

# 具有交叉扩散的植被模型的稀疏最优控制

梁娟<sup>1</sup>, 张晋珠<sup>1\*</sup>, 崔亮<sup>2</sup>

(1.太原工业学院理学系, 山西 太原 030008; 2.山西财经大学资源环境学院, 山西 太原 030006)

**摘要:**建立了一类具有交叉扩散的植被-水反应扩散模型,将人类活动作为控制函数,研究了该植被模型的稀疏最优控制问题,从控制相关的植被斑图形成的角度揭示了如何通过人类活动提高生态系统的稳健性。给出了模型产生图灵斑图的条件,推导了一阶必要最优条件。最后通过数值模拟,从控制效果、控制误差和控制成本3方面验证了该控制方法的合理性以及控制策略的有效性。

**关键词:**植被斑图;荒漠化;稳健性;最优控制;稀疏控制

**中图分类号:**O175;O232 **文献标志码:**A

**引用格式:**梁娟,张晋珠,崔亮.具有交叉扩散的植被模型的稀疏最优控制[J].山东大学学报(理学版),2025,60(4):29-39.

## Sparse optimal control of a vegetation model with cross diffusion

LIANG Juan<sup>1</sup>, ZHANG Jinzhu<sup>1\*</sup>, CUI Liang<sup>2</sup>

(1. Department of Science, Taiyuan Institute of Technology, Taiyuan 030008, Shanxi, China; 2. College of Resources and Environment, Shanxi University of Finance and Economics, Taiyuan 030006, Shanxi, China)

**Abstract:** A vegetation-water reaction-diffusion model with cross diffusion is established and human activities are chosen as the control function. The sparse optimal control problem of the model is studied which reveals how to improve the robustness of the ecosystem through human activities from the perspective of controlling the formation of vegetation pattern. Firstly, the conditions for generating Turing pattern are given. Furthermore, the first order necessary optimality condition is derived. Finally, the rationality of the control method and the effectiveness of the control strategy are verified in terms of the control effect, control error and control cost by numerical simulations.

**Key words:** vegetation pattern; desertification; robustness; optimal control; sparse control

## 0 引言

植被斑图的形成可以表征植被在时间和空间上的分布特征与生长规律。植被斑图结构分为点状、带状、迷宫状、间隙状等结构,不同的结构对应着不同的生态功能。反应扩散方程作为描述时空动力学的有力工具,已在植被斑图演化方面得到了广泛的应用<sup>[1-2]</sup>。Lefever等<sup>[3]</sup>建立了一个单变量植被反应扩散方程描述干旱区陆生植物群落的动态。Klausmeier<sup>[4]</sup>首次应用反应扩散方程建立了一个2变量的植被水模型,该模型对某地区的植被生态系统形成的条状结构给出了解释。HilleRisLambers等<sup>[5]</sup>对Klausmeier模型进行了改进,构建了由植被、地表水和地下水构成的三变量反应扩散方程。

干旱半干旱地区的植被系统脆弱,且对气候变化较为敏感,因此容易发生荒漠化<sup>[6]</sup>。影响植被斑图形成的主要因素可分为自然因素(如温度、降雨、CO<sub>2</sub>等)和人类活动(如放牧、砍伐、植树造林等)<sup>[7-8]</sup>。人类活

收稿日期:2024-05-14; 网络出版时间:2024-12-10 15:59:33

基金项目:国家自然科学基金资助项目(42075029); 山西省基础研究计划项目(202203021212327,202203021211213); 太原工业学院引进人才科研资助项目(2024KJ012); 第四届太原工业学院学科带头人计划项目

第一作者:梁娟(1987—),女,副教授,博士,研究方向为生物数学、动力系统稳定性. E-mail:liangjuan76@126.com

\*通信作者:张晋珠(1969—),女,教授,博士,研究方向为动力系统稳定性. E-mail:zhangjinzhu2@yahoo.com.cn

动是具有目的性的,对于旱半干旱区植被的影响是可控的。反应扩散方程的最优控制理论为防治生态系统荒漠化提供了理论基础。例如,Sun等<sup>[9]</sup>构建了一类植被-水反应扩散方程,研究表明通过最优控制理论,可将任一斑图结构通过人类活动手段转化为理想的斑图结构,从而有效的防止荒漠化的发生,但文献[9]并未考虑成本问题。本文的主要目标是通过人类活动控制植被斑图结构的形成,同时保证投入的成本尽可能少。为此,本文建立了一类植被-水反应扩散模型,研究了该模型的稀疏最优控制问题,并通过数值模拟验证了该控制方法的有效性和合理性。

## 1 模型的建立和稳定性分析

植被与水之间常见的反馈机制有:吸收反馈、根延展反馈、渗透反馈和土壤水扩散反馈。这里重点介绍土壤水扩散反馈机制,它是一种由土壤水浓度差引起的水定向流动的正反馈<sup>[10]</sup>。植被根部吸收当前位置的水分,周围其它位置的水形成了浓度差。基于 Klausmeier 模型本文构造了一类具有交叉扩散的植被-水反应扩散模型:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial T} = JRWP^2 - MP + r_1 P + D_1 \Delta P, & X, Y \in \Omega, T > 0, \\ \frac{\partial W}{\partial T} = A - LW - RWP^2 + D_2 \Delta(W - \beta_1 P), & X, Y \in \Omega, T > 0, \end{cases} \quad (1)$$

式中, $P$ 和 $W$ 分别表示植被生物量和水的密度, $M$ 表示植被的死亡率, $A$ 为降水量, $L$ 为水分的蒸发速率, $R$ 表示植被吸收水分的速率, $J$ 表示将吸收的水分转化为植被自身生长的转化速率, $D_1$ 和 $D_2$ 分别表示植被扩散系数和水的扩散系数, $T$ 表示时间, $r_1(X, T)$ 为控制函数(如人类活动),其中 $X = (X, Y)^T$ 。下面对模型(1)进行无量纲化:

$$w = \frac{\sqrt{RJ}}{\sqrt{L}} W, \quad p = \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{L}} P, \quad a = \frac{\sqrt{RJ}}{L\sqrt{L}} A, \quad t = LT, \quad m = \frac{M}{L}, \quad \beta = \beta_1 J, \quad r = \frac{r_1}{L}, \quad x = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{D_1}} X, \quad y = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{D_1}} Y, \quad \delta = \frac{D_2}{D_1},$$

得到模型

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} = wp^2 - mp + rp + \Delta p, & x, y \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t} = a - w - wp^2 + \delta \Delta(w - \beta p), & x, y \in \Omega, t > 0. \end{cases} \quad (2)$$

这里 $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ 。下面主要研究模型(2)的动力学性态。很明显,模型(2)有1个裸地平衡点 $E_0 = (0, a)$ 和2个正平衡点:

$$E_1 = (p_1, w_1) = \left( \frac{2m-2r}{a+\sqrt{a^2-4(m-r)^2}}, \frac{a+\sqrt{a^2-4(m-r)^2}}{2} \right),$$

$$E_2 = (p_2, w_2) = \left( \frac{2m-2r}{a-\sqrt{a^2-4(m-r)^2}}, \frac{a-\sqrt{a^2-4(m-r)^2}}{2} \right),$$

当且仅当 $a > 2(m-r)$ 。下面对这2个正平衡点进行稳定性分析。模型(2)在正平衡点附近的线性化系统为

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} = a_{11}p + a_{12}w + \Delta p, & x, y \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t} = a_{21}p + a_{22}w + \delta \Delta(w - \beta p), & x, y \in \Omega, t > 0. \end{cases} \quad (3)$$

对于正平衡点 $(p_i, w_i)$ ,  $i = 1, 2$ , 有 $a_{11} = m - r$ ,  $a_{12} = p_i^2$ ,  $a_{21} = -2(m - r)$ ,  $a_{22} = -1 - p_i^2$ 。

模型(3)解的形式为 $ce^{At} \cos \frac{k_1 \pi}{l} x \cos \frac{k_2 \pi}{l} y$ , 其中 $k_1$ 和 $k_2$ 是波数且有 $\pi^2(k_1^2 + k_2^2)/l^2 = k^2$ 。模型(3)对应的特征方程为

$$\lambda^2 - b_{1\kappa} \lambda + b_{2\kappa} = 0,$$

其中,  $b_{1\kappa} = -(1+\delta)\kappa^2 + a_{11} + a_{22}$ ,  $b_{2\kappa} = \delta\kappa^4 - (a_{11}\delta + a_{12}\beta\delta + a_{22})\kappa^2 + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 。

系统(2)产生 Turing 斑图的条件是:在不考虑扩散情形下,平衡点是稳定的;在考虑扩散条件下,平衡点不稳定,即特征方程中至少有 1 个实部为正的 eigen 根<sup>[11]</sup>。通过分析,得到如下定理,这里,令  $\xi = \frac{\sqrt{a^2 - 4(m-r)^2} p_2 - [(m-r)\delta + (\beta\delta - 1)p_2^2 - 1]^2}{4\delta}$ 。

**定理 1** 设  $a > 2(m-r)$ , 对于正平衡点  $(p_1, w_1)$  和  $(p_2, w_2)$ , 有以下结论:

(1)  $(p_1, w_1)$  是不稳定的; (2) 当  $\xi < 0$  时, 系统(2)在  $(p_2, w_2)$  处会产生 Turing 斑图。

**证明** 对于  $(p_1, w_1)$ , 有  $b_{20} = (m-r)(p_1^2 - 1) = -\frac{2(m-r)\sqrt{a^2 - 4(m-r)^2}}{a + \sqrt{a^2 - 4(m-r)^2}} < 0$ , 所以  $(p_1, w_1)$  不稳定。对于

$(p_2, w_2)$ , 因为  $b_{1\kappa} = -(1+\delta)\kappa^2 - \frac{2a}{a - \sqrt{a^2 - 4(m-r)^2}} < 0$  且  $b_{20} > 0$ , 所以  $(p_2, w_2)$  的稳定性主要取决于  $b_{2\kappa}$ 。通过计算可得  $(b_{2\kappa})_{\min} = \xi$ 。因此, 当  $\xi < 0$  时, 得到存在某个  $\kappa > 0$ , 有  $b_{2\kappa} < 0$  成立, 系统(2)会产生 Turing 斑图。

下面主要研究  $(p_2, w_2)$  的动力学性状。根据 Turing 斑图产生的条件,  $m = 1.3, \delta = 50, \beta = 0.203, r = 0$ , 模拟了在不同降雨条件下  $a \in (5, 5.8)$  形成的植被斑图, 如图 1 所示。当  $a = 5.0$  时, 植被斑图呈点状结构, 这种结构预示着植被生态系统可能发生灾难性的转变<sup>[12]</sup>。随着降雨量的增加, 植被斑图由点状结构向带状结构转化, 最终呈现均匀态。因此, 从图 1 可以看出, 在干旱半干旱地区, 随着降雨量的增加, 植被生态系统的稳健性逐渐提高。

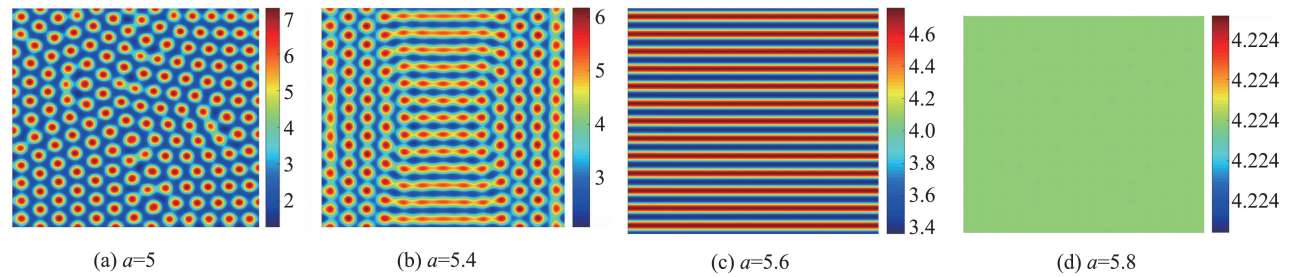


图 1 不同降雨量对应的植被斑图

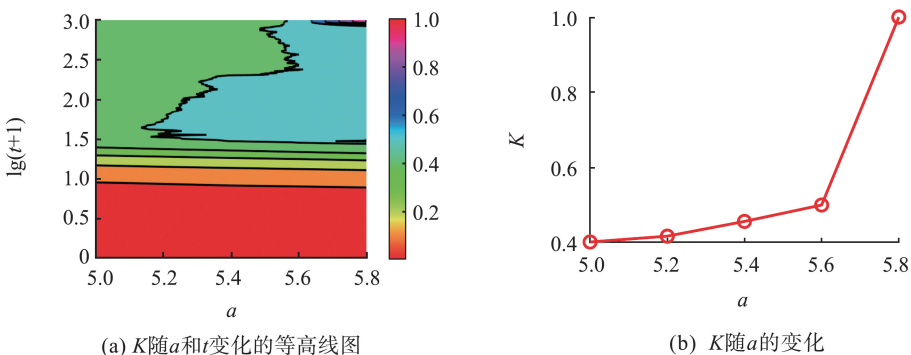
Fig.1 Vegetation pattern corresponding to different rainfall

为了定量描述不同结构的植被斑图所对应的植被密度与  $a$  之间的关系, 引入了高密度绿色覆盖度指标  $K$ , 即

$$K = \frac{1}{|\Omega|} \int_{p(x,t;a) \geq p^*(a)} 1 dx, \quad x \in \Omega \subset \mathbf{R}^2,$$

其中,  $p^*(a)$  是依赖于  $a$  的系统(2)的常数平衡点,  $p(x, t; a)$  是非平凡解,  $x = (x, y)^T$ 。

图 2(a) 为  $K$  随  $a$  和  $t$  变化的二维等高线图, 图 2(b) 给出了  $K$  与  $a$  的关系。从图 2 可以看出, 当斑图达到稳态时,  $K$  会随着  $a$  的增大而增大。当  $K$  较大时, 植被生态系统比较稳健; 反之, 当  $K$  减小到一定值时, 植被系统有发生荒漠化的风险。因此, 可将  $K$  作为植被生态系统的稳健性评价指标。



(a)  $K$ 随 $a$ 和 $t$ 变化的等高线图

(b)  $K$ 随 $a$ 的变化

图 2  $K$  随  $a$  和  $t$  的变化

Fig.2 Variation of  $K$  with  $a$  and  $t$

## 2 最优控制

在第1章中,控制变量  $r(\mathbf{x}, t)$  在时间和空间上都为0。这部分考虑将  $r(\mathbf{x}, t)$  作为时间和空间上的函数,运用最优控制理论控制斑图的形成。假设  $\Omega$  是  $\mathbf{R}^2$  的有界开子集,边界  $\partial\Omega$  为  $C^{2+\theta}$  类,  $\theta > 0$ 。考虑如下最优控制问题:

$$\inf J(r) := J_1(r) + J_2(r) + J_3(r), \quad (4)$$

其中

$$J_1(r) = \frac{c_1}{2} \int_{\Omega} [p_r(\mathbf{x}, T) - p_{\text{tar}}(\mathbf{x})]^2 d\mathbf{x} + \frac{c_2}{2} \int_{\Omega} [w_r(\mathbf{x}, T) - w_{\text{tar}}(\mathbf{x})]^2 d\mathbf{x},$$

$$J_2(r) = \frac{c_3}{2} \int_0^T \int_{\Omega} r^2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt, \quad J_3(r) = b \int_0^T \int_{\Omega} |r(\mathbf{x}, t)| d\mathbf{x} dt.$$

$(p_r, w_r)$  满足状态方程

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} \triangleq f_1(p, w, r) + \Delta p, & (\mathbf{x}, t) \in Q_T := \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial w}{\partial t} \triangleq f_2(p, w, r) + \delta \Delta w - \delta \beta \Delta p, & (\mathbf{x}, t) \in Q_T, \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0, & (\mathbf{x}, t) \in \Sigma_T := \partial\Omega \times (0, T), \\ p(\mathbf{x}, 0) = p_0(\mathbf{x}), \quad w(\mathbf{x}, 0) = w_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \end{cases} \quad (5)$$

$$f_1(p, w, r) = wp^2 - mp + rp, \quad f_2(p, w, r) = a - w - wp^2,$$

这里,  $J$  是目标泛函,  $p(\mathbf{x}, t)$  和  $w(\mathbf{x}, t)$  为状态变量,  $p_{\text{tar}}$  和  $w_{\text{tar}}$  分别表示植被的目标斑图和水的目标斑图,  $T$  是终端时刻,  $c_1, c_2, c_3, b$  是非负常数,  $p(\mathbf{x}, 0)$  和  $w(\mathbf{x}, 0)$  是初始条件,  $r(\mathbf{x}, t)$  为控制变量, 这里  $r(\mathbf{x}, t)$  的允许控制集为

$$B = \{r \in L^\infty(Q_T) : -r_0 \leq r(\mathbf{x}, t) \leq +r_0, \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in Q_T := \Omega \times (0, T)\}.$$

本研究的目标是以较小的投入成本使得干旱半干旱地区植被生态系统的稳健性提高。当  $a$  较小时, 通过控制措施使其状态变量  $p(\mathbf{x}, t)$  具有较大的  $K$ 。此外, 为进一步降低成本, 下面引入稀疏控制。由  $c_3$  和  $b$  加权的项限定了控制参数  $r$  的大小, 且由  $b$  加权的项决定了控制参数  $r$  的稀疏结构。这里, 假设  $\Theta: \mathbf{Y}(\Theta) \rightarrow C(\bar{\Omega}, \mathbf{R}^2)$  是线性算子, 其中

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ -\beta\delta\Delta & \delta\Delta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}(\Theta) = \{\psi = (p, w) \in \bigcap_{p \geq 1} W^{2,p}(\Omega) : \frac{\partial p}{\partial n} = \delta \frac{\partial w}{\partial n} = 0\}.$$

首先对状态方程(5)的解进行先验估计。

**定理 2** 设  $\psi^0 := (p_0, w_0) \in \mathbf{Y}(\Theta)$ ,  $\psi^0 > 0$  在  $\bar{\Omega}$  上, 则存在常数  $M$  (不依赖于  $p, w, r$ ), 使得

$$\|p_r\|_{L^\infty(Q_T)} + \|w_r\|_{L^\infty(Q_T)} \leq M. \quad (6)$$

**证明** 首先给出如下方程:

$$\begin{cases} Q' = f_1(Q, R, r) = RQ^2 - mQ + rQ, & t \in (0, T), \\ R' = f_2(Q, R, r) = a - R - RQ^2, & t \in (0, T), \\ Q(0) = Q_0 > 0, \quad R(0) = R_0 > 0. \end{cases} \quad (7)$$

由于  $(Q, R)$  只依赖于时间, 因此式(7)的解也满足式(5), 有  $Q > 0, R > 0$ 。下面证明  $Q$  和  $R$  的有界性。将式(7)的前2个方程相加, 可得如下不等式成立:

$$\frac{d(Q+R)}{dt} \leq a + r(Q+R).$$

根据 Gronwall's 不等式有

$$0 < Q(t) + R(t) \leq (Q_0 + R_0 + aT) e^{rt} \leq (Q_0 + R_0 + aT) e^T. \tag{8}$$

式中,  $r \in [-1, 1]$ 。

接下来构造式(5)的上解和下解。令  $Q = Q(t; Q_0, R_0)$  和  $R = R(t; Q_0, R_0)$  为式(7)的解且定义:

$$\begin{aligned} p_{0,\max} &= \max_{\Omega} p_0(\mathbf{x}), & p_{0,\min} &= \min_{\Omega} p_0(\mathbf{x}), \\ w_{0,\max} &= \max_{\Omega} w_0(\mathbf{x}), & w_{0,\min} &= \min_{\Omega} w_0(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

容易得到  $f_1$  是拟单调递增的,  $f_2$  是拟单调递减的。进一步可得到(5)的非负有序上解和下解分别为

$$\begin{aligned} \text{上解} & \quad (Q(t; p_{0,\max}, w_{0,\max}), R(t; p_{0,\min}, w_{0,\max})), \\ \text{下解} & \quad (Q(t; p_{0,\min}, w_{0,\min}), R(t; p_{0,\max}, w_{0,\min})). \end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned} Q(t; p_{0,\min}, w_{0,\min}) &\leq p(x, t) \leq Q(t; p_{0,\max}, w_{0,\max}), \\ R(t; p_{0,\max}, w_{0,\min}) &\leq w(x, t) \leq R(t; p_{0,\min}, w_{0,\max}). \end{aligned} \tag{9}$$

结合不等式(8)和(9),可推得  $(p_r, w_r) \in L^\infty(Q_T)$ , 且存在足够大的  $M$ , 使得式(6)成立。

**定理 3** 设  $\psi^0 := (p_0, w_0) \in Y(\Theta)$ ,  $\psi^0 > 0$  在  $\bar{\Omega}$  上, 则存在常数  $M$  (不依赖于  $p, w, r$ ), 使得

$$\|p_r\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega))} + \|p_r\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} + \|p_r\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leq M, \tag{10}$$

$$\|w_r\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega))} + \|w_r\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} + \|w_r\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leq M. \tag{11}$$

**证明** 将状态方程(5)的第一个方程乘以  $\frac{\partial p}{\partial t}$  并在  $Q_t$  上积分, 可得

$$\int_0^t \left\| \frac{\partial p(\tau)}{\partial \tau} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau = \int_0^t \int_{\Omega} f_1(p, w, r) \frac{\partial p}{\partial \tau} dx d\tau + \int_0^t \int_{\Omega} \Delta p \frac{\partial p}{\partial \tau} dx d\tau. \tag{12}$$

由 Green's 公式可得, 式(12)右边的第二项  $\int_0^t \int_{\Omega} \Delta p \frac{\partial p}{\partial \tau} dx d\tau$  可化为如下形式:

$$\int_0^t \int_{\Omega} \Delta p \frac{\partial p}{\partial \tau} dx d\tau = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla p(t)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla p_0|^2 dx. \tag{13}$$

由 Young's 不等式可得

$$\int_0^t \int_{\Omega} f_1(p, w, r) \frac{\partial p}{\partial \tau} dx d\tau \leq \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} \left( \frac{\partial p}{\partial \tau} \right)^2 dx d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} f_1^2(p, w, r) dx d\tau. \tag{14}$$

根据式(12)–(14), 有

$$\int_0^t \left\| \frac{\partial p(\tau)}{\partial \tau} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau + \int_{\Omega} |\nabla p|^2 dx \leq \int_{\Omega} |\nabla p_0|^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} f_1^2(p(\tau), w(\tau), r(\tau)) dx d\tau. \tag{15}$$

同理, 有

$$\int_{\Omega} |\nabla p(t)|^2 dx + \int_0^t \|\Delta p(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \leq \int_{\Omega} |\nabla p_0|^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} f_1^2(p(\tau), w(\tau), r(\tau)) dx d\tau. \tag{16}$$

根据不等式(15)和(16), 可证得不等式(10)成立。同理, 可证得不等式(11)成立。

下面证明状态方程(5)解的方向导数的存在性。

**引理 1** 设  $\psi^0 := (p_0, w_0) \in Y(\Theta)$ ,  $r \mapsto (p_r, w_r)$  是从  $B$  到  $L^2(0, T; H^1(\Omega)^2)$  的映射, 且定义为式(5)的解, 则各个方向  $\hat{r} \in \text{Tan } B$  都有 Gâteaux 导数  $\left( \frac{dp}{dr}, \frac{dw}{dr} \right) \cdot \hat{r}$ 。此外,  $(\hat{p}, \hat{w}) = \left( \frac{dp}{dr}, \frac{dw}{dr} \right) \cdot \hat{r}$  是如下方程的解:

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} = \Delta \hat{p} + f_{1p}(p, w, r) \hat{p} + f_{1w}(p, w, r) \hat{w}, \\ \frac{\partial \hat{w}}{\partial t} = \delta \Delta \hat{w} - \beta \delta \Delta \hat{p} + f_{2p}(p, w, r) \hat{p} + f_{2w}(p, w, r) \hat{w}, \\ \frac{\partial \hat{p}}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \hat{w}}{\partial n} = 0, \\ \hat{p}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \hat{w}(\mathbf{x}, 0) = 0. \end{cases} \tag{17}$$

该引理的详细证明过程可参考文献[13-15],此处省略。引理1保证了状态方程的解的方向导数的存在性。下面给出稀疏最优控制问题的一阶必要最优性条件。

**定理4** 设  $r \in B$ ,  $\psi^0 := (p_0, w_0) \in Y(\Theta)$ 。如果  $(p^*, w^*, r^*)$  是(4)的最优解,则存在函数  $\mu^*$  使得

$$\int_0^T \int_{\Omega} (c_3 r^* + p^* f + b \mu^*) (r - r^*) dx dt \geq 0, \quad \forall r \in B, \quad (18)$$

$(f, g)$  是如下伴随方程的解:

$$\begin{cases} -\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f - \delta \beta \Delta g + 2w^* p^* (f - g) + (r^* - m) f \triangleq \Delta f - \delta \beta \Delta g + g_1(p^*, w^*, r^*, f, g), & (\mathbf{x}, t) \in Q_T, \\ \frac{\partial g}{\partial t} = \delta \Delta g - g + p^{*2} (f - g) \triangleq \delta \Delta g + g_2(p^*, w^*, r^*, f, g), & (\mathbf{x}, t) \in Q_T, \\ \frac{\partial f}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial n} = 0, & (\mathbf{x}, t) \in \Sigma_T, \\ f(\mathbf{x}, T) = c_1 (p^*(\mathbf{x}, T) - p_{\text{tar}}(\mathbf{x})), & \mathbf{x} \in \Omega, \\ g(\mathbf{x}, T) = c_2 (w^*(\mathbf{x}, T) - w_{\text{tar}}(\mathbf{x})), & \mathbf{x} \in \Omega. \end{cases} \quad (19)$$

**证明** 将式(17)的第一个方程乘以  $f(\mathbf{x}, t)$ , 并在  $Q_T(\mathbf{x}, t)$  上进行积分, 将该方程中含有  $\frac{\partial \hat{p}}{\partial t}$  和  $\Delta \hat{p}$  的项进行分部积分, 得到

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} f(\mathbf{x}, T) \hat{p}(\mathbf{x}, T) dx - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t} \hat{p} dx dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} \Delta f \hat{p} dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} f \hat{p}^* \hat{r} dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} f_{1p}(p^*, w^*, r^*) f \hat{p} dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} f_{1w}(p^*, w^*, r^*) f \hat{w} dx dt. \end{aligned} \quad (20)$$

将式(17)的第2个方程乘以  $g(\mathbf{x}, t)$ , 并在  $Q_T(\mathbf{x}, t)$  上进行积分, 将该方程中含有  $\frac{\partial \hat{w}}{\partial t}$ 、 $\Delta \hat{w}$  的项进行分部积分, 得到

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} g(\mathbf{x}, T) \hat{w}(\mathbf{x}, T) dx - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial t} \hat{w} dx dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} \delta \Delta g \hat{w} dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} \delta \beta \Delta g \hat{p} dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} f_{2p}(p^*, w^*, r^*) g \hat{p} dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} f_{2w}(p^*, w^*, r^*) g \hat{w} dx dt. \end{aligned} \quad (21)$$

下面计算  $J_1(r^*) + J_2(r^*)$  沿着  $\hat{r} \in \text{Tan } B(r^*)$  方向上的 Gâteaux 导数

$$\begin{aligned} \frac{d(J_1(r^*) + J_2(r^*))}{dr} \cdot \hat{r} &= c_1 \int_{\Omega} [p^*(\mathbf{x}, T) - p_{\text{tar}}(\mathbf{x})] \hat{p}(\mathbf{x}, T) dx \\ &+ c_2 \int_{\Omega} [w^*(\mathbf{x}, T) - w_{\text{tar}}(\mathbf{x})] \hat{w}(\mathbf{x}, T) dx + c_3 \int_0^T \int_{\Omega} r^* \hat{r} dx dt. \end{aligned} \quad (22)$$

将式(20)与式(21)相加, 并结合方程(19), 将式(22)化简为如下形式:

$$\frac{d(J_1(r^*) + J_2(r^*))}{dr} \cdot \hat{r} = \int_0^T \int_{\Omega} (c_3 r^* + p^* f) \hat{r} dx dt. \quad (23)$$

根据文献[16]可知, 存在一个分段函数  $u^* \in \partial J_3(r^*)$  满足

$$\begin{cases} u(\mathbf{x}, t) = -1 & \text{当 } r^*(\mathbf{x}, t) > 0, \\ u(\mathbf{x}, t) \in [-1, 1] & \text{当 } r^*(\mathbf{x}, t) = 0, \\ u(\mathbf{x}, t) = 1 & \text{当 } r^*(\mathbf{x}, t) < 0, \end{cases} \quad (24)$$

有如下变分不等式成立:

$$\frac{d(J_1(r^*) + J_2(r^*))}{dr} \cdot (r - r^*) + \int_0^T \int_{\Omega} b u^*(r - r^*) dx dt \geq 0, \quad \forall r \in B, \quad (25)$$

其中  $\partial J_3(r^*)$  表示  $J_3$  在  $r^*$  处的次微分, 即

$$\delta J_3(r^*) = \{u \in L^\infty(Q_T) \mid J_3(r) \geq J_3(r^*) + \int_0^T \int_\Omega u(r-r^*) dxdt, \quad \forall r \in L^\infty(Q_T)\}.$$

将式(23)中的  $\hat{r}$  替换为  $r-r^*$ , 并将该式带入(25)中, 即可得到变分不等式(18)。

由式(18), 可得目标函数(4)的次梯度为

$$\nabla J(r^*)(x, t) = c_3 r^*(x, t) + f(x, t) p^*(x, t) + bu^*(x, t). \tag{26}$$

根据式(18), 当  $c_3 > 0$  时, 可得投影公式<sup>[17]</sup>为

$$r^*(x, t) = P_{[r_-, r_+]} \{ [f(x, t) p^*(x, t) + bu^*(x, t)] / c_3 \}, \quad (x, t) \in Q_T, \tag{27}$$

其中  $P_{[r_-, r_+]}$  表示从  $\mathbf{R}$  到  $[r_-, r_+]$  的投影, 即  $P_{[r_-, r_+]}(r) = \max\{r_-, \min\{r, r_+\}\}$ 。

下面分析最优控制的稀疏性, 给出如下定理。

**定理 5** 假设  $c_3 > 0, b > 0$ , 有下面的公式成立:

$$r^*(x, t) = 0 \Leftrightarrow |f(x, t) p^*(x, t)| \leq b, \quad \forall (x, t) \in Q_T, \tag{28}$$

$$u^*(x, t) = P_{[-1, 1]} \{ f(x, t) p^*(x, t) / b \}, \quad \forall (x, t) \in Q_T. \tag{29}$$

**证明** 根据式(27)以及最优解  $p^*, w^*$  的正则性, 有

$$r^*(x, t) = 0 \Leftrightarrow f(x, t) p^*(x, t) + bu^*(x, t) = 0 \Leftrightarrow f(x, t) p^*(x, t) = -bu^*(x, t),$$

由式(24), 可得  $|f(x, t) p^*(x, t)| \leq b$ 。

因此, 证明了式(28)的必要性。下面证明充分性, 这里分情况进行讨论。

(1) 当  $r^*(x, t) > 0$  时, 可得式(27)满足  $f(x, t) p^*(x, t) + bu^*(x, t) > 0$ , 且有  $u^*(x, t) = -1$ 。因此, 有  $f(x, t) > 0$  且  $f(x, t) p^*(x, t) / b > 1$ 。进一步可得  $u^*(x, t) = -1 = P_{[-1, 1]} \{ f(x, t) p^*(x, t) / b \}$ 。

(2) 当  $r^*(x, t) < 0$  时, 则有  $f(x, t) p^*(x, t) + bu^*(x, t) < 0$ , 且有  $u^*(x, t) = 1$ 。因此,  $f(x, t) < 0$  且  $f(x, t) p^*(x, t) / b < -1$ 。进一步可得  $u^*(x, t) = 1 = P_{[-1, 1]} \{ f(x, t) p^*(x, t) / b \}$ 。

综上 2 种情形, 证明了式(28)的充分性。

(3) 当  $r^*(x, t) = 0$  时, 则有  $f(x, t) p^*(x, t) + bu^*(x, t) = 0$ , 且有  $u^*(x, t) = [-1, 1]$ 。因此,  $f(x, t) p^*(x, t) / b = -u^*(x, t)$ 。进一步可得  $u^*(x, t) = P_{[-1, 1]} \{ f(x, t) p^*(x, t) / b \}$ 。

综上 3 种情形, 可得式(29)成立。

### 3 数值模拟

#### 3.1 数值离散化

选取空间区域  $(x, y) \in \Omega = (0, L)^2$ , 时间区域为  $[0, T]$ 。对时间进行网格剖分, 即  $t_n = n\Delta t, n = 0, 1, \dots, N$ , 时间步长为  $\Delta t = T/N$ 。对网格点进行空间剖分, 即网格点  $(x_i, y_j) = (ih, jh), i, j = 0, 1, \dots, Z$ , 空间步长为  $h = L/Z$ 。使用五点有限差分法对状态方程(5)和伴随方程(19)进行空间离散化。采用向前差分方法进行时间离散化。系统的初值为  $(p_0, w_0)$ ,  $n$  的取值为 0 到  $N-1$ , 在  $(x_i, y_j, t_n)$  处状态方程的离散格式如下:

$$\frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{p_{i,j-1}^n + p_{i-1,j}^n - 4p_{i,j}^n + p_{i+1,j}^n + p_{i,j+1}^n}{h^2} + f_1(p_{i,j}^n, w_{i,j}^n, r_{i,j}^n),$$

$$\frac{w_{i,j}^{n+1} - w_{i,j}^n}{\Delta t} = \delta \frac{w_{i,j-1}^n + w_{i-1,j}^n - 4w_{i,j}^n + w_{i+1,j}^n + w_{i,j+1}^n}{h^2} - \delta\beta \frac{p_{i,j-1}^n + p_{i-1,j}^n - 4p_{i,j}^n + p_{i+1,j}^n + p_{i,j+1}^n}{h^2} + f_2(p_{i,j}^n, w_{i,j}^n, r_{i,j}^n),$$

其中,  $p_{i,j}^0 := p_0(x_i, y_j), w_{i,j}^0 := w_0(x_i, y_j), i, j = 0, 1, \dots, Z-1$ 。

对于方程(19), 采用半隐式格式, 已知终端值  $f(x, T)$  和  $g(x, T)$ 。 $(x_i, y_j, t_n)$  点处方程(19)的离散格式为

$$\begin{aligned} -\frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n}{\Delta t} &= \frac{f_{i,j-1}^n + f_{i-1,j}^n - 4f_{i,j}^n + f_{i+1,j}^n + f_{i,j+1}^n}{h^2} + g_1(p_{i,j}^{n+1}, w_{i,j}^{n+1}, r_{i,j}^{n+1}, f_{i,j}^{n+1}, g_{i,j}^{n+1}) \\ &\quad - \delta\beta \frac{g_{i,j-1}^n + g_{i-1,j}^n - 4g_{i,j}^n + g_{i+1,j}^n + g_{i,j+1}^n}{h^2}, \end{aligned}$$

$$\frac{g_{i,j}^{n+1}-g_{i,j}^n}{\Delta t}=\delta \frac{g_{i,j-1}^n+g_{i-1,j}^n-4g_{i,j}^n+g_{i+1,j}^n+g_{i,j+1}^n}{h^2}+g_2(p_{i,j}^{n+1}, w_{i,j}^{n+1}, r_{i,j}^{n+1}, f_{i,j}^{n+1}, g_{i,j}^{n+1})。$$

接下来离散目标函数(4)。对于时间和空间积分的近似,使用复合梯形公式。因此,以目标泛函(4)中  $J_3$  为例,它的离散结果为

$$J_3(r) \approx \frac{bh^2\Delta t}{8} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{i,j=0}^{Z-1} (|r_{i,j}^n|+|r_{i+1,j}^n|+|r_{i,j+1}^n|+|r_{i+1,j+1}^n|+|r_{i,j}^{n+1}|+|r_{i+1,j}^{n+1}|+|r_{i,j+1}^{n+1}|+|r_{i+1,j+1}^{n+1}|)。$$

次梯度(26)的离散格式为  $\nabla_h J_{i,j}^n=c_3 r_{i,j}^n+f_{i,j}^n p_{i,j}^n+bu_{i,j}^n$ 。

### 3.2 数值结果

本节将对稀疏最优控制问题进行数值求解。选取的时间终端值为  $T=2$ ,空间步长  $\Delta h=0.5$ ,时间步长  $\Delta t=0.001$ 。这里所研究的区域是以草本植物为主,且降雨量较大,土质疏松,植被死亡率较高的半干旱地区。根据文献[4],本文选取  $a=5, m=1.3, \beta=0.203$ 。假定水的扩散速率是植被的 50 倍,因此有  $\delta=50$ 。这里所研究模型的时间单位为  $d$ ,空间单位为  $m$ 。选取  $a=5.0$  时对应的斑图作为初始斑图,  $a_1=5.4, a_2=5.6, a_3=5.8$  作为目标斑图。此外,选取  $c_1=1, c_2=100, c_3=10^{-15}$ 。为了验证  $b$  对  $r^*(x, t)$  稀疏性的影响,这里分别选取  $b_1=0, b_2=0.03, b_3=10$ 。

图 3 给出了当  $b=0$  时,在  $t=0, 1, 2$  时的最优控制解  $r^*(x, t)$ 。对应的状态变量  $p^*(x, t)$  (见图 3(a) — (c))。从图 3(a) — (c) 可以看出,选取  $a=5$  作为初始斑图,此时斑图呈点状结构,通过最优控制手段,斑图结构可分别转化为混合状 ( $a_1=5.4$ )、带状 ( $a_2=5.6$ ) 和均匀态 ( $a_3=5.8$ )。与图 1 相比,图 3(a) — (c) 中的受控斑图与图 1(b) — (d) 中的目标斑图一致。但是,从图 3(d) — (f) 可以看出,在  $(x, T)$  点处  $r^*(x, T)=0$  的比例很小,这就意味着需要投入更多的成本来达到防止生态系统荒漠化的目的。

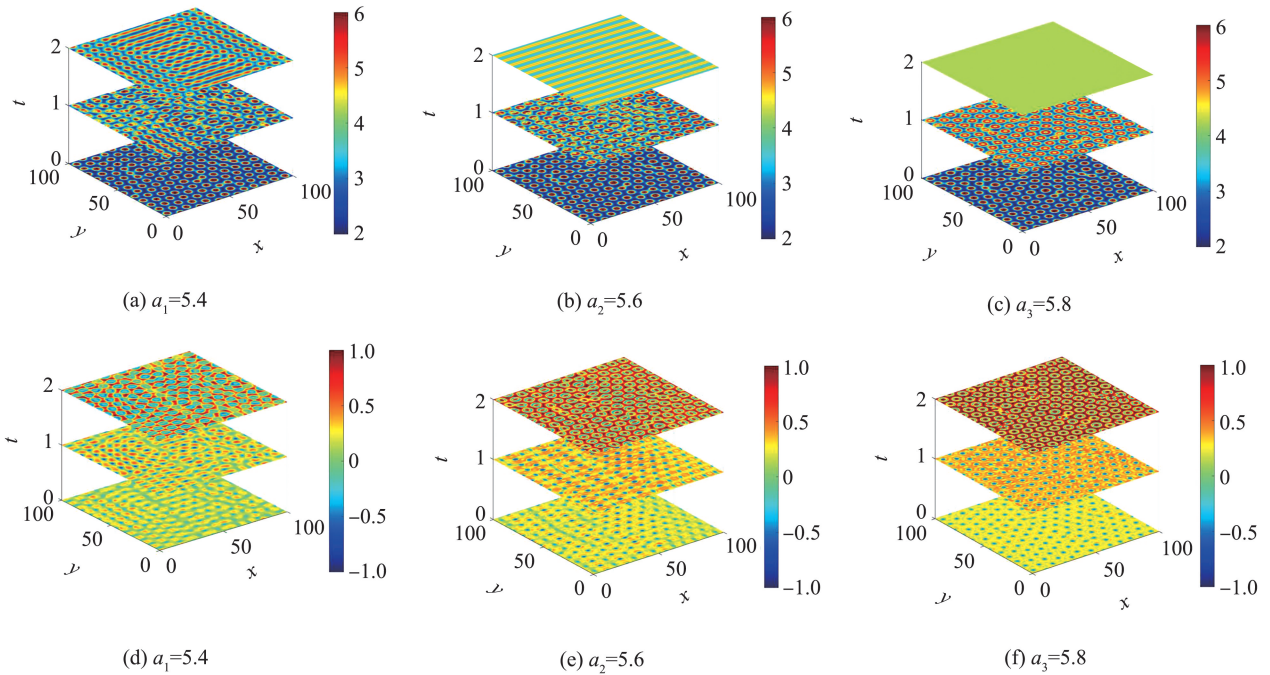


图 3 当  $b_1=0$  时,受控解  $p^*$  和最优控制  $r^*$   
Fig.3 The controlled solution  $p^*$  and optimal control  $r^*$  with  $b_1=0$

结合图 3,从图 4(d) — (f) 可以看出,随着  $b$  的增大  $|r^*(x; T)|$  逐渐减小,这意味着投入的成本降低。随着  $b$  的进一步增加,  $r^*(x; T)=0$  的比例增大,如图 5(d) — (f) 所示。此外,随着  $b$  的不断增大,受控斑图与目标斑图的差距也随之增大,但受控斑图仍然保持了图 1(b) — (d) 中的目标斑图的关键特征,这保证了最优控制的有效性。图 6 给出了不同的  $b$  所对应的  $K$  随  $a_{target}$  和  $t$  变化的二维等高线图。结果表明,通过稀疏最优控制手段,可以提高  $K$  (见图 6(b) 和(c)),并得到了与图 6(a) 类似的效果。

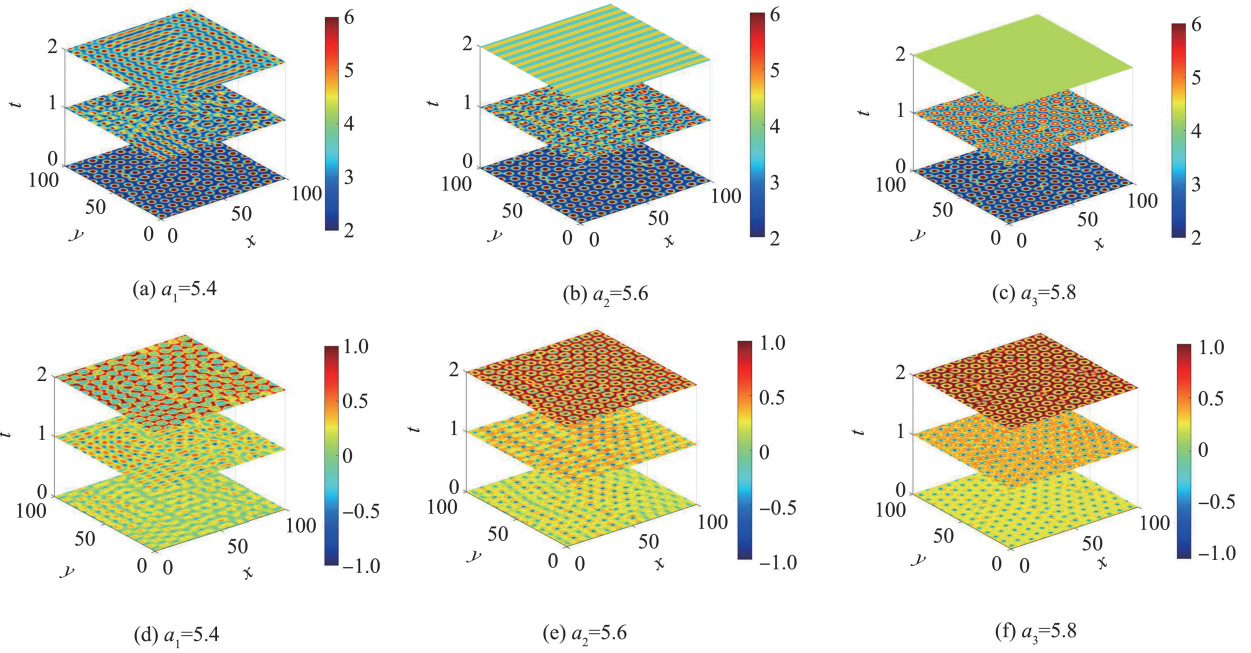


图 4 当  $b_2=0.03$  时, 受控解  $p^*$  和最优控制  $r^*$   
 Fig.4 The controlled solution  $p^*$  and the optimal control  $r^*$  with  $b_2=0.03$

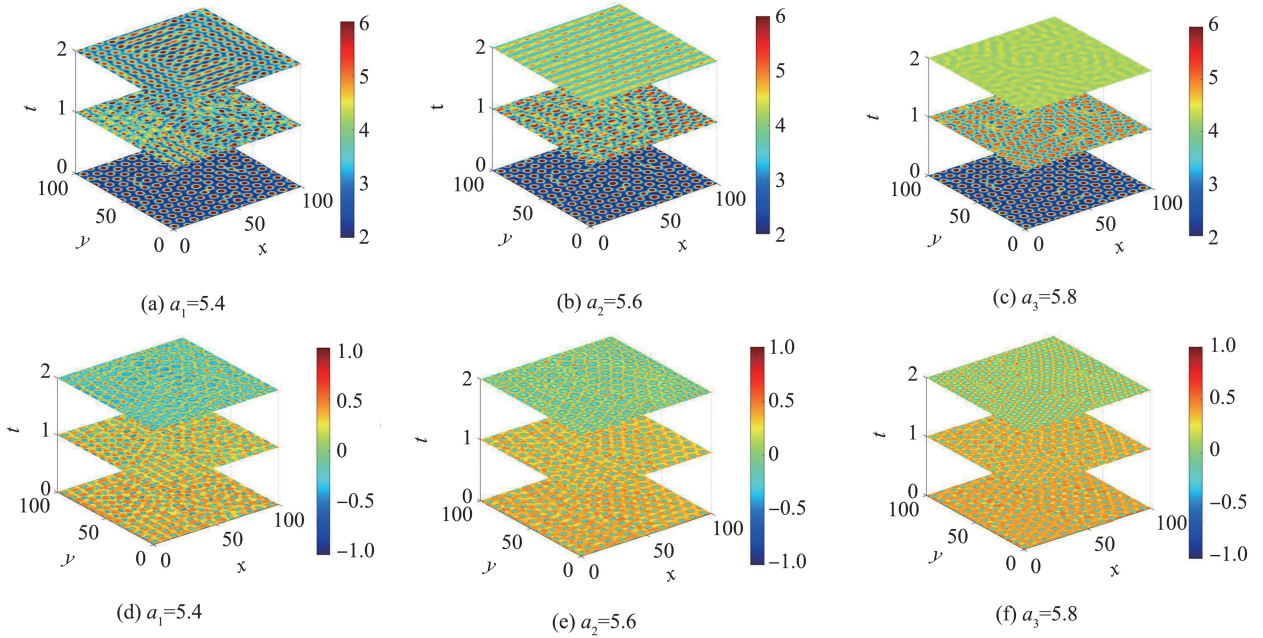


图 5 当  $b_3=10$  时, 受控解  $p^*$  和最优控制  $r^*$   
 Fig.5 The controlled solution  $p^*$  and the optimal control  $r^*$  with  $b_3=10$

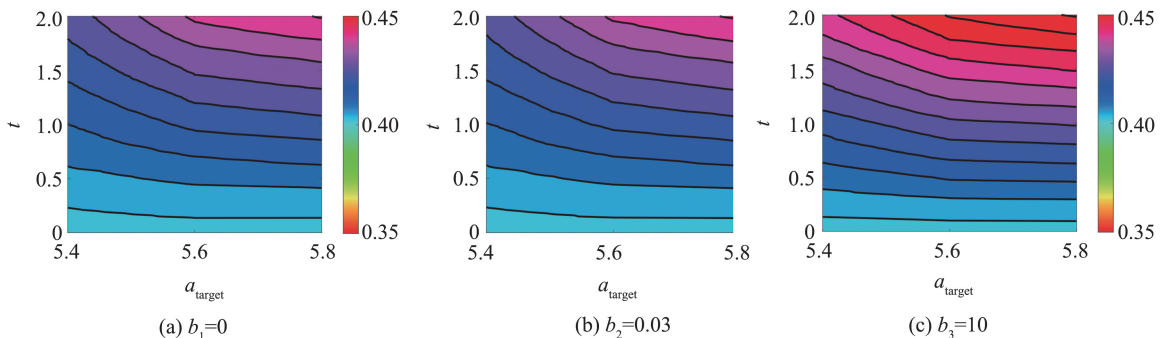


图 6 不同权重  $b$  下受控解的  $K$  随  $t$  和  $a_{target}$  变化的等高线图  
 Fig.6 Contour map of  $K$  varying with  $t$  and  $a_{target}$  for controlled solution under different weights  $b$

上面定性地分析了在不同的目标斑图和  $b$  下的控制效果。接下来,将利用一些定量指标评估控制策略。首先给出空间 0 值比  $V_{r^*(t)=0}$ , 它被定义为在某一给定时刻  $t_n, n=0, 1, \dots, N-1$ , 满足  $r_{i,j}^*=0$  的节点数与该时刻空间总节点数之比:

$$V_{r^*(t)=0} = \frac{1}{(M+1)^2} |\{(x_i, y_j) | (r^*)_{i,j}^n = 0, i, j = 0, 1, \dots, Z\}|.$$

$r_{\text{average}}^*$  表示  $|r^*(x, t)|$  的时空积分平均值, 定义为

$$r_{\text{average}}^* = \frac{1}{T|\Omega|} \int_0^T \int_{\Omega} r^*(x, t) dx dt.$$

$R$  表示受控斑图  $p^*(x, T)$  与目标斑图  $p_{\text{tar}}(x)$  之间的相对误差, 定义为

$$R = \frac{\|p^* - p_{\text{tar}}\|}{\|p_{\text{tar}}\|}.$$

图 7(a) 给出了不同目标斑图在不同稀疏性条件下相对误差, 当  $b=10$  时,  $R$  保持在 0~0.06 之间。图 7(b) 为终端时刻的空间 0 值比  $V_{r^*(T)}$ 。显然, 当  $b$  越大, 0 值比越大,  $r^*$  的稀疏性越好。图 7(c) 为  $b$  对  $r_{\text{average}}^*$  的影响。随着  $b$  的增大,  $r_{\text{average}}^*$  逐渐减小, 表明加入稀疏控制手段能够有效的降低成本。此外, 当  $b$  固定时,  $r_{\text{average}}^*$  随着  $a$  的增大而增大, 这说明  $K$  越大, 需要投入的成本就越高。

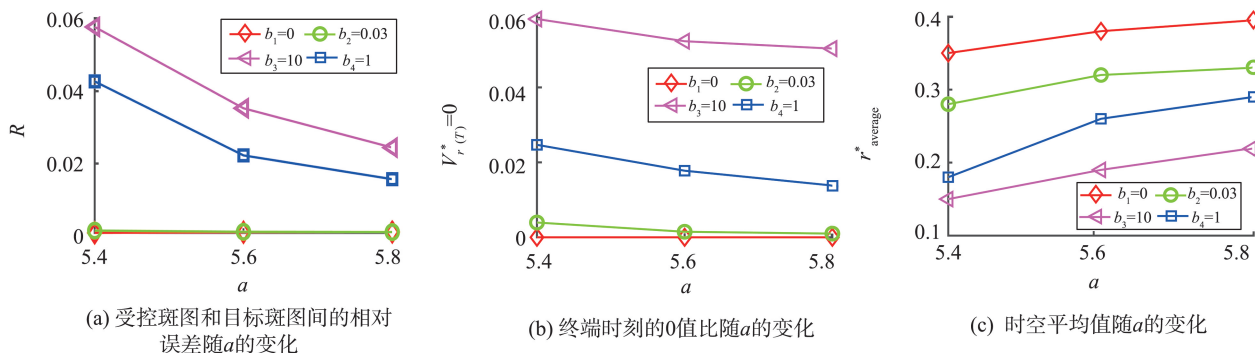


图 7 不同的定量指标随  $a$  的变化

Fig.7 Variation of different quantitative indicators with  $a$

## 4 结语

本文分析了一类带有交叉扩散的植被—水反应扩散模型, 得到了图灵斑图产生的条件, 并通过模拟展示了 4 种不同类型的植被斑图。给出了一个可以刻画斑图结构与植被生态系统稳健性之间关系的定量指标  $K$ 。模拟结果显示,  $K$  越大, 生态系统越稳健。为了提高生态系统的稳健性, 将人类活动作为控制函数通过最优控制手段形成给定的目标斑图结构。为此, 给出了模型的稀疏最优控制问题的目标函数, 通过数学分析首先对状态方程的解进行了先验估计, 进而得到了一阶必要最优性条件, 最后运用数值分析得到了数值最优解。

在干旱半干旱地区, 由于其植被生物量稀少, 因此需要通过植树造林的手段来防止该地区荒漠化的发生。但是, 过度的植树造林并不利于生态系统的稳定<sup>[18]</sup>。所以, 如何合理的利用资源来提高生态系统的稳健性是主要思考的问题。因为带状、间隙状等斑图结构对应的生态系统较为稳定, 所以需要结合当地的实际情形 (如气候条件), 选择合适的目标斑图结构。具体来讲, 对于半干旱地区, 可将间隙状的结构作为目标斑图; 对于干旱地区, 该地区较半干旱地区降水资源紧缺, 可将带状结构作为目标斑图。此外, 对于如何选取  $b$  可由当地的资金预算来决定。

目前, 全球植被生态系统面临着很大的挑战, 防止荒漠化的发生是当今人类的共同目标。但是如何很好地利用有限的资源来控制植被系统荒漠化的发生是当前亟需解决的问题。为此, 本文给出了基于稀疏最优控制的方法, 可以有效的解决这个问题。稀疏性越好, 意味着该地区生态系统需施加控制的区域越少。因此, 本文为生态系统的荒漠化防治提供了相关的理论基础。

## 参考文献:

- [1] CONSOLO G, VALENTI G. Secondary seed dispersal in the Klausmeier model of vegetation for sloped semi-arid environments [J]. *Ecological Modeling*, 2019, 402(24):66-75.
- [2] SHERRATT J A. An analysis of vegetation stripe formation in semi-arid landscapes [J]. *Journal of Mathematical Biology*, 2005, 51(2):183-197.
- [3] LEFEVER R, LEJEUNE O. On the origin of tiger bush [J]. *Bulletin of Mathematical Biology*, 1997, 59(2):263-294.
- [4] KLAUSMEIER C A. Regular and irregular patterns in semiarid vegetation [J]. *Science*, 1999, 284(5421):1826-1828.
- [5] HILLERISLAMBERS R, RIETKERK M, VAN DEN BOSCH F, et al. Vegetation pattern formation in semi-arid grazing systems [J]. *Ecology*, 2001, 82(1):50-61.
- [6] ABEL C, HORION S, TAGESSON T, et al. The human-environment nexus and vegetation-rainfall sensitivity in tropical drylands [J]. *Nature Sustainability*, 2021, 4:25-32.
- [7] HUANG Shengzhi, ZHENG Xudong, MA Lan, et al. Quantitative contribution of climate change and human activities to vegetation cover variations based on GA-SVM mode [J]. *Journal of Hydrology*, 2020, 584:124687.
- [8] MAHMOUD S H, GAN T Y. Impact of anthropogenic climate change and human activities on environment and ecosystem services in arid regions [J]. *Science of the Total Environment*, 2018, 633(15):1329-1344.
- [9] HOU Lifeng, SUN Guiquan, PERC M. The impact of heterogeneous human activity on vegetation patterns in arid environments [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2023, 126:107461.
- [10] SUN Guiquan, WANG Cuihua, CHANG Lili, et al. Effects of feedback regulation on vegetation patterns in semi-arid environments [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2018, 61:200-215.
- [11] 欧阳颀. 非线性科学与斑图动力学导论 [M]. 北京:北京大学出版社,2010.
- OUYANG Qi. Introduction to nonlinear science and pattern dynamics [M]. Beijing: Peking University Press, 2010.
- [12] RIETKERK M, DEKKER S C, De RUITER P C, et al. Self-organized patchiness and catastrophic shifts in ecosystems [J]. *Science*, 2004, 305(5692):1926-1929.
- [13] CHANG Lili, GONG Wei, JIN Zhen, et al. Sparse optimal control of pattern formations for an sir reaction diffusion epidemic mode [J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2022, 82(5):1764-1790.
- [14] BARBU V. Analysis and control of nonlinear infinite dimensional systems [M]. Amsterdam: Elsevier, 1993.
- [15] GARVIE M R, TRENCH C. Optimal control of a nutrient-phytoplankton-zooplankton-fish system [J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2007, 46(3):775-791.
- [16] CASAS E, HERZOG R, WACHSMUTH G. Optimality conditions and error analysis of semilinear elliptic control problems with  $L^1$  cost function [J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2012, 22:795-820.
- [17] TROLTZSCH F. Optimal control of partial differential equations: theory, methods, and applications [M]. Rhode Island: American Mathematical Society, 2010.
- [18] CAO Shixiong, CHEN Li, SHANKMAN D, et al. Excessive reliance on afforestation in China's arid and semi-arid regions: lessons in ecological restoration [J]. *Earth-Science Reviews*, 2011, 104(4):240-245.

(编辑:陈丽萍)