in predators[J]. Journal of Theoretical Biology, 2017, 419:13-22.
- [12] BRAZA P A. Predator-prey dynamics with square root functional responses[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2012, 13(4):1837-1843.
- [13] BULAI I M, VENTURINO E. Shape effects on herd behavior in ecological interacting population models[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2017, 141:40-55.
- [14] DJILALI S. Impact of prey herd shape on the predator-prey interaction[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2019, 120:139-148.
- [15] FREEDMAN H I, WOLKOWICZ G S K. Predator-prey systems with group defence: the paradox of enrichment revisited[J]. Bulletin of Mathematical Biology, 1986, 48(5/6):493-508.
- [16] KOOI B W, VENTURINO E. Ecoepidemic predator-prey model with feeding satiation, prey herd behavior and abandoned infected prey[J]. Mathematical Biosciences, 2016, 274:58-72.
- [17] RAW S N, MISHRA P, KUMAR R, et al. Complex behavior of prey-predator system exhibiting group defense: a mathematical modeling study[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2017, 100:74-90.
- [18] XU Chaoqun, YUAN Sanling, ZHANG Tonghua. Global dynamics of a predator-prey model with defense mechanism for prey[J]. Applied Mathematics Letters, 2016, 62:42-48.
- [19] VENTURINO E, PETROVSKII S. Spatiotemporal behavior of a prey-predator system with a group defense for prey[J]. Ecological Complexity, 2013, 14:37-47.
- [20] DU Yanfei, NIU Ben, WEI Junjie. A predator-prey model with cooperative hunting in the predator and group defense in the prey[J]. Discrete & Continuous Dynamical Systems-Series B, 2022, 27(10).
- [21] SONG Yongli, ZHANG Tonghua, PENG Yahong. Turing-Hopf bifurcation in the reaction-diffusion equations and its applications[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2016, 33:229-258.