山东大学学报(理学版)2025年5月 第60卷 第5期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.60, No.5, 2025 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2025)05-0001-04 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.517

超特殊 p-群的幂自同构

徐涛[1],尹红然[2]
(1.河北工程大学数理学院, 河北 邯郸 056038; 2.天津天狮学院数理教学部, 天津 301700)

摘要:设 G 是超特殊 p-群, G 的所有幂自同构构成的群称为幂自同构群,记为 $P(G)$。(ⅰ)当 p 是奇素数时, 如果 G 的幂指数是 p, 那么 $P(G)=1$。如果 G 的幂指数是 p^2, 那么 $P(G)\cong\mathbf{Z}_p$。(ⅱ)当 $p=2$ 时, 如果 G 是 n 个 8 阶二面体群的中心积, 那么 $P(G)=1$。如果 G 是 $n-1$ 个 8 阶二面体群和 1 个 8 阶四元数群的中心积, 那么 $P(G)\cong\mathbf{Z}_2\times\mathbf{Z}_2$。

关键词:幂自同构; 超特殊 p-群; 生成元; 中心积
中图分类号:O152 **文献标志码**:A
引用格式:徐涛, 尹红然. 超特殊 p-群的幂自同构[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(5):1-4,8.

Power automorphisms of an extraspecial p-group

XU Tao[1], YIN Hongran[2]
(1. School of Science, Hebei University of Engineering, Handan 056038, Hebei, China; 2. Department of Mathematics, Tianjin Tianshi College, Tianjin 301700, China)

Abstract: Let G be a generalized extraspecial p-group, where p is a prime. $P(G)$ denotes the group of all power automorphisms of G. (ⅰ) When p is odd, If the exponent of G is p, then $P(G)=1$. If the exponent of G is p^2, then $P(G)\cong\mathbf{Z}_p$. (ⅱ) When $p=2$, if G is the central product of n dihedral groups of order 8, then $P(G)=1$. If G is the central product of $n-1$ dihedral groups of order 8 and a quaternion group of order 8, then $P(G)\cong\mathbf{Z}_2\times\mathbf{Z}_2$.

Key words: power automorphism; extraspecial p-group; generator; central product

1 引言及主要结果

设 α 是有限群 G 的自同构, 如果 α 保持 G 的任意子群 H 不变, 那么称 α 是 G 的幂自同构。不难验证群 G 的所有的幂自同构构成 G 的自同构群 $\mathrm{Aut}(G)$ 的一个交换正规子群, 称为幂自同构群, 记为 $P(G)$。

群 G 的结构与幂自同构群 $P(G)$ 的结构有密切关系。Levi[1] 证明了如果 G 是一个交换 p-群, 那么对于 G 的任意极大阶循环群 $\langle x\rangle$, 通过限制同态使得 $P(G)$ 嵌入到 $\mathrm{Aut}(\langle x\rangle)$ 中, 在这种情况下, 如果 $p=2$, $P(G)$ 的秩 $\leqslant 2$, 如果 p 是奇素数, $P(G)$ 的秩是 1。Cooper[2] 给出了正则 p-群也有相同的结论。Morigi[3] 考虑了有限非交换 p-群的情形, 得到了如果 $[G,P(G)]$ 不是循环群,那么限制同态使得 $P(G)$ 嵌入到 $\mathrm{Aut}(\langle x\rangle)$ 中, 其中 $\langle x\rangle$ 是 G 的某一个循环群。

王俊新等[4] 研究了商群 $\mathrm{Aut}(G)/P(G)$ 对有限群 G 的结构的影响, 当 $\mathrm{Aut}(G)/P(G)$ 的阶数是 p 或者 pq 时, 确定了群 G 的结构, 其中 p 和 q 是两个不同的素数。

众所周知,如果一个有限 p-群 G 的中心、导群和 Frattini 子群都是 p 阶群,那么 G 称为超特殊 p-群。明显地,超特殊 p-群的幂自同构群是交换群。本文进一步细化这一结果,研究超特殊 p-群的幂自同构群到底是什么样的交换群,确定这个交换群的具体结构,得到了下面的结果。

收稿日期:2023-12-12; **网络出版时间**:2024-09-03 12:54:58
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11801129); 河北省自然科学基金资助项目(A2022402002)
第一作者:徐涛(1983—),男,教授,硕士生导师,博士,研究方向为群论. E-mail: gtxutao@163.com

定理 1　设 G 是超特殊 p-群，其中 p 是素数，则有如下结论：

（ⅰ）当 p 是奇素数时，如果 G 的幂指数是 p，那么 $P(G)=1$。如果 G 的幂指数是 p^2，那么 $P(G)\cong\mathbf{Z}_p$；

（ⅱ）当 $p=2$ 时，如果 G 是 n 个 8 阶二面体群 D_8 的中心积，那么 $P(G)=1$。如果 G 是 $n-1$ 个 8 阶二面体群 D_8 和 1 个 8 阶四元数群 Q_8 的中心积，那么 $P(G)\cong\mathbf{Z}_2\times\mathbf{Z}_2$。

2　定理 1 的证明

引理 1[5]　设 G 是超特殊 p-群，则 G 的阶数是 p^{2n+1}，其中 n 是某个正整数，设 G 的中心 $Z(G)$ 的生成元是 z，则 G 有生成元 $x_1,x_2,\cdots,x_{2n}$ 满足下面关系：

（ⅰ）当 p 是奇素数时，如果 G 的幂指数 $\exp(G)$ 是 p，那么 $x_i^p=1(1\leqslant i\leqslant 2n)$。如果 G 的幂指数 $\exp(G)$ 是 p^2，那么 $x_1^{p^2}=1$，$x_j^p=1\ (2\leqslant j\leqslant 2n)$，且 $x_1^p=z$；

（ⅱ）当 $p=2$ 时，如果 G 是 n 个二面体群 D_8 的中心积，那么 $x_i^2=1(1\leqslant i\leqslant 2n)$。如果 G 是 $n-1$ 个二面体群 D_8 和 1 个四元数群 Q_8 的中心积，那么 $x_j^2=1(1\leqslant j\leqslant 2n-2)$，$x_{2n-1}^2=x_{2n}^2=z$。

引理 2[6]　设 G 是一个非交换 p-群，则对于 $x\in G$ 和 $\alpha\in P(G)$，存在满足

$$n_{\alpha,x}\equiv 1(\bmod p)$$

的整数 $n_{\alpha,x}$，使得 $\alpha(x)=x^{n_{\alpha,x}}$。

定理 1 的证明。当 p 是奇素数时，如果 $\exp(G)=p$，由引理 2 可知，对于 $\alpha\in P(G)$ 和 $x\in G$，存在整数 $n_{\alpha,x}$，使得 $\alpha(x)=x^{n_{\alpha,x}}$。再根据引理 2，不妨假设 $n_{\alpha,x}=kp+1$，则

$$\alpha(x)=x^{n_{\alpha,x}}=x^{kp+1}=(x^p)^k x=x,$$

因此 $\alpha=1$，这说明 $P(G)=1$。

如果 $\exp(G)=p^2$，任取 $\alpha\in P(G)$，根据引理 1，考虑 α 在 G 的生成元上的作用。对于 $x_1\in G$，由引理 2 可知，存在整数 n_{α,x_1}，使得 $\alpha(x_1)=x_1^{n_{\alpha,x_1}}$。可设 $n_{\alpha,x_1}=t_1p+1$，则

$$\alpha(x_1)=x_1^{n_{\alpha,x_1}}=x_1^{t_1p+1}=(x_1^p)^{t_1}x_1=z^{t_1}x_1,$$

对于 $x_j\in G(2\leqslant j\leqslant 2n)$，存在整数 n_{α,x_j}，使得 $\alpha(x_j)=x_j^{n_{\alpha,x_j}}$。由引理 2，设

$$n_{\alpha,x_j}=t_jp+1,\ 2\leqslant j\leqslant 2n,$$

从而有

$$\alpha(x_j)=x_j^{n_{\alpha,x_j}}=x_j^{t_jp+1}=(x_j^p)^{t_j}x_j=x_j,\ 2\leqslant j\leqslant 2n。$$

对于 $z\in G$，存在整数 $n_{\alpha,z}$，使得 $\alpha(z)=z^{n_{\alpha,z}}$。假设 $n_{\alpha,z}=tp+1$，则

$$\alpha(z)=z^{n_{\alpha,z}}=z^{tp+1}=z^{tp}z=(z^p)^t z=z。$$

设 $\boldsymbol{H}$ 是 $2n+1$ 阶矩阵的集合，即

$$\boldsymbol{H}=\left\{\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0\\a&0&\cdots&0&1\end{pmatrix}\middle|\ a\in\mathbf{Z}_p\right\},$$

可以验证 $\boldsymbol{H}$ 是 $\mathrm{GL}(2n+1,\mathbf{Z}_p)$ 的一个子群，α 在 $\{x_1,x_2,\cdots,x_{2n},z\}$ 下的 $2n+1$ 阶矩阵

$$\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0\\t_1&0&\cdots&0&1\end{pmatrix}\in\boldsymbol{H}。$$

构造映射

$$\varphi:\ P(G)\to \boldsymbol{H}$$

$$\beta\mapsto\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0\\a&0&\cdots&0&1\end{pmatrix},$$

其中 β 在 $\{x_1,x_2,\cdots,x_{2n},z\}$ 下的矩阵是 $\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0\\a&0&\cdots&0&1\end{pmatrix}$。

对于

$$\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0\\\omega&0&\cdots&0&1\end{pmatrix}\in\boldsymbol{H},$$

存在自同构 ρ, 满足

$$\rho(x_1)=z^{\omega}x_1=(x_1^p)^{\omega}x_1=x_1^{\omega p+1},$$

$$\rho(x_j)=x_j,\ 2\leqslant j\leqslant 2n,$$

$$\rho(z)=z。$$

可知 ρ 是幂自同构,这说明 φ 是满射,易知 φ 是单射,因此 φ 是双射。

因为

$$\alpha\beta(x_1)=\alpha(\beta(x_1))=\alpha(z^a x_1)=\alpha(z^a)\alpha(x_1)=z^a z^{t_1}x_1=z^{a+t_1}x_1,$$

所以 $\varphi(\alpha\beta)=\varphi(\alpha)\varphi(\beta)$,表明 φ 是群同态。由同态基本定理知 $P(G)\cong\boldsymbol{H}$,注意到 $\boldsymbol{H}\cong\mathbf{Z}_p$, 于是 $P(G)\cong\mathbf{Z}_p$。

当 $p=2$ 时,如果 G 是 n 个二面体群 D_8 的中心积,对于 $\gamma\in P(G)$,考虑 γ 在 G 的生成元上的作用。由引理 2 可知,存在整数 $n_{\gamma,x_i}\equiv1(\mathrm{mod}\ 2)$,不妨假设 $n_{\gamma,x_i}=2l_i+1$,有

$$\gamma(x_i)=x_i^{n_{\gamma,x_i}}=x_i^{2l_i+1}=(x_i^2)^{l_i}x_i=x_i,\quad 1\leqslant i\leqslant 2n。$$

于是 $\gamma=1$, 因此 $P(G)=1$。

如果 G 是 $n-1$ 个二面体群 D_8 和 1 个四元数群 Q_8 的中心积, 对于 $\gamma\in P(G)$ 和 $x_j\in G$ $(1\leqslant j\leqslant 2n-2)$, 存在整数 n_{γ,x_j}, 使得 $\gamma(x_j)=x_j^{n_{\gamma,x_j}}$。由引理 2,设 $n_{\gamma,x_j}=2m_j+1$,则

$$\gamma(x_j)=x_j^{n_{\gamma,x_j}}=x_j^{2m_j+1}=(x_j^2)^{m_j}x_j=x_j,\quad 1\leqslant j\leqslant 2n-2。$$

对于 x_{2n-1}, $x_{2n}\in G$, 存在整数 $n_{\gamma,x_{2n-1}}$ 和 $n_{\gamma,x_{2n}}$, 使得 $\gamma(x_{2n-1})=x_{2n-1}^{n_{\gamma,x_{2n-1}}}$ 和 $\gamma(x_{2n})=x_{2n}^{n_{\gamma,x_{2n}}}$,由引理 2,设

$$n_{\gamma,x_{2n-1}}=2m_{2n-1}+1,\ n_{\gamma,x_{2n}}=2m_{2n}+1,$$

从而

$$\gamma(x_{2n-1})=x_{2n-1}^{n_{\gamma,x_{2n-1}}}=x_{2n-1}^{2m_{2n-1}+1}=(x_{2n-1}^2)^{m_{2n-1}}x_{2n-1}=z^{m_{2n-1}}x_{2n-1},$$

$$\gamma(x_{2n})=x_{2n}^{n_{\gamma,x_{2n}}}=x_{2n}^{2m_{2n}+1}=(x_{2n}^2)^{m_{2n}}x_{2n}=z^{m_{2n}}x_{2n}。$$

对于 $z\in G$, 存在整数 $n_{\gamma,z}$, 使得 $\gamma(z)=z^{n_{\gamma,z}}$。假设 $n_{\gamma,z}=2m+1$,有

$$\gamma(z)=z^{n_{\gamma,z}}=z^{2m+1}=z^{2m}z=(z^2)^m z=z。$$

设 $\boldsymbol{K}$ 是形如以下的 $2n+1$ 阶矩阵的集合:

$$\boldsymbol{K}=\left\{\left.\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&0&0&0\\0&1&\cdots&0&0&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0&0&0\\0&0&\cdots&0&1&0&0\\0&0&\cdots&0&0&1&0\\0&0&\cdots&0&b&c&1\end{pmatrix}\right|\, b,\ c\in\mathbf{Z}_2\right\},$$

可以验证 $\boldsymbol{K}$ 是 $\mathrm{GL}(2n+1,\mathbf{Z}_2)$ 的一个子群,易知 γ 在 $\{x_1,x_2,\cdots,x_{2n},z\}$ 下的 $2n+1$ 阶矩阵

$$\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&0&0&0\\0&1&\cdots&0&0&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0&0&0\\0&0&\cdots&0&1&0&0\\0&0&\cdots&0&0&1&0\\0&0&\cdots&0&m_{2n-1}&m_{2n}&1\end{pmatrix}\in\boldsymbol{K}。$$

构造映射

$$\psi:\ P(G)\to\boldsymbol{K},$$

$$\eta\ \mapsto\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&0&0&0\\0&1&\cdots&0&0&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0&0&0\\0&0&\cdots&0&1&0&0\\0&0&\cdots&0&0&1&0\\0&0&\cdots&0&b&c&1\end{pmatrix},$$

其中 η 在 $\{x_1,x_2,\cdots,x_{2n},z\}$ 下的矩阵是 $\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&0&0&0\\0&1&\cdots&0&0&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0&0&0\\0&0&\cdots&0&1&0&0\\0&0&\cdots&0&0&1&0\\0&0&\cdots&0&b&c&1\end{pmatrix}$,可以验证 ψ 是双射,并且是群同态,因此 $P(G)\cong\boldsymbol{K}$。又 $\boldsymbol{K}\cong\mathbf{Z}_2\times\mathbf{Z}_2$,故 $P(G)\cong\mathbf{Z}_2\times\mathbf{Z}_2$。

3 例子

例 1 设 D_8是 8 阶二面体群, 则

$$D_8=\langle a,b\mid a^4=b^2=1,(ba)^2=1\rangle,$$

即

$$D_8=\{1,a,a^2,a^3,b,ba,ba^2,ba^3\}。$$

由引理 2 知, 如果 $\sigma\in P(D_8)$, 那么 σ 把 D_8 中的 2 阶元映到自身。考虑 σ 在 D_8 中的四阶元的作用即可,因此 $\sigma(a)=a,\sigma(a^3)=a^3$或者 $\sigma(a)=a^3,\sigma(a^3)=a$。对于第 1 种情况, σ 是恒等自同构;对于第 2 种情况, $\sigma(ba)=ba\neq ba^3=\sigma(b)\sigma(a)$, 矛盾于 σ 是自同构, 舍去,因此 $P(D_8)=1$。

(下转第 8 页)