山东大学学报(理学版)2025 年 4 月 第 60 卷 第 4 期
Journal of Shandong University(Natural Science), Vol.60, No.4, 2025 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2025)04-0050-10 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2024.356

具有周期感染率的年龄结构传染病模型的阈值动力学分析

董颖,吕云飞*
(天津工业大学数学科学学院, 天津 300387)

摘要:本文研究了一类具有周期感染率和人口流动的年龄结构 SEIR 传染病模型。首先证明了模型非负解的存在唯一性。其次利用算子不动点定理和周期更新定理证明了模型地方病周期解的存在性和无病周期解的全局渐近稳定性。通过引入周期解算子在 0 点的 Fréchet 导数$\mathscr{F}$的谱半径 $r(\mathscr{F})$,证明了当 $r(\mathscr{F})>1$ 时, 模型存在地方病周期解(疾病爆发); 当 $r(\mathscr{F})<1$ 时, 无病周期解是全局渐近稳定的(疾病灭绝)。

关键词:年龄结构; 人口流动; 疫苗接种; 周期感染率; 周期解
中图分类号:O175;O29 **文献标志码**:A
引用格式:董颖,吕云飞. 具有周期感染率的年龄结构传染病模型的阈值动力学分析[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(4):50-59.

Threshold dynamics analysis of an age-structured epidemic model with periodic infection rate

DONG Ying, LYU Yunfei*
(School of Mathematical Sciences, Tiangong University, Tianjin 300387, China)

Abstract: This paper studies an age-structured SEIR epidemic model with periodic infection rate and population flows. Firstly, the existence and uniqueness of non-negative solution of the model are proved. Subsequently, by using the operator fixed-point theorem and the periodic renewal theorem, the existence of endemic periodic solution and the global asymptotic stability of the disease-free periodic solution of the model are demonstrated. By introducing the spectral radius $r(\mathscr{F})$ of the Fréchet derivative $\mathscr{F}$ of the periodic solution operator at point 0, it is shown that when $r(\mathscr{F})>1$, the model has an endemic periodic solution (disease outbreak); when $r(\mathscr{F})<1$, the disease-free periodic solution is globally asymptotically stable (disease extinction).

Key words: age structure; population mobility; vaccination; periodic infection rate; periodic solution

0 引言

传染病是由病原微生物(如病毒、细菌等)和寄生虫感染人体后产生的具有传染性的疾病。传染病动力学在研究传染病的发病机理、传播规律以及制定疾病预防控制策略中发挥着关键作用[1]。

在传染病建模过程中,年龄是不可忽视的因素[2]。这是因为不同年龄的个体对于同一种传染病的易感染程度不同。例如,风疹、小儿麻痹症、百日咳等疾病只在儿童个体中传播; 而诸如性病等一类的疾病,则只能在成年个体中传播。此外,传染病的某些预防措施,如按年龄接种疫苗等,用常微分方程模型不能进行准确地描述。因此,研究具有年龄结构的传染病模型具有重要的实际意义。2022 年,Huang 等[3]研究了一个具有疫苗接种的年龄结构 SEIR 模型,利用特征值的估算解决了无病平衡点的局部稳定性问题。

收稿日期:2024-10-18; **网络出版时间**:2025-03-10 11:31:52
基金项目:国家自然科学基金资助项目(12471468); 天津市自然科学基金资助项目(23JCZDJC00470)
第一作者:董颖(2001—),女,硕士研究生,研究方向为微分方程与生物数学. E-mail:dyingdydy@163.com
* **通信作者**:吕云飞(1984—),男,教授,博士生导师,博士,研究方向为微分方程与动力系统. E-mail:lvyunfei@tiangong.edu.cn

另外，基于季节变换，个体的生命周期、交配习惯、食物供应以及疾病发病率等因素具有周期变化特征，周期性爆发是许多流行性传染病的普遍现象[4]。因此，研究具有周期系数的模型更为现实[5-7]。2014 年，Kuniya[8]提出了一个具有周期系数的年龄结构 SIR 流行病模型，推导了模型的基本再生数，并证明了该基本再生数为周期解存在的阈值条件。2020 年，Kang 等[9]研究了某些传染病的季节特征。在假设感染率具有时间周期的情况下，他们建立了 SEIR 传染病模型，并利用不动点定理研究了模型周期解的存在性。2019 年，Okuwa 等[10]建立了一个年龄结构 SIRS 传染病模型，给出了归一化系统适定性的严格证明，并利用不动点理论研究了地方病稳态解的存在性，推导出了地方病存在的阈值条件。

目前的研究在考虑自然年龄的情况下，更多关注了急性传染病（如流感等）短期传播的情况，而对于长期存在的慢性传染病（如艾滋病、结核病等）以及对新个体的招募和人口流动不平衡的情况研究较少。这表明，针对 SEIR 类型的慢性传染病模型的分析相对不足，需要更多的关注和深入研究。2018 年，Khan 等[11]研究了人口不恒定的 SEIR 年龄结构传染病模型，模型考虑了与年龄有关的接触率和感染率，证得无病平衡解局部和全局稳定性。本文旨在将上述关于年龄结构模型的研究扩展到具有不同人口规模的年龄结构 SEIR 模型，在考虑人口规模变化的情况下证得了非平凡周期解的存在性。例如，该论文中的模型将文献[12-13]中介绍的 SEIR 模型作为一种特殊情况进行了涵盖，这一研究不局限于麻疹等特定传染病，还致力于将周期性 SEIR 流行病模型推广到更一般化的情况，更全面地理解传染病在人口动态和疫苗接种策略下的行为。

1　模型建立与预备知识

在文献[11]的模型基础上，本文考虑一类具有年龄结构的季节传染病模型。假设人口被分为易感者、潜伏者、感染者和康复者 4 个仓室，分别由 $S(a,t)$、$E(a,t)$、$I(a,t)$ 和 $R(a,t)$ 表示，$N(a,t)=S(a,t)+E(a,t)+I(a,t)+R(a,t)$ 代表总人口数量，疾病不垂直传播，出生由 $S(0,t)=\int_0^{a^+}b(a)N(a,t)\mathrm{d}a$ 刻画，其中 $b(a)$ 为出生率，a^+ 表示最大年龄。因移民、旅游等其他方式导致的人口流动由 $B(a)N(a,t)$ 刻画，其中 $B(a)$ 为人口流动率，且 $0<B(a)<1$，以及流动人口为易感染者（流动人员更注意个人防护，如注射疫苗）。由于季节因素的影响，考虑周期感染函数：

$$k(a)\lambda(a,t)=k(a)\int_0^{a^+}\beta(t;a,a')\frac{I(a',t)}{N(a',t)}\mathrm{d}a',$$

其中，$k(a)$ 表示接触率，$\beta(t;a,a')$ 表示年龄为 a 的易感个体被年龄为 a' 的感染个体感染的概率，是非负的 T 周期函数。模型如下：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S(a,t)}{\partial t}+\dfrac{\partial S(a,t)}{\partial a}=B(a)N(a,t)-(k(a)\lambda(a,t)+\mu(a)+\rho(a))S(a,t),\\ \dfrac{\partial E(a,t)}{\partial t}+\dfrac{\partial E(a,t)}{\partial a}=(k(a)\lambda(a,t))S(a,t)-(\mu(a)+\alpha(a))E(a,t),\\ \dfrac{\partial I(a,t)}{\partial t}+\dfrac{\partial I(a,t)}{\partial a}=\alpha(a)E(a,t)-(\gamma(a)+\mu(a))I(a,t),\\ \dfrac{\partial R(a,t)}{\partial t}+\dfrac{\partial R(a,t)}{\partial a}=\gamma(a)I(a,t)+\rho(a)S(a,t)-\mu(a)R(a,t),\\ S(0,t)=\int_0^{a^+}b(a)N(a,t)\mathrm{d}a,\ E(0,t)=0,\ I(0,t)=0,\ R(0,t)=0,\\ S(a,0)=S_0(a),\ E(a,0)=E_0(a),\ I(a,0)=I_0(a),\ R(a,0)=R_0(a)。\end{cases}\tag{1}$$

其中，$\mu(a)$ 表示死亡率，$\rho(a)$ 表示疫苗接种率，$\dfrac{1}{\alpha(a)}$ 表示潜伏期，$\dfrac{1}{\gamma(a)}$ 表示感染期。

关于模型参数有如下假设：

（ⅰ）$\alpha(\cdot),\ \rho(\cdot),\ \gamma(\cdot),\ b(\cdot)\ ,\ B(\cdot)\in L_+^\infty(0,a^+)$，对 $\forall t\in\mathbf{R}^+$，$\beta(t;\cdot,\cdot)\in L_+^\infty([0,a^+]\times[0,a^+])$；

（ⅱ）$\mu(a)>0$，$\int_0^{a^+}\mu(a)\mathrm{d}a=+\infty$，且 $\mu(a)$ 是局部可积的；

（ⅲ）宿主种群的最大年龄大于等于参数感染率的周期，即 $a^+\geqslant T$。

基于该周期年龄结构模型，本文将主要给出疾病灭绝和爆发的阈值动力学。

2 解的适定性

为了研究解的适定性，将模型（1）化为一个抽象的常微分方程。为此，考虑总人口数 $N(a,t)$ 满足方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial N(a,t)}{\partial t}+\dfrac{\partial N(a,t)}{\partial a}=B(a)N(a,t)-\mu(a)N(a,t),\\ N(0,t)=\displaystyle\int_0^{a^+}b(a)N(a,t)\mathrm{d}a,\\ N(a,0)=N_0(a)。\end{cases}\tag{2}$$

易得方程（2）的稳态解 $\bar{N}(a)$ 满足

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\bar{N}(a)}{\mathrm{d}a}=B(a)\bar{N}(a)-\mu(a)\bar{N}(a),\\ \bar{N}(0)=\displaystyle\int_0^{a^+}b(a)\bar{N}(a)\mathrm{d}a,\end{cases}\tag{3}$$

解为

$$\bar{N}(a)=\bar{N}(0)\mathrm{e}^{\int_0^a[B(\tau)-\mu(\tau)]\mathrm{d}\tau}。\tag{4}$$

根据假设（ⅱ）$\int_0^{a^+}\mu(a)\mathrm{d}a=+\infty$ 得，模型（2）的解 $N(a,t)$ 最终稳定在它的稳态解 $\bar{N}(a)$，如果初始值 $s_0(a)+e_0(a)+i_0(a)+r_0(a)=\bar{N}(a)$，则 $N(a,t)=\bar{N}(a)$。

令

$$s(a,t)=\frac{S(a,t)}{\bar{N}(a)},\quad e(a,t)=\frac{E(a,t)}{\bar{N}(a)},\quad i(a,t)=\frac{I(a,t)}{\bar{N}(a)},\quad r(a,t)=\frac{R(a,t)}{\bar{N}(a)},$$

则系统（1）可以简化为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial s(a,t)}{\partial t}+\dfrac{\partial s(a,t)}{\partial a}=B(a)-(B(a)+\rho(a)+k(a)\lambda(a,t))s(a,t),\\ \dfrac{\partial e(a,t)}{\partial t}+\dfrac{\partial e(a,t)}{\partial a}=-(B(a)+\alpha(a))e(a,t)+k(a)\lambda(a,t)s(a,t),\\ \dfrac{\partial i(a,t)}{\partial t}+\dfrac{\partial i(a,t)}{\partial a}=-(B(a)+\gamma(a))i(a,t)+\alpha(a)e(a,t),\\ \dfrac{\partial r(a,t)}{\partial t}+\dfrac{\partial r(a,t)}{\partial a}=-B(a)r(a,t)+\gamma(a)i(a,t)+\rho(a)s(a,t),\\ s(0,t)=1,\ e(0,t)=0,\ i(0,t)=0,\ r(0,t)=0,\\ s(a,0)=s_0(a):=\dfrac{S_0(a)}{\bar{N}(a)},\ e(a,0)=e_0(a):=\dfrac{E_0(a)}{\bar{N}(a)},\\ i(a,0)=i_0(a):=\dfrac{I_0(a)}{\bar{N}(a)},\ r(a,0)=r_0(a):=\dfrac{R_0(a)}{\bar{N}(a)},\\ s_0(a)+e_0(a)+i_0(a)+r_0(a)=\bar{N}(a),\\ s(a,t)+e(a,t)+i(a,t)+r(a,t)=1,\\ \lambda(a,t)=\displaystyle\int_0^{a^+}\beta(t;a,a')i(a',t)\mathrm{d}a'。\end{cases}\tag{5}$$

由 $s(a,t)=1-e(a,t)-i(a,t)-r(a,t)$，则系统（1）可以简化为一个三维系统：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial e(a,t)}{\partial t}+\dfrac{\partial e(a,t)}{\partial a}=-(B(a)+\alpha(a))e(a,t)+k(a)\lambda(a,t)(1-e(a,t)-i(a,t)-r(a,t)),\\
\dfrac{\partial i(a,t)}{\partial t}+\dfrac{\partial i(a,t)}{\partial a}=-(B(a)+\gamma(a))i(a,t)+\alpha(a)e(a,t),\\
\dfrac{\partial r(a,t)}{\partial t}+\dfrac{\partial r(a,t)}{\partial a}=-B(a)r(a,t)+\gamma(a)i(a,t)+\rho(a)(1-e(a,t)-i(a,t)-r(a,t)),\\
e(0,t)=0,\ i(0,t)=0,\ r(0,t)=0,\\
e(a,0)=e_0(a):=\dfrac{E_0(a)}{\bar{N}(a)},\ i(a,0)=i_0(a):=\dfrac{I_0(a)}{\bar{N}(a)},\ r(a,0)=r_0(a):\dfrac{R_0(a)}{\bar{N}(a)}。
\end{cases}
\tag{6}
$$

定义(e,i,r)的状态空间:$M:=L_+^1(0,a^+)\times L_+^1(0,a^+)\times L_+^1(0,a^+)$,其中

$$\forall\,\boldsymbol{\phi}(a)=(\phi_1(a),\phi_2(a),\phi_3(a))^{\mathrm{T}}\in M,$$

定义范数

$$\|\boldsymbol{\phi}\|=\sum_{i=1}^{3}\|\phi_i\|,\ \|\phi_i\|=\int_0^{a^+}|\phi_i|\mathrm{d}a。$$

定义线性算子 $\boldsymbol{A}:\mathscr{D}(\boldsymbol{A})\subset M\to M$ 如下:

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\phi})(a)=\left(-\frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}a},-\frac{\mathrm{d}\phi_2}{\mathrm{d}a},-\frac{\mathrm{d}\phi_3}{\mathrm{d}a}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\mathscr{D}(\boldsymbol{A})=\left\{\boldsymbol{\phi}=\begin{pmatrix}\phi_1(a)\\ \phi_2(a)\\ \phi_3(a)\end{pmatrix}\in M:\phi_j\in W^{1,1}(0,a^+),\ \begin{pmatrix}\phi_1(0)\\ \phi_2(0)\\ \phi_3(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\},$$

其中 Sobolev 空间 $W^{1,1}(0,a^+)$表示$(0,a^+)$上的所有绝对连续函数。定义算子 F 如下:

$$F(t,\boldsymbol{\phi})(a)=\begin{pmatrix}-(B(a)+\alpha(a))\phi_1+k(a)\lambda[t,a|\phi_2](1-\phi_1-\phi_2-\phi_3)\\ -(B(a)+\gamma(a))\phi_2+\alpha(a)\phi_1\\ -B(a)\phi_3+\gamma(a)\phi_2+\rho(a)(1-\phi_1-\phi_2-\phi_3)\end{pmatrix},\tag{7}$$

其中

$$\lambda[t,a|\phi_2]=\int_0^{a^+}\beta(t;a,a')\phi_2(a')\mathrm{d}a'。$$

令 $\boldsymbol{u}(t)=(e(t,\cdot),i(t,\cdot),r(t,\cdot))^{\mathrm{T}}\in M$,则三维系统(6)写成如下抽象的柯西方程:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}(t)+F(\boldsymbol{u}(t)),\\ \boldsymbol{u}(0)=u_0,\ u_0=(e_0,i_0,r_0)^{\mathrm{T}}\in M。\end{cases}\tag{8}$$

根据算子半群理论,$\boldsymbol{A}$ 生成一个强连续算子半群$\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$,即算子 $\boldsymbol{A}$ 是 C_0-半群$\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$的无穷小生成元且

$$e^{tA}\begin{pmatrix}\phi_1(a)\\ \phi_2(a)\\ \phi_3(a)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(e^{tA_1}\phi_1)(a)\\ (e^{tA_2}\phi_2)(a)\\ (e^{tA_3}\phi_3)(a)\end{pmatrix},$$

其中 $e^{tA_i}(i=1,2,3)$是 $L^1(0,a^+)$上的算子半群:

$$(e^{tA_i}\phi_i)(a)=\begin{cases}0, & t>a,\\ \phi_i(a-t), & t<a,\end{cases}\tag{9}$$

虽然式(9)没有定义 $t=a$ 的情况,但不影响结果,因为对于 $\phi\in\mathscr{D}(\boldsymbol{A})$, $\phi(0)=0$ 总是成立的。

下面研究系统(6)非负解的存在唯一性,定义区域 Ω

$$\Omega:=\{(e,i,r)\in L_+^1(0,a^+)\times L_+^1(0,a^+)\times L_+^1(0,a^+),\ 0\leqslant e+i+r\leqslant 1\}。$$

引理 1 对于任意固定的 $t\in\mathbf{R}^+$，映射 $F(t,\cdot):\Omega\to E$ 是 Lipschitz 连续的，且存在一个数 $\sigma\in(0,1)$，使得

$$(I+\sigma F)\Omega\subset\Omega。\tag{10}$$

证明 显然，由式(7)的定义得 $F(t,\cdot)$ 是 Lipschitz 连续的，下面主要证明 $(I+\sigma F)\Omega\subset\Omega$。定义一个向量 $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,v_3)^{\mathrm{T}}$，满足 $(I+\sigma F)(u_1,u_2,u_3)^{\mathrm{T}}=(v_1,v_2,v_3)^{\mathrm{T}}$。另外

$$v_1=u_1-\sigma[(B(a)+\alpha(a))u_1-k(a)\lambda[t,a|\phi_2](1-u_1-u_2-u_3),$$
$$v_2=u_2-\sigma[(B(a)+\gamma(a))u_2-\alpha(a)u_1],$$
$$v_3=u_3-\sigma[B(a)u_3-\gamma(a)u_2-\rho(a)(1-u_1-u_2-u_3)]。$$

令 $\alpha^+:=\sup\alpha$，$\gamma^+:=\sup\gamma$。根据 $0<B(a)<1$，选取 σ 满足 $\sigma(B(a)+\alpha^+)\leqslant\sigma(1+\alpha^+)\leqslant 1$ 时，$v_1\geqslant 0$ 成立；满足 $\sigma(B(a)+\gamma^+)\leqslant\sigma(1+\gamma^+)\leqslant 1$ 时，$v_2\geqslant 0$ 成立；满足 $\sigma B(a)\leqslant 1$ 时，$v_3\geqslant 0$ 成立。下面证明 $v_1+v_2+v_3\leqslant 1$ 成立。

$$\begin{aligned}v_1(a)+v_2(a)+v_3(a)&=\sigma[-B(a)(u_1+u_2+u_3)]+k(a)\lambda[t,a|\phi_2]+\rho(a)]\times(1-u_1-u_2-u_3)+u_1+u_2+u_3\\&\leqslant\sigma(k(a)\lambda[t,a|\phi_2]+\rho(a))(1-u_1-u_2-u_3)+u_1+u_2+u_3。\end{aligned}$$

令 $k^+:=\sup k$，$\lambda^+:=\sup\lambda$，$\rho^+:=\sup\rho$。当选取 σ 满足 $\sigma(k^+\lambda^++\rho^+)\leqslant 1$ 时，$v_1+v_2+v_3\leqslant 1$ 成立。综上，选取 σ 满足

$$0<\sigma<\min\left\{\frac{1}{k^+\lambda^++\rho^+},\ \frac{1}{1+\alpha^+},\ \frac{1}{1+\gamma^+}\right\}。$$

证得 $(I+\sigma F)\Omega\subset\Omega$。证毕。

定理 1 对于任意 $u_0\in\Omega\cap\mathscr{D}(\boldsymbol{A})$，柯西问题(8)存在一个唯一的非负解 $U(t,0)u_0=u(t)\in\Omega$，其中演化算子 $U(t,s)_{t\geqslant s\geqslant 0}$ 满足

$$U(s,s)=I,\quad U(t,\sigma)U(\sigma,s)=U(t,s),\quad U(t,s)(\Omega)\subset\Omega。$$

证明 根据 Busenberg 方法[14]，将柯西方程(8)写成下面的形式：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}(t)}{\mathrm{d}t}=(\boldsymbol{A}-\frac{1}{\sigma}I)\boldsymbol{u}(t)+\frac{1}{\sigma}(I+\sigma F)\boldsymbol{u}(t),\quad \boldsymbol{u}(0)=u_0。$$

其中 σ 为满足式(10)成立的 σ。通过常数变易公式，有

$$\boldsymbol{u}(t)=e^{-\frac{1}{\sigma}t}e^{t\boldsymbol{A}}u_0+\int_0^t e^{-\frac{1}{\sigma}(t-s)\boldsymbol{A}}[\boldsymbol{u}(s)+\sigma F(\boldsymbol{u}(s))]\mathrm{d}s,\tag{11}$$

该解定义一个演化算子 $U(t,s)_{t\geqslant s\geqslant 0}$，$U(t,0)u_0=\boldsymbol{u}(t)$。定义一个如下的迭代序列 $\{u^n(t)\}$：

$$\begin{cases}u^0(t)=u_0,\\ u^{n+1}(t)=e^{-\frac{1}{\sigma}t}e^{t\boldsymbol{A}}u_0+\displaystyle\int_0^t e^{-\frac{1}{\sigma}(t-s)\boldsymbol{A}}[u^n(s)+\sigma F(u^n(s))]\mathrm{d}s。\end{cases}$$

如果 $u^0\in\Omega$，逐步可以得到 $e^{t\boldsymbol{A}}u_0\in\Omega$，$u^1\in\Omega,\cdots,e^{(t-s)\boldsymbol{A}}[u^n(s)+\sigma F(u^n(s))]\in\Omega$，$u^{n+1}\in\Omega$。根据引理 1 中 F 的 Lipschitz 连续可知，迭代序列 u^n 一致收敛到解 $U(t,0)u_0\in\Omega$。故根据式(11)解的正性柯西问题(8)存在一个唯一的非负全局解 $U(t,0)u_0=u(t)\in\Omega$。即原系统(1)存在一个唯一的非负解。证毕。

3 模型阈值动力学分析

本章证明模型(1)地方病 T-周期解的存在性和无病周期解的稳定性。令 X_T 是所有局部可积的、具有 T-周期的且取值于 $L^1(0,a^+)$ 空间的函数构成的空间，其范数为

$$\|\varphi\|_{X_T}:=\int_0^T\|\varphi(\cdot,t)\|_{L^1}\mathrm{d}t=\int_0^T\int_0^{a^+}|\varphi(a,t)|\mathrm{d}a\mathrm{d}t。$$

令 $X_{T,+}$ 是它的正锥。考虑状态空间 S_T，

$$S_T:=\{\varphi\in X_{T,+}:0\leqslant\varphi(a,t)\leqslant 1\}。$$

因为 $r(a,t)=1-s(a,t)-e(a,t)-i(a,t)$，所以系统(5)可以简化为三维系统：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial s(a,t)}{\partial t}+\dfrac{\partial s(a,t)}{\partial a}=B(a)-(B(a)+\rho(a)+k(a)\lambda(a,t))s(a,t),\\ \dfrac{\partial e(a,t)}{\partial t}+\dfrac{\partial e(a,t)}{\partial a}=-(B(a)+\alpha(a))e(a,t)+k(a)\lambda(a,t)s(a,t),\\ \dfrac{\partial i(a,t)}{\partial t}+\dfrac{\partial i(a,t)}{\partial a}=-(B(a)+\gamma(a))i(a,t)+\alpha(a)e(a,t),\\ s(0,t)=1,\ e(0,t)=0,\ i(0,t)=0,\\ s(a,0)=s_0(a),\ e(a,0)=e_0(a),\ i(a,0)=i_0(a)。\end{cases}\tag{12}$$

对于系统(12),(0,0,0)显然是它的平凡周期解。下面考虑它的非平凡周期解 $s^*,\ e^*,\ i^*\in X_{T,+}\setminus\{0\}$。如果该非平凡周期解存在,则满足

$$s^*(a,t)=e^{-\int_0^a(B(\theta)+\rho(\theta)+k(\theta)\lambda^*(\theta,\theta+t-a))\mathrm{d}\theta}+\int_0^a B(\theta)e^{-\int_\theta^a(B(\xi)+\rho(\xi)+k(\xi)\lambda^*(\xi,\xi+t-a))\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\theta,$$

$$e^*(a,t)=\int_0^a k(a-\tau)\lambda^*(a-\tau,t-\tau)\Big[e^{-\int_\tau^a(B(a-\theta)+\rho(a-\theta)+k(a-\theta)\lambda^*(a-\theta,t-\theta)\mathrm{d}\theta}$$
$$+\int_\tau^a B(a-\theta)e^{-\int_\theta^\tau(B(a-\xi)+\rho(a-\xi)+k(a-\xi)\lambda^*(a-\xi,t-\xi))\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\theta\Big]e^{-\int_0^\tau(B(a-\eta)+\alpha(a-\eta))\mathrm{d}\eta}\mathrm{d}\tau,$$

$$i^*(a,t)=\int_0^a\alpha(a-\omega)\int_\xi^a k(a-\tau)\lambda^*(a-\tau,t-\tau)\Big[\mathrm{e}^{-\int_\tau^a(B(a-\theta)+\rho(a-\theta)+k(a-\theta)\lambda^*(a-\theta,t-\theta))\mathrm{d}\theta}$$
$$+\int_\tau^a B(a-\theta)e^{-\int_\theta^\tau(B(a-\xi)+\rho(a-\xi)+k(a-\xi)\lambda^*(a-\xi,t-\xi))\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\theta\Big]e^{-\int_\xi^\tau(B(a-\eta)+\alpha(a-\eta))\mathrm{d}\eta}\mathrm{d}\tau e^{-\int_0^\omega(B(a-\delta)+\gamma(a-\delta))\mathrm{d}\delta}\mathrm{d}\omega。$$

接下来将地方病周期解的存在性问题转化为非线性算子不动点问题。基于上式考虑如下的非线性算子:

$$F(\varphi)(a,t):=\int_0^{a^+}\beta(t;a,a')\int_0^{a'}\alpha(a-\omega)\int_\xi^{a'}k(a'-\tau)\varphi(a'-\tau,t-\tau)$$
$$\times\Big[e^{-\int_\tau^{a'}(B(a'-\theta)+\rho(a'-\theta)+k(a'-\theta)\varphi(a'-\theta,t-\theta))\mathrm{d}\theta}+\int_\tau^{a'}B(a'-\theta)e^{-\int_\theta^\tau(B(a'-\xi)+\rho(a'-\xi)+k(a'-\xi)\varphi(a'-\xi,t-\xi))\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\theta\Big]$$
$$\times e^{-\int_\xi^\tau(B(a'-\eta)+\alpha(a'-\eta))\mathrm{d}\eta}\mathrm{d}\tau e^{-\int_0^\omega(a'-\delta)+\gamma(a'-\delta))\mathrm{d}\delta}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}a',$$

$\mathscr{F}$在 0 点的强 Fréchet 导数为

$$\mathscr{F}(\varphi)(a,t):=\int_0^{a^+}\beta(t;a,a')\int_0^{a'}\alpha(a'-\omega)\int_\xi^{a'}k(a'-\tau)\varphi(a'-\tau,t-\tau)$$
$$\times\Big[e^{-\int_\tau^{a'}(B(a'-\theta)+\rho(a'-\theta))\mathrm{d}\theta}+\int_\tau^{a'}B(a'-\theta)e^{-\int_\theta^\tau(B(a'-\xi)+\rho(a'-\xi))\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\theta\Big]$$
$$\times e^{-\int_\xi^\tau(B(a'-\eta)+\alpha(a'-\eta))\mathrm{d}\eta}\mathrm{d}\tau e^{-\int_0^\omega(B(a'-\delta)+\gamma(a'-\delta))\mathrm{d}\delta}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}a'。$$

为了保证算子 F 及其导数的紧性,进一步假设如下:

(H1) $\forall a\notin[0,a^+]$, $\alpha(a)=0$;

(H2) 感染率 $\beta(t;a,a')$ 满足

$$\lim_{h\to0}\int_0^T\int_0^{a^+}|\beta(t+h;a+h,a')-\beta(t;a,a')|\,\mathrm{d}a\mathrm{d}t=0,$$

对 $\forall a,\ a'\notin[0,a^+]\times[0,a^+]$, $\beta(t;a,a')=0$;

(H3) 对于 $\forall t\in\mathbf{R}^+$ 和 $a,\ a'\in[0,a^+]$,存在一个正常数 $\varepsilon_0>0$,使得 $\beta(t;a,a')\geqslant\varepsilon_0$。

为了证明本章的主要结果,首先介绍几个必要的定义。

(1) 设 E 是一个 Banach 空间,E^* 是对偶空间,E_+ 是 E 的正锥,E_+^* 是它的对偶锥,即 E^* 的子集是由 E 上的所有正线性泛函组成。

(2) 对于 $\boldsymbol{\phi}\in E$ 和 $f\in E^*$,若对 $\forall\boldsymbol{\phi}\in E_+\setminus\{0\}$,$\langle f,\boldsymbol{\phi}\rangle>0$ 都成立,则 $f\in E_+^*\setminus\{0\}$ 是严格正的,其中$(f,\boldsymbol{\phi})$表示 f 在 $\boldsymbol{\phi}$ 处的值;

(3) 对所有的 $f\in E_+^*$,如果$\langle f,\boldsymbol{\phi}\rangle>0$ 都成立,就称 $\boldsymbol{\phi}\in E_+$ 是一个拟内点;

(4) 将从 E 到 E 的有界线性算子集记为 $B(E)$。对于任意 $\boldsymbol{\phi}\in\boldsymbol{E}_+\setminus\{0\}$ 和 $\boldsymbol{f}\in\boldsymbol{E}_+^*\setminus\{0\}$,若存在一个正整数 $p=p(\boldsymbol{\phi},f)$,使得对所有的 $n\geqslant p$ 都有$\langle f,T^n\boldsymbol{\phi}\rangle>0$ 成立,则称正的算子 $T\in B(E)$ 是非支撑的。

基于上面的定义,结合文献[15-16]中的结果,我们给出如下引理。

引理 2[15-16] 若 $T\in B(E)$ 是紧的和非支撑的,则

(1) $r(T)\in P_\sigma(T)\setminus\{0\}$,且 $r(T)$ 是预解式的一个简单极点,其中 $P_\sigma(\cdot)$ 表示算子的点谱;

(2) $r(T)$ 的特征空间是一维的,其特征向量 $\boldsymbol{\varphi}\in E_+$ 是一个拟内点。对于 $\forall\boldsymbol{\phi}\in E_+$,如果 $T\phi=\mu\phi$,则存在一个常数 c,使得 $\boldsymbol{\phi}=c\varphi$ 成立。

基于 Krasnoselskii 不动点定理[17],我们给出如下的不动点定理。

引理 3[18] 对 E 上的一个正的非线性算子 F,如果满足

(1) $F(0)=0$ 且 F 在 0 处的强 Fréchet 导数 $\mathscr{F}:=F'[0]$ 存在;

(2) $\mathscr{F}$ 有一个正的特征值 $\lambda_0>1$,其对应的特征向量为$\boldsymbol{v}_0\in X_+\setminus\{0\}$ 且 $\mathscr{F}$ 没有特征值 1;

(3) F 是紧的且 $F(E_+)$ 是有界的,则 F 在 $E_+\setminus\{0\}$ 有一个非平凡的不动点。

下面基于引理 3 来研究系统(1)地方病周期解的存在性。令 $r(\mathscr{F})$ 表示算子 $\mathscr{F}$ 的谱半径。

定理 2 假设(H1)—(H3)成立,如果 $r(\mathscr{F})>0$,则 $r(\mathscr{F})$ 是 $\mathscr{F}$ 的一个正特征值,且对应的特征向量$\boldsymbol{v}_0\in X_{T,+}\setminus\{0\}$ 是正的。

证明 我们需要证明 $\mathscr{F}$ 是一个 $L^1([0,T]\times[0,a^+])$ 上的紧算子。令

$$\begin{aligned}T(t-s,\chi)=\int_0^{t-s}&\alpha(t-s+\chi-\omega)\Big[e^{-\int_{t-s}^{t-s+\chi}(B(t-s+\chi-\theta)+\rho(t-s+\chi-\theta))\mathrm{d}\theta}\\&+\int_{t-s}^{t-s+\chi}B(t-s+\chi-\theta)\mathrm{e}^{-\int_\theta^{t-s}(B(t-s+\chi-\xi)+\rho(t-s+\chi-\xi))\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\theta\Big]\\&\times e^{-\int_\xi^{t-s}(B(t-s+\chi-\eta)+\alpha(t-s+\chi-\eta))\mathrm{d}\eta}e^{-\int_0^{\omega}(B(t-s+\chi-\delta)+\gamma(t-s+\chi-\delta))\mathrm{d}\delta}\mathrm{d}\omega,\end{aligned}$$

对 $\mathscr{F}$ 交换积分顺序得

$$\begin{aligned}(\mathscr{F}\varphi)(a,t)=\int_{t-a^+}^{a^+}\int_0^{a^+-t+s}\int_0^{t-s}&\beta(t;a,t-s+\chi)\alpha(t-s+\chi-\omega)k(\chi)\varphi(\chi,s)\\&\times\Big[e^{-\int_{t-s}^{t-s+\chi}(B(t-s+\chi-\theta)+\rho(t-s+\chi-\theta))\mathrm{d}\theta}+\int_{t-s}^{t-s+\chi}B(t-s+\chi-\theta)\\&\times e^{-\int_\theta^{t-s}(B(t-s+\chi-\xi)+\rho(t-s+\chi-\xi))\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\theta\Big]e^{-\int_\xi^{t-s}(B(t-s+\chi-\eta)+\alpha(t-s+\chi-\eta))\mathrm{d}\eta}\\&\times e^{-\int_0^{\omega}(B(t-s+\chi-\delta)+\gamma(t-s+\chi-\delta))\mathrm{d}\delta}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\chi\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

则 $\mathscr{F}$ 可以写成

$$(\mathscr{F}\varphi)(a,t)=\int_{t-a^+}^{t}\int_0^{a^+-t+s}\beta(t;a,t-s+\chi)k(\chi)\varphi(\chi,s)T(t-s,\chi)\mathrm{d}\chi\mathrm{d}s。$$

拓展参数的定义域为 $\forall(a,a')\notin[0,a^+]\times[0,a^+]$,$\beta(t;a,a')=0$,且 $\forall a\notin[0,a^+]$,$\alpha(a)=0$。可以将 $\mathscr{F}$ 写成

$$(\mathscr{F}\varphi)(a,t)=\int_{-\infty}^{t}\int_0^{a^+}\beta(t;a,t-s+\chi)k(\chi)\varphi(\chi,s)T(t-s,\chi)\mathrm{d}\chi\mathrm{d}s,$$

则有

$$\begin{aligned}&\int_{-(n+1)T}^{-nT}\int_0^{a^+}\beta(t;a,t-s+\chi)\kappa(\chi)\varphi(\chi,s)T(t-s,\chi)\mathrm{d}\chi\mathrm{d}s\\=&\int_0^T\int_0^{a^+}\beta(t;a,t-s+(n+1)T+\chi)\kappa(\chi)\varphi(\chi,s-(n+1)T)T(t-s+(n+1)T,\chi)\mathrm{d}\chi\mathrm{d}s\\=&\int_0^T\int_0^{a^+}\Psi(t,a,t-s+(n+1)T,\chi)\varphi(\chi,s)\mathrm{d}\chi\mathrm{d}s。\end{aligned}$$

根据文献[7],定义:

$$\hat{\Psi}(t,a,s,\chi):=\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\Psi(t,a,t-s+nT,\chi) & t<s,\\\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Psi(t,a,t-s+nT,\chi) & t>s,\end{cases}$$

其中

$$\Psi(t,a,z,\chi):=\beta(t,a,z+\chi)k(\chi)\varphi(\chi,t-z)T(z,\chi)。$$

则 $\mathscr{F}$ 可以写成

$$(\mathscr{F}\varphi)(a,t)=\int_0^T\int_0^{a^+}\hat{\Psi}(t,a,s,\chi)\varphi(\chi,s)\mathrm{d}\chi\mathrm{d}s。$$

由假设(H_1)—(H_3)和 L^1 上的紧性原则可知 $\mathscr{F}$ 在 $L^1([0,T]\times[0,a^+])$ 是正的。根据 Krein-Rutman 定理，如果 $r(\mathscr{F})>0$，则 $\mathscr{F}$ 存在一个与正特征值对应的正特征向量 $\tilde{v}_0\in L^1([0,T]\times[0,a^+])\backslash 0$，即

$$(\mathscr{F}\tilde{v}_0)(a,t)=r(\mathscr{F})\tilde{v}_0(a,t)。$$

因此得出 $\mathscr{F}$ 在 $X_{T,+}\backslash 0$ 中存在一个与特征值 $r(\mathscr{F})$ 对应的周期的特征向量。证毕。

定理 3　对于 F 和 $\mathscr{F}$，有

(1) F 和 $\mathscr{F}$ 是正的；

(2) F 是紧的和 $\mathscr{F}$ 是非支撑的；

(3) $F(E_+)$ 是有界的。

证明　根据 F 和 $\mathscr{F}$ 的定义，有 $F(X_{T,+})\subset X_{T,+}$，$\mathscr{F}(X_{T,+})\subset X_{T,+}$，因此 F 和 $\mathscr{F}$ 是正的。F 紧性的证明类似定理 2.$\mathscr{F}$ 紧性的证明。下面证 $\mathscr{F}$ 是非支撑的，根据假设(A1)和假设(H3)，进一步计算可得

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(\varphi)(a,t)=&\int_0^{a^+}\beta(t;a,a')\int_0^{a'}\alpha(a'-\omega)\int_\xi^{a'}k(a'-\tau)\varphi(a'-\tau,t-\tau)\\&\times e^{-\int_\tau^{a'}(B(a'-\theta)+\rho(a'-\theta))\mathrm{d}\theta}e^{-\int_\xi^{\tau}(B(a'-\eta)+\alpha(a'-\eta))\mathrm{d}\eta}\mathrm{d}\tau e^{-\int_0^{\omega}(B(a'-\delta)+\gamma(a'-\delta))\mathrm{d}\delta}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}a'\\&+\int_0^{a^+}\beta(t;a,a')\int_0^{a'}\alpha(a'-\omega)\int_\xi^{a'}k(a'-\tau)\varphi(a'-\tau,t-\tau)\\&\times\int_\tau^{a'}B(a'-\theta)e^{-\int_\theta^{\tau}(B(a'-\xi)+\rho(a'-\xi))\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\theta e^{-\int_\xi^{\tau}(B(a'-\eta)+\alpha(a'-\eta))\mathrm{d}\eta}\mathrm{d}\tau e^{-\int_0^{\omega}(B(a)+\gamma(a'-\delta))\mathrm{d}\delta}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}a'\\\geqslant&\ \varepsilon_0e^{-(3+\rho^++\alpha^++\gamma^+)a^+}\int_0^{a^+}\int_0^{a'}\int_\xi^{a'}\alpha(a'-\omega)k(a'-\tau)\varphi(a'-\tau,t-\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\omega\mathrm{d}a'\\&+B(b)(a'-\tau)\varepsilon_0a^+e^{-(3+\rho^++\alpha^++\gamma^+)a^+}\int_0^{a^+}\int_0^{a'}\int_\xi^{a'}\alpha(a'-\omega)k(a'-\tau)\varphi(a'-\tau,t-\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\omega\mathrm{d}a',\end{aligned}$$

其中，$b\in[\tau,a']$，$c_1=\varepsilon_0e^{(-3+\rho^++\alpha^++\gamma^+)a^+}+B(b)(a'-\tau)\varepsilon_0a^+e^{-(3+\rho^++\alpha^++\gamma^+)a^+}$，有

$$\mathscr{F}(\varphi)(a,t)\geqslant c_1\int_0^{a^+}\int_0^{a'}\int_\xi^{a'}\alpha(a'-\omega)k(a'-\tau)\varphi(a'-\tau,t-\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\omega\mathrm{d}a'。$$

推得

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^2(\varphi)(a,t)\geqslant&\ c_1{}^2\int_0^{a^+}\int_0^{a'}\int_\xi^{a'}\alpha(a'-\omega)k(a'-\tau)\\&\times\int_0^{a^+}\int_0^{\eta}\int_\sigma^{\eta}\alpha(\eta-\sigma)k(\eta-\delta)\varphi(\eta-\delta,t-\tau-\delta)\mathrm{d}\delta\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi\mathrm{d}a'。\end{aligned}$$

定义一个线性泛函 $H\in X_T^*$，

$$\begin{aligned}\langle H,\varphi\rangle:=&\ c_1{}^2\int_0^{a^+}\int_0^{a'}\int_\xi^{a'}\alpha(a'-\omega)k(a'-\tau)\\&\times\int_0^{a^+}\int_0^{\eta}\int_\sigma^{\eta}\alpha(\eta-\sigma)k(\eta-\delta)\varphi(\eta-\delta,t-\tau-\delta)\mathrm{d}\delta\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi\mathrm{d}a',\ \varphi\in X_{T,+},\end{aligned}$$

则 $H\in X_{T,+}^*$ 是一个严格正的线性泛函。由于 $\mathscr{F}^2\varphi\geqslant\langle H,\varphi\rangle e$，其中 $e=1\in X_{T,+}\backslash\{0\}$，对于 $\varphi\in X_{T,+}\backslash\{0\}$ 和 $f\in X_{T,+}^*\backslash\{0\}$，有 $\langle f,\mathscr{F}^2\varphi\rangle\geqslant\langle H,\varphi\rangle\langle f,e\rangle>0$，这就表明 $\forall\varphi\in X_{T,+}\backslash\{0\}$，$\mathscr{F}\varphi\in X_{T,+}\backslash\{0\}$ 成立，进一步我们有 $\mathscr{F}^3\varphi=\mathscr{F}^2(\mathscr{F}\varphi)\geqslant\langle H,\mathscr{F}\varphi\rangle e$，从而对于任意 $\varphi\in X_{T,+}\backslash\{0\}$ 和 $f\in X_{T,+}^*\backslash\{0\}$，有 $\langle f,\mathscr{F}^3\varphi\rangle\geqslant\langle H,\mathscr{F}\varphi\rangle\langle f,e\rangle>0$。类似地，可以证明对于任意 $\varphi\in X_{T,+}\backslash\{0\}$ 和 $f\in X_{T,+}^*\backslash\{0\}$，以及对于所有的 $n\geqslant 2$，有 $\langle f,\mathscr{F}^n\varphi\rangle>0$ 成立。因此，得到 $\mathscr{F}$ 是非支撑的。

下面证 $F(X_{T,+})$ 是有界的。

$$\begin{aligned}F(\varphi)(a,t):\leqslant&\int_0^{a^+}\beta(t;a,a')\int_0^{a'}\alpha(a-\omega)\int_\xi^{a'}k(a'-\tau)\varphi(a'-\tau,t-\tau)\Big[e^{-\int_\tau^{a'}(B(a'-\theta)+\rho(a'-\theta)+k(a'-\theta)\varphi(a'-\theta,t-\theta))\mathrm{d}\theta}\\&+\int_\tau^{a'}B(a'-\theta)\cdot e^{-\int_\theta^{\tau}(B(a'-\xi)+\rho(a'-\xi)+k(a'-\xi)\varphi(a'-\xi,t-\xi))\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\theta\Big]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\omega\mathrm{d}a'\\\leqslant&\int_0^{a^+}\beta(t;a,a')\int_0^{a'}\alpha(a-\omega)\int_\xi^{a'}(k(a'-\tau)\varphi(a'-\tau,t-\tau)\end{aligned}$$

$$+B(a'-\tau)+\rho(a'-\tau))e^{-\int_\tau^{a'}(B(a'-\theta)+\rho(a'-\theta)+k(a'-\theta)\varphi(a'-\theta,t-\theta)\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\omega\mathrm{d}a'$$
$$+a^+\int_0^{a^+}\beta(t;a,a')\int_0^{a'}\alpha(a-\omega)\int_\xi^{a'}k(a'-\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\omega\mathrm{d}a'$$
$$\leqslant\int_0^{a^+}\beta(t;a,a')\int_0^{a'}\alpha(a-\omega)\mathrm{d}\omega\mathrm{d}a'+a^+\int_0^{a^+}\beta(t;a,a')\int_0^{a'}\alpha(a-\omega)\int_\xi^{a'}k(a'-\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\omega\mathrm{d}a'$$
$$\leqslant\beta^+\int_0^{a^+}\int_0^{a'}\alpha(a-\omega)\mathrm{d}\omega\mathrm{d}a'+a^+\beta^+\int_0^{a^+}\int_0^{a'}\alpha(a-\omega)\int_\xi^{a'}k(a'-\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\omega\mathrm{d}a'<\infty,$$

其中 $\beta^+=\sup\limits_{t\in[0,T]}(\text{less}\sup\limits_{(a,a')\in[0,a^+]^2}\beta(t;a,a'))$,故证得 $F(X_{T,+})$ 的有界性。证毕。

定理 4 如果 $r(\mathscr{F})>1$,则 F 在 $X_{T,+}\backslash\{0\}$ 有一个非平凡不动点,即原系统(1)有地方病周期解。

证明 由定理 2 知,$r(\mathscr{F})$ 是 $\mathscr{F}$ 的一个特征值且对应的特征向量是正的。因为 $r(\mathscr{F})>1$,根据引理 2,$\mathscr{F}$ 没有与特征值 1 对应的特征向量,因此引理 3 的(2)成立。同时由定理 3 得出引理 3 的(3)成立,故证得 F 在 $X_{T,+}\backslash\{0\}$ 有一个非平凡的不动点,即对应的原系统(1)有地方病 T-周期解。证毕。

下面研究 $r(\mathscr{F})<1$。假设系统(1)存在一个地方病 T-周期解 $(S^*(a,t),E^*(a,t),I^*(a,t),R^*(a,t))\in S_T\backslash\{0\}$,则算子 F 有一个非平凡不动点 $\lambda^*=F(\lambda^*)\in X_{T,+}\backslash\{0\}$,即 $\lambda^*=F(\lambda^*)\leqslant\mathscr{F}(\lambda^*)$,推出 $r(\mathscr{F})\geqslant1$,故当 $r(\mathscr{F})<1$ 时,系统不存在地方病 T-周期解。参考文献[19]中的定理5.6,如果系统(1)在 $S_T\backslash\{0\}$ 中没有地方病 T-周期解,则系统(1)的无病周期解 $(S^0(a,t),0,0,R^0(a,t))\in S_T$ 是全局渐近稳定的。

定理 5 如果 $r(\mathscr{F})<1$,则系统(1)的无病周期解 $(S^0(a,t),0,0,R^0(a,t))$ 是全局渐近稳定的。

证明 注意到 $s^0(a,t)+r^0(a,t)=1$。根据系统(5) 解得

$$s^0(a,t)=e^{-\int_0^a(B(\theta)+\rho(\theta))\mathrm{d}\theta}+\int_0^aB(\theta)e^{-\int_\theta^a(B(\xi)+\rho(\xi))\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\theta。$$

模型(5)在无病平衡点的解耦线性化系统为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial e}{\partial t}+\dfrac{\partial e}{\partial a}=-(B(a)+\alpha(a))e(a,t)+k(a)\lambda(a,t)s^0(a,t),\\ \dfrac{\partial i}{\partial t}+\dfrac{\partial i}{\partial a}=-(B(a)+\gamma(a))e(a,t)+\alpha(a)e(a,t)。\end{cases}\tag{13}$$

利用特征线法得出 $e(a,t)$, $i(a,t)$,并将 $i(a,t)$ 代入(a,t)的表达式得

$$\begin{aligned}\lambda(a,t)=&\int_0^{a^+}\beta(t;a,a')i(a',t)\mathrm{d}a'\\ =&\int_0^{a^+}\int_\tau^{a^+}\int_0^\tau\beta(t;a,a')\alpha(a'-\omega)k(a'-\tau)\lambda(a'-\tau,t-\tau)\\ &\times(e^{-\int_\tau^{a'}(B(a'-\theta)+\rho(a'-\theta))\mathrm{d}\theta}+\int_\tau^{a'}B(a'-\theta)e^{-\int_\theta^\tau(B(a'-\xi)+\rho(a'-\xi))\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\theta)\\ &\times e^{-\int_\xi^\tau(B(a'-\eta)+\alpha(a'-\eta))\mathrm{d}\eta}e^{-\int_0^\omega(B(a'-\delta)+\gamma(a'-\delta))\mathrm{d}\delta}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}a'\mathrm{d}\tau。\end{aligned}$$

根据 $\lambda(a,t)$ 的表达式定义一个从 $L^1(0,a^+)$ 到其自身的线性算子 $\Psi(t,\tau)$:

$$\begin{aligned}(\Psi(t,\tau)\varphi)(a):=&\int_\tau^{a^+}\int_0^\tau\beta(t;a,a')\alpha(a'-w)k(a'-\tau)(e^{-\int_\tau^{a'}(B(a'-\theta)+\rho(a'-\theta))\mathrm{d}\theta}+\int_\tau^{a'}B(a'-\xi)\\ &\times e^{-\int_\theta^\tau(B(a'-\xi)+\rho(a'-\xi))\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\theta)e^{-\int_\xi^\tau(B(a'-\eta)+\alpha(a'-\eta))\mathrm{d}\eta}e^{-\int_0^\omega(B(a'-\delta)+\gamma(a'-\delta))\mathrm{d}\delta}\varphi(a'-\tau)\mathrm{d}\omega\mathrm{d}a'。\end{aligned}$$

则 $\lambda(a,t)$ 可以写成一个抽象的齐次的更新方程为

$$\lambda(a,t)=\int_0^{a^+}(\Psi(t,\tau)\lambda(t-\tau))(a)\mathrm{d}\tau。$$

故算子 $\mathscr{F}$ 为

$$(\mathscr{F}\varphi)(a,t):=\int_0^{a^+}(\Psi(t,\tau)\varphi(t-\tau,\cdot))(a)\mathrm{d}\tau,\quad\varphi\in X_T。$$

$\mathscr{F}$ 是文献[20]中提到的一种下一代算子。下面引入 Ψ 的拉普拉斯变换:

$$(\hat{\mathscr{F}}(z)\varphi)(t)=\int_0^{a^+}(e^{-z\tau}\Psi(t,\tau)\varphi(t-\tau,\cdot))(a)\mathrm{d}\tau。$$

根据周期更新定理[21],可以得出存在一个周期向量值函数 $\varphi_0(t)$,使得 $\lambda(a,t)$ 与以马尔萨斯参数 r_0 增长的指数解渐近成比例,即 $\lambda(a,t)\sim e^{r_0t}\varphi_0(t)$, $t\to\infty$,其中 $\varphi_0(t)$ 是算子 $\hat{\mathscr{F}}(r_0)$ 对应于特征值 $r(\mathscr{F}(r_0))=1$ 的

一个正的特征函数。如果 $r(\mathscr{F})=r(\mathscr{F}(0))<1$,马尔萨斯参数 r_0 是负的,则有 $\lim\limits_{t\to\infty}\lambda(a,t)=0$,进而得到 $\lim\limits_{t\to\infty}e(a,t)=\lim\limits_{t\to\infty}i(a,t)=0$。由此证得无病周期解的全局渐近稳定性。证毕。

4 结论

本文引入了人口流动和季节性因素对年龄结构传染病模型动力学行为的影响,证得了地方病周期解的存在性以及无病周期解的全局渐近稳定性即疾病爆发和灭绝的阈值条件。地方病周期解的存在性表明,传染病的传播具有周期性爆发的特征,即在一定时间间隔内,疾病可能会多次爆发。同时,无病周期解的稳定性表明,在特定条件下,疾病的传播可以被抑制,最终导致疾病的灭绝。基于疾病周期性爆发的规律,我们能够预测传染病在未来的传播趋势,包括可能的爆发期和高峰期,从而为制定有效的控制策略提供重要依据。

参考文献:

[1] 马知恩,周义仓,王稳地,等. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京:科学出版社,2004.
MA Zhien, ZHOU Yicang, WANG Wendi, et al. Mathematical modelling and research of epidemic dynamical systems[M]. Beijing: Science Press, 2004.

[2] WEBB G B. Theory of nonlinear age-dependent population dynamics[M]. New York and Basel: Marcel Dekker, 1985.

[3] HUANG Jicai, KANG Hao, LU Min, et al. Stability analysis of an age-structured epidemic model with vaccination and standard incidence rate[J]. Nonlinear Analysis: Real World App lications, 2022, 66:103525.

[4] HETHCOTE H, LEVIN S. Periodicity in epidemiological models[J]. Applied Mathematical Ecology, 1989, 18:193-211.

[5] HETHCOTE H. Asymptotic behavior in a deterministic epidemic model[J]. Bulletin of Mathematical Biology, 1973, 35:607-614.

[6] BACÄER N. Approximation of the basic reproduction number R_0 for vector-borne diseases with a periodic vector population [J]. Bulletin of Mathematical Biology, 2007, 69(3):1067-1091.

[7] KUNIYA T, INABA H. Endemic threshold results for an age-structured SIS epidemic model with periodic parameters[J]. Mathematical Analysis and Applications, 2013, 402(2):477-492.

[8] KUNIYA T. Existence of a nontrivial periodic solution in an age-structured SIR epidemic model with time periodic coefficients [J]. Applied Mathematics Letters, 2014, 27:15-20.

[9] KANG Hao, RUAN Shigui, HUANG Qimin. Periodic solutions of an age-structured epidemic model with periodic infection rate[J]. Communications on Pure and Applied Analysis, 2020, 19(10):4955-4972.

[10] OKUWA K, INABA H, KUNIYA T. Mathematical analysis for an age-structured SIRS epidemic model[J]. Mathematical Biosciences Engineering, 2019, 16(5):6071-6102.

[11] KHAN A, ZAMAN G. Global analysis of an age-structured SEIR endemic model[J]. Chaos Soliton Fract, 2018, 108:154-165.

[12] LI Xuezhi, FANG Bin. Stability of an age-structured SEIR epidemic model with infectivity in latent period[J]. Applied Applied Mathematics, 2009, 4(1):218-236.

[13] LI X Z, GUPUR G, ZHU G T. Threshold and stability results for an age-structured SEIR epidemic model[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2001 , 42(6/7):883-907.

[14] BUSENBERG S, IANNELLI M, THIEME H. Global behavior of an age-structured epidemic model[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1991, 22(4):1065-1080.

[15] MAREK I. Frobenius theory of positive operators: comparison theorems and applications[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1970, 19(3):607-628.

[16] SAWASHIMA I. On spectral properties of some positive operators[J]. Natural Science Reports of Ochanomizu University, 1964, 15(2):53-64.

[17] KRASNOSELSKII M A. Positive solutions of operator equations[M]. Groningen: Noordhoff, 1964.

[18] INABA H. Threshold and stability results for an age-structured epidemic model[J]. Mathematical Biology,1990, 28(4):411-434.

[19] LANGLAIS M, BUSENBERG S N. Global behaviour in age structured S.I.S. models with seasonal periodicities and vertical transmission[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,1997, 213(2):511-533.

[20] BACÄER N, GUERNAUOI S. The epidemic threshold of vector-borne diseases with seasonality[J]. Journal of Mathematical Biology, 2006, 53(3):421-436.

[21] NAKATA Y, KUNIYA T. Global dynamics of a class of SEIRS epidemic models in a periodic environment[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2010, 363(1):230-237.

(编辑:胡春燕)