山东大学学报(理学版)2025 年 5 月 第 60 卷 第 5 期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.60, No.5, 2025 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2025)05-0020-05 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2024.192

半群 $\mathscr{PO}_{n,r}$ 的幂等元秩

阮礼敏,苟昌胜,赵平*
(贵州师范大学数学科学学院, 贵州 贵阳 550025)

摘要:设 $\mathscr{PO}_n$ 是 $X_n=\{1,2,\cdots,n\}$ 上的保序部分变换半群,对任意 $1\leqslant r\leqslant n$, 考虑集合

$$\mathscr{PO}_{n,r}=\{\alpha\in\mathscr{PO}_n : x\alpha=x, \forall x\in \mathrm{dom}(\alpha)\cap\{1,2,\cdots,r\}\},$$

易验证 $\mathscr{PO}_{n,r}$ 是 $\mathscr{PO}_n$ 的子半群。证明了半群 $\mathscr{PO}_{n,r}$ 是由幂等元生成, 并得到了半群 $\mathscr{PO}_{n,r}$ 的幂等元秩为 $3n-2r-1$。

关键词: 保序部分变换半群; 固定集; 幂等元; 幂等元秩

中图分类号:O152 **文献标志码**:A

引用格式:阮礼敏,苟昌胜,赵平.半群 $\mathscr{PO}_{n,r}$ 的幂等元秩[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(5):20-24.

On the idempotent rank of the semigroup $\mathscr{PO}_{n,r}$

RUAN Limin, GOU Changsheng, ZHAO Ping*
(School of Mathematics Science Guizhou Normal University, Guiyang 550025, Guizhou, China)

Abstract: Let $\mathscr{PO}_n$ be the semigroup of all order-preserving partial transformation on $X_n=\{1,2,\cdots,n\}$. For $1\leqslant r\leqslant n$, put

$$\mathscr{PO}_{n,r}=\{\alpha\in\mathscr{PO}_n : x\alpha=x, \forall x\in \mathrm{dom}(\alpha)\cap\{1,2,\cdots,r\}\}.$$

It is easy to check that the semigroup $\mathscr{PO}_{n,r}$ is subsemigroup of $\mathscr{PO}_n$. In this paper, we prove that $\mathscr{PO}_{n,r}$ is generated by idempotents and its idempotent rank is equal to $3n-2r-1$.

Key words: order-preserving partial transformation semigroup; fixed set; idempotent; idempotent rank

0 引言

设 X 是一个非空集合, $\mathscr{T}(X)$ 和 $\mathscr{P}(X)$ 分别表示 X 上的全变换半群和部分变换半群。设 Y 是 X 的一个固定子集, 令

$$\mathscr{TF}(X,Y)=\{\alpha\in\mathscr{T}(X) : x\alpha=x,\ \forall x\in Y\},$$

$$\mathscr{PF}(X,Y)=\{\alpha\in\mathscr{P}(X) : x\alpha=x,\ \forall x\in \mathrm{dom}(\alpha)\cap Y\},$$

则 $\mathscr{TF}(X,Y)$ 和 $\mathscr{PF}(X,Y)$ 分别是 $\mathscr{T}(X)$ 和 $\mathscr{P}(X)$ 的子半群。当 $X=X_n=\{1,2,\cdots,n\}$ 时, $\mathscr{T}_n$ 表示半群 $\mathscr{T}(X_n)$ 且 $\mathscr{P}_n$ 表示半群 $\mathscr{P}(X_n)$. 对任意 $1\leqslant r\leqslant n$,

$$\mathscr{TF}_{n,r}=\{\alpha\in\mathscr{T}_n : x\alpha=x,\ \forall x\in\{1,2,\cdots,r\}\},$$

$$\mathscr{PF}_{n,r}=\{\alpha\in\mathscr{P}_n : x\alpha=x,\ \forall x\in \mathrm{dom}(\alpha)\cap\{1,2,\cdots,r\}\},$$

则 $\mathscr{TF}_{n,r}$ 和 $\mathscr{PF}_{n,r}$ 分别是 $\mathscr{T}_n$ 和 $\mathscr{P}_n$ 的子半群。设 Sing_n 和 $\mathscr{P}_n$ 分别是 $X_n=\{1,2,\cdots,n\}$ 上的奇异变换半群和部分变换半群。对 $\alpha\in\mathscr{P}_n$, 若对任意 $x,y\in \mathrm{dom}(\alpha)$, $x\leqslant y\Rightarrow x\alpha\leqslant y\alpha$, 则称 α 是保序的。设 $\mathscr{PO}_n$ 为 $\mathscr{P}_n$ 中的所有保序变换之集(不含恒变换), 则 $\mathscr{PO}_n$ 是半群 $\mathscr{P}_n$ 的子半群, 称 $\mathscr{PO}_n$ 为保序部分变换半群。

收稿日期:2024-05-28; **网络出版时间**:2024-12-10 16:33:48
基金项目:国家自然科学基金资助项目(12261022)
第一作者:阮礼敏(2002—), 女, 硕士研究生, 研究方向为半群理论.E-mail:13985980955@163.com
* **通信作者**:赵平(1973—),男,教授,博士生导师,博士,研究方向为半群理论.E-mail:pingzhao731108@163.com

通常, 一个有限半群 S 的秩定义为 $\mathrm{rank}(S)=\min\{|A|:A\subseteq S,\langle A\rangle=S\}$。如果 S 由它的幂等元集 $E(S)$ 生成, 那么 S 的幂等元秩定义为 $\mathrm{idrank}(S)=\min\{|A|:A\subseteq E(S),\langle A\rangle=S\}$。显然有 $\mathrm{rank}(S)\leqslant\mathrm{idrank}(S)$。

半群理论中, 秩的相关研究一直是热点之一[1]。众所周知,全变换半群 $\mathscr{T}_n$ 的秩 $\mathrm{rank}(\mathscr{T}_n)=3$ 且部分变换半群 $\mathscr{P}_n$ 的秩 $\mathrm{rank}(\mathscr{P}_n)=4$。Gomes 等[2]研究了 Sing_n,得到了秩和幂等元秩为 $n(n-1)/2$。Howie 等[3]考虑了全变换半群 $\mathscr{T}_n$ 的理想 $\mathscr{K}(n,r)=\{\alpha\in\mathscr{T}_n:|\mathrm{im}(\alpha)|\leqslant r\}$ $(2\leqslant r\leqslant n-1)$, 并证明秩和幂等元秩都为第二类 Stirling 数 $S(n,r)$,第二类 Stirling 数定义为

$$S(n,1)=S(n,n)=1\quad S(n,r)=S(n-1,r-1)+rS(n-1,r)$$

Garba[4]考虑了 X_n 上的所有部分变换半群 $\mathscr{P}_n$,并证明了半群 $\mathscr{P}(n,r)=\{\alpha\in\mathscr{P}_n:|\mathrm{im}(\alpha)|\leqslant r\}$ 的秩和幂等元秩为 $S(n+1,r+1)$。Gomes 等[5]证明了 $\mathscr{O}_n$ 的秩和幂等元秩分别为 n 和 $2n-2$,还证明了 $\mathscr{PO}_n$ 的秩和幂等元秩分别为 $2n-1$ 和 $3n-2$。Honyam 等[6]刻画了半群 $\mathscr{TF}(X,Y)$ 的格林关系和理想,证明了当 X 是有限集时, $\mathscr{TF}(X,Y)$ 的秩为 $|Y|+\mathrm{rank}\ \mathscr{T}(X\backslash Y)$,还证明了 $\mathscr{TF}_{n,r}$ 的秩为 $r+\mathrm{rank}(\mathscr{T}_{n-r})$。Ayik 等[7]研究了当 $|X|=m$, $|Y|=n$ 且 $|\mathrm{im}(Q)|=r$ 时,变换半群 $\mathscr{TA}(X,Y;\theta)$ 的秩。本文考虑集合

$$\mathscr{PO}_{n,r}=\{\alpha\in\mathscr{PO}_n:x\alpha=x,\ \forall x\in\mathrm{dom}(\alpha)\cap\{1,2,\cdots,r\}\}。$$

易验证 $\mathscr{PO}_{n,r}$ 是 $\mathscr{PO}_n$ 的子半群,证明了半群 $\mathscr{PO}_{n,r}$ 是由幂等元生成,且半群 $\mathscr{PO}_{n,r}$ 的幂等元秩为 $3n-2r-1$,其中 $n\geqslant 3$。

1　主要结论及证明

众所周知,在半群 $\mathscr{PO}_n$ 中有 n 个 $\mathscr{J}$ 类, $\boldsymbol{J}_0^{\mathscr{PO}_n}$ $\boldsymbol{J}_1^{\mathscr{PO}_n},\cdots,\boldsymbol{J}_{n-1}^{\mathscr{PO}_n}$,其中 $\boldsymbol{J}_k^{\mathscr{PO}_n}=\{\alpha\in\mathscr{PO}_n:|\mathrm{im}(\alpha)|=k\}$ 且 $\boldsymbol{J}_0^{\mathscr{PO}_n}=\{\theta\}$, θ 是 X_n 上的空变换。对 $0\leqslant k\leqslant n-1$,令

$$\boldsymbol{J}_k=\{\alpha\in\mathscr{PO}_{n,r}:|\mathrm{im}(\alpha)|=k\},$$

则 $\mathscr{PO}_{n,r}=\boldsymbol{J}_0\cup\boldsymbol{J}_1\cup\cdots\cup\boldsymbol{J}_{n-1}$。注意到 $\boldsymbol{J}_k\subseteq\boldsymbol{J}_k^{\mathscr{PO}_n}$, $0\leqslant k\leqslant n-1$。

设 $A_i\subseteq X_n$, $1\leqslant i\leqslant m$, $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m=X_n$ 且 $A_i\cap A_{i+1}=\varnothing$, $1\leqslant i\leqslant m-1$。

$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{J}_m)$ 表示 $\boldsymbol{J}_m$ 中所有幂等元组成的集合,注意到 $\boldsymbol{J}_0^{\mathscr{PO}_n}=\{\theta\}$,设 $1\leqslant m\leqslant n-1$ 且 $\boldsymbol{\varepsilon}\in\boldsymbol{E}(\boldsymbol{J}_m)$,则易知 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 有标准表示

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{pmatrix}A_1 & A_2 & \cdots & A_m\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_m\end{pmatrix},$$

其中 $\max A_i<\min A_{i+1}$, $1\leqslant i\leqslant m-1$, $a_i\in A_i$, $1\leqslant i\leqslant m$, $A_i\cap\{1,2,\cdots,r\}=\{a_i\}$(如果 $A_i\cap\{1,2,\cdots,r\}\neq\varnothing$)。

引理 1　设 $0\leqslant m\leqslant n-2$,则 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{J}_m)\subseteq\langle\boldsymbol{E}(\boldsymbol{J}_{m+1})\rangle$。

证明　任意取 $\boldsymbol{\varepsilon}\in\boldsymbol{E}(\boldsymbol{J}_m)$,则 $|\mathrm{im}(\boldsymbol{\varepsilon})|=m$。为证明 $\boldsymbol{\varepsilon}\in\langle\boldsymbol{E}(\boldsymbol{J}_{m+1})\rangle$,分 2 种情形讨论。

情形 1　$m=0$,显然 $\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\theta}$,令

$$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\text{且 }\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix},$$

显然 $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}\in\boldsymbol{E}(\boldsymbol{J}_1)$ 且 $\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\beta\gamma}$。

情形 2　$m\geqslant 1$,设

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{pmatrix}A_1 & A_2 & \cdots & A_m\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_m\end{pmatrix},$$

则 $a_i\in A_i$, $A_i\cap\{1,2,\cdots,r\}=\{a_i\}$, $1\leqslant i\leqslant m$。由 $m\leqslant n-2$ 可知, $|A_i|=1$, $1\leqslant i\leqslant m$ 或者存在 $1\leqslant i\leqslant m$,使 $|A_i|\geqslant 2$。再分 2 种子情形。

情形 2.1　$|A_i|=1$,其中 $1\leqslant i\leqslant m$,显然

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_m\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_m\end{pmatrix}。$$

令

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m & x \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_m & x \end{pmatrix} \text{且 } \boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m & y \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_m & y \end{pmatrix},$$

式中 $x,\ y\in X_n\setminus \mathrm{im}(\boldsymbol{\varepsilon})$ 且 $x\neq y$,则显然 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\ \boldsymbol{\varepsilon}_2\in \boldsymbol{E}(\boldsymbol{J}_{m+1})$ 且 $\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}_2$。

情形 2.2 存在 $1\leqslant i\leqslant m$,使得 $|A_i|\geqslant 2$。设 $x=\min[A_i\setminus\{a_i\}]$,则 $x\notin\{1,2,\cdots,r\}$。令

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_{i-1} & a_i & A_i\setminus\{a_i\} & A_{i+1} & \cdots & A_m \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{i-1} & a_i & x & a_{i+1} & \cdots & a_m \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{i-1} & \{a_i,x\} & a_{i+1} & \cdots & a_m & y \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{i-1} & a_i & a_{i+1} & \cdots & a_m & y \end{pmatrix},$$

式中 $y\in X_n\setminus \mathrm{im}(\boldsymbol{\varepsilon})$,则 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2\in \boldsymbol{E}(\boldsymbol{J}_{m+1})$ 且 $\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}_2$。

引理 2 设 $1\leqslant m\leqslant n-1$,则 $\boldsymbol{J}_m\subseteq\langle \boldsymbol{E}(\boldsymbol{J}_m)\rangle$。

证明 任意取

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_m \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{pmatrix}\in \boldsymbol{J}_m,$$

式中 $b_1<b_2\cdots<b_m$。设 $c_i=\min A_i,\ 1\leqslant i\leqslant m$,令

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_m \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_m \end{pmatrix} \text{且 } \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_m \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{\varepsilon}\in \boldsymbol{E}(\boldsymbol{J}_m)$, $\boldsymbol{\beta}\in \boldsymbol{J}_m$ 且 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\beta}$。注意到,若 $A_i\cap\{1,2,\cdots,r\}\neq\varnothing$,则 $A_i\cap\{1,2,\cdots,r\}=\{b_i\}$ 且 $b_i=\min A_i=c_i$。以下分 3 种情形讨论。

情形 1 $c_m\leqslant r$,注意到 $c_1<c_2<\cdots<c_m$,显然 $\mathrm{dom}(\boldsymbol{\beta})\subseteq\{1,2,\cdots,r\}$,于是 $c_i=b_i,\ 1\leqslant i\leqslant m$,从而 $\boldsymbol{\beta}\in \boldsymbol{E}(\boldsymbol{J}_m)\subseteq\langle \boldsymbol{E}(\boldsymbol{J}_m)\rangle$。

情形 2 $c_j\leqslant r<c_{j+1}$,其中 $1\leqslant j\leqslant m-1$,显然

$$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_j & c_{j+1} & \cdots & c_m \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_j & b_{j+1} & \cdots & b_m \end{pmatrix}。$$

注意到 $c_m\leqslant n,\ c_{m-1}\leqslant n-1,\ \cdots,\ c_{j+1}\leqslant n-(m-j-1)$。令

$$\boldsymbol{\beta}^*=\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_j & c_{j+1} & \cdots & c_{m-1} & c_m \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_j & n-(m-j-1) & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^*=\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_j & c_{j+1} & \cdots & c_m \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_j & c_{j+1} & \cdots & c_m \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i=\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_j & \cdots & c_{m-i} & \{c_{m-i+1},n-i+1\} & n-i+2 & \cdots & n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_j & \cdots & c_{m-i} & n-i+1 & n-i+2 & \cdots & n \end{pmatrix},\quad 1\leqslant i\leqslant m-j,$$

$$\boldsymbol{\delta}_i=\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_j & b_{j+1} & \cdots & b_{m-i} & \{b_{m-i+1},n-i+1\} & n-i+2 & \cdots & n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_j & b_{j+1} & \cdots & b_{m-i} & b_{m-i+1} & n-i+2 & \cdots & n \end{pmatrix},$$

式中 $1\leqslant i\leqslant m-j-1$,

$$\boldsymbol{\delta}_{m-j}=\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_j & \{b_{j+1},n-(m-j-1)\} & n-(m-j-1)+1 & \cdots & n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_j & b_{j+1} & n-(m-j-1)+1 & \cdots & n \end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{\beta}^*\in J_m$, $\boldsymbol{\varepsilon}^*$, $\boldsymbol{\varepsilon}_i$, $\boldsymbol{\delta}_i$, $\boldsymbol{\delta}_{m-j}\in \boldsymbol{E}(\boldsymbol{J}_m)$。易验证

$$\boldsymbol{\beta}^*=\boldsymbol{\varepsilon}^*\boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}_2\cdots\boldsymbol{\varepsilon}_{m-j},$$

$$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\delta}_{m-j}\cdots\boldsymbol{\delta}_1=\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_j & \{b_{j+1},n-(m-j-1)\} & n-(m-j-1)+1 & \cdots & n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_j & b_{j+1} & b_{n-(m-j-1)+1} & \cdots & b_m \end{pmatrix}。$$

从而 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^*\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\varepsilon}^*\boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}_2\cdots\boldsymbol{\varepsilon}_{m-j}\boldsymbol{\delta}_{m-j}\cdots\boldsymbol{\delta}_1\in \boldsymbol{E}(\boldsymbol{J}_m)$。

情形 3 $r<c_1$。显然

$$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_m \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{pmatrix}。$$

注意到 $c_m\leqslant n$, $c_{m-1}\leqslant n-1,\cdots,c_1\leqslant n-(m-1)$。令

$$\boldsymbol{\beta}^*=\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{m-1} & c_m \\ n-(m-1) & n-(m-2) & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^*=\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{m-1} & c_m \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{m-1} & c_m \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i=\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{m-i} & \{c_{m-i+1},n-i+1\} & n-i+2 & \cdots & n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{m-i} & n-i+1 & n-i+2 & \cdots & n \end{pmatrix},\quad 1\leqslant i\leqslant m,$$

$$\boldsymbol{\delta}_i=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{m-i} & \{b_{m-i+1},n-i+1\} & n-i+2 & \cdots & n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{m-i} & b_{m-i+1} & n-i+2 & \cdots & n \end{pmatrix},\quad 1\leqslant i\leqslant m,$$

则 $\boldsymbol{\beta}^*\in J_m$, $\boldsymbol{\varepsilon}^*$, $\boldsymbol{\varepsilon}_i$, $\boldsymbol{\delta}_i\in E(J_m)$。易验证 $\boldsymbol{\beta}^*=\boldsymbol{\varepsilon}^*\boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}_2\cdots\boldsymbol{\varepsilon}_m$,

$$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\delta}_m\cdots\boldsymbol{\delta}_1=\begin{pmatrix} \{b_1,n-(m-1)\} & n-m+2 & \cdots & n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{pmatrix},$$

从而 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^*\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\varepsilon}^*\boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}_2\cdots\boldsymbol{\varepsilon}_m\boldsymbol{\delta}_m\cdots\boldsymbol{\delta}_1\in E(J_m)$,于是 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{\varepsilon\beta}\in \boldsymbol{E}(\boldsymbol{J}_m)\subseteq\langle \boldsymbol{E}(\boldsymbol{J}_m)\rangle$。因此 $\boldsymbol{J}_m\subseteq\langle \boldsymbol{E}(\boldsymbol{J}_m)\rangle$。

引理 3　设 $n\geqslant 3$,则 $\mathscr{PO}_{n,r}=\langle \boldsymbol{E}(\boldsymbol{J}_{n-1})\rangle$。

证明　注意到 $\mathscr{PO}_{n,r}=\boldsymbol{J}_0\cup\boldsymbol{J}_1\cup\cdots\cup\boldsymbol{J}_{n-1}$ 且 $\boldsymbol{J}_0=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{J}_0)=\{\theta\}$,由引理 1、2 可得,$\mathscr{PO}_{n,r}\subseteq\langle \boldsymbol{E}(\boldsymbol{J}_{n-1})\rangle$,显然 $\langle \boldsymbol{E}(\boldsymbol{J}_{n-1})\rangle\subseteq\mathscr{PO}_{n,r}$,因此 $\mathscr{PO}_{n,r}=\langle \boldsymbol{E}(\boldsymbol{J}_{n-1})\rangle$。

设 i, $j\in X_n$,定义

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{i,j}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & j-1 & j & \cdots & i & i+1 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & j-1 & j+1 & \cdots & i+1 & i+1 & \cdots & n \end{pmatrix},\quad j\leqslant i,$$

$$\boldsymbol{\eta}_{i,j}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & i+1 & \cdots & j & j+1 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & i & i & \cdots & j-1 & j+1 & \cdots & n \end{pmatrix},\quad i+1\leqslant j。$$

记 $\boldsymbol{\varepsilon}_i=\boldsymbol{\varepsilon}_{i,i}$, $\boldsymbol{\eta}_i=\boldsymbol{\eta}_{i,i+1}$, $\boldsymbol{\delta}_i$ 为 $X_n\setminus\{i\}$ 上的恒等变换,显然 $\boldsymbol{\varepsilon}_i$、$\boldsymbol{\eta}_i$、$\boldsymbol{\delta}_i\in\boldsymbol{E}(\boldsymbol{J}_{n-1})$。令

$$\boldsymbol{E}^+_{n-1}=\{\boldsymbol{\varepsilon}_i:1\leqslant i\leqslant n-1\} \text{ 且 } \boldsymbol{E}^-_{n-1}=\{\boldsymbol{\eta}_i:1\leqslant i\leqslant n-1\},$$

$$\boldsymbol{F}_{n-1}=\{\boldsymbol{\delta}_i \mid 1\leqslant i\leqslant n\},$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{J}^{\mathscr{PO}_n}_{n-1})=\{\alpha\in\mathscr{PO}_n:|\operatorname{im}(\alpha)|=n-1,\ \alpha^2=\alpha\}。$$

则由文献[5]知

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{J}^{\mathscr{PO}_n}_{n-1})=\boldsymbol{E}^+_{n-1}\cup\boldsymbol{E}^-_{n-1}\cup\boldsymbol{F}_{n-1},$$

再令

$$\boldsymbol{E}^*_{n-1}=\{\boldsymbol{\varepsilon}_i:1\leqslant i\leqslant r\}\cup\{\boldsymbol{\eta}_i:1\leqslant i\leqslant r-1\}。$$

注意到 $\mathscr{PO}_{n,r}\subseteq\mathscr{PO}_n$,则易验证

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{J}_{n-1})=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{J}^{\mathscr{PO}_n}_{n-1})\setminus\boldsymbol{E}^*_{n-1}。$$

由文献[5]得 $\mathscr{PO}_n=\langle \boldsymbol{E}(\boldsymbol{J}^{\mathscr{PO}_n}_{n-1})\rangle$ 且 $\operatorname{idrank}(\mathscr{PO}_n)=|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{J}^{\mathscr{PO}_n}_{n-1})|=3n-2$。

定理 1　设 $n\geqslant 3$ 且 $0\leqslant r\leqslant n-1$,则 $\operatorname{idrank}(\mathscr{PO}_{n,r})=3n-2r-1$。

证明　由引理 3 可知 $\mathscr{PO}_{n,r}=\langle \boldsymbol{E}(\boldsymbol{J}_{n-1})\rangle$,假设 $\boldsymbol{E}\subsetneqq\boldsymbol{E}(\boldsymbol{J}_{n-1})$ 且 $\mathscr{PO}_{n,r}=\langle\boldsymbol{E}\rangle$,则 $\boldsymbol{E}\cup\boldsymbol{E}^*_{n-1}\subsetneqq\boldsymbol{E}(\boldsymbol{J}^{\mathscr{PO}_n}_{n-1})$ 且 $|\boldsymbol{E}\cup\boldsymbol{E}^*_{n-1}|<|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{J}^{\mathscr{PO}_n}_{n-1})|=3n-2$,进而,

$$\begin{aligned}\mathscr{PO}_n&=\langle \boldsymbol{E}(\boldsymbol{J}^{\mathscr{PO}_n}_{n-1})\rangle=\langle \boldsymbol{E}(\boldsymbol{J}_{n-1})\cup\boldsymbol{E}^*_{n-1}\rangle=\langle\langle \boldsymbol{E}(\boldsymbol{J}_{n-1})\rangle\cup\boldsymbol{E}^*_{n-1}\rangle\\&=\langle\langle\boldsymbol{E}\rangle\cup\boldsymbol{E}^*_{n-1}\rangle=\langle\boldsymbol{E}\cup\boldsymbol{E}^*_{n-1}\rangle,\end{aligned}\tag{1}$$

从而有 $\operatorname{idrank}(\mathscr{PO}_n)\leqslant|\boldsymbol{E}\cup\boldsymbol{E}^*_{n-1}|<3n-2$,矛盾,因此 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{J}_{n-1})$ 是 $\mathscr{PO}_{n,r}$ 的最小幂等生成集。注意到 $|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{J}_{n-1})|=3n-2r-1$,从而 $\operatorname{idrank}(\mathscr{PO}_{n,r})=3n-2r-1$。

令

$$\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & r & r+1 & \cdots & n\\ 1 & 2 & \cdots & r & r & \cdots & n-1\end{pmatrix},$$

$$B=\{\boldsymbol{\delta}_1,\boldsymbol{\delta}_2,\cdots,\boldsymbol{\delta}_n,\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_{n-1},\boldsymbol{\gamma}\},$$

则 $|B|=2n-r$。

引理 4 设 $n\geqslant 3$,则 $\mathscr{PO}_{n,r}=\langle B\rangle$。

证明 易验证

$$\boldsymbol{\eta}_r=\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{n-2}\cdots\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1},$$

$$\boldsymbol{\eta}_i=\boldsymbol{\varepsilon}_i\boldsymbol{\varepsilon}_{i-1}\cdots\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1}\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}\cdots\boldsymbol{\varepsilon}_{i+2}\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1},\quad r+1\leqslant i\leqslant n-2,$$

$$\boldsymbol{\eta}_{n-1}=\boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{n-2}\cdots\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1}\boldsymbol{\gamma}。$$

注意到 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{J}_{n-1})=(\boldsymbol{E}_{n-1}^{+}\cup\boldsymbol{E}_{n-1}^{-}\cup\boldsymbol{F}_{n-1})\setminus\boldsymbol{E}_{n-1}^{*}$,因此,$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{J}_{n-1})\subseteq\langle B\rangle$。由引理 3 可得,$\mathscr{PO}_{n,r}=\langle B\rangle$。

定理 2 设 $n\geqslant 3$ 且 $1\leqslant r\leqslant n-1$,则 $\operatorname{rank}(\mathscr{PO}_{n,r})=2n-r$。

证明 由引理 4 可得,$\mathscr{PO}_{n,r}=\langle B\rangle$,从而,$\operatorname{rank}(\mathscr{PO}_{n,r})\leqslant|B|=2n-r$。设 G 是 $\mathscr{PO}_{n,r}$ 的生成集,即 $\mathscr{PO}_{n,r}=\langle G\rangle$。对任意 λ、$\mu\in B$,若 $\lambda\neq\mu$,则 $\ker(\lambda)\neq\ker(\mu)$。现任意取 $\lambda\in B$,则存在 $g_1,g_2,\cdots,g_m\in G$,使得 $\lambda=g_1g_2\cdots g_m$。由 $\lambda\in B\subseteq J_{n-1}$ 可推得,$g_1,g_2,\cdots,g_m\in J_{n-1}$,从而 $\ker(\lambda)=\ker(g_1)$。再由 λ 的任意性可得,$|G|\geqslant|B|$,进而,$\operatorname{rank}(\mathscr{PO}_{n,r})\geqslant 2n-r$,因此,$\operatorname{rank}(\mathscr{PO}_{n,r})=2n-r$。

参考文献:

[1] HOWIE J M. Fundamentals of semigroup theory[M]. London: Oxford University Press, 2003.

[2] GOMES G M S, HOWIE J M. On the ranks of certain finite semigroups of transformations[J]. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1987, 101(3):395-403.

[3] HOWIE J M, MCFADDEN R B. Idempotent rank in finite full transformation semigroups[J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 1990, 114(3/4):161-167.

[4] GARBA G U. Idempotents in partial transformation semigroups[J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh (Section A: Mathematics), 1990, 116(3/4):359-366.

[5] GOMES G M S, HOWIE J M. On the ranks of certain semigroups of order-preserving transformations[J]. Semigroup Forum, 1992, 45(1):272-282.

[6] HONYAM P, SANWONG J. Semigroups of transformations with fixed sets[J]. Quaestiones Mathematicae, 2013, 36(1):79-92.

[7] AYIK G, ABUSARRIS H D M. On the rank of generalized transformation semigroups[J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 2022, 45(4):1777-1787.

(编辑:陈丽萍)