山东大学学报(理学版)2025 年 5 月 第 60 卷 第 5 期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.60, No.5, 2025 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2025)05-0025-08 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.430

σ-置换嵌入子群对群 p-幂零性的影响

吉九州,周伟,杨南迎*
(江南大学理学院, 江苏 无锡 214122)

摘要:G 是一个有限群,称 G 的子群 A 在 G 中是 σ-置换的,如果群 G 有一个完全 Hall σ-集 $\mathscr{H}$,使得对所有的 $H\in\mathscr{H}$ 和所有的 $x\in G$,均有 $AH^x=H^xA$。称 G 的子群 H 在 G 中是 σ-置换嵌入的,如果 H 的每个 Hall σ_i-子群也是 G 的某个 σ-置换子群的 Hall σ_i-子群,研究群 G 的 Sylow p-子群的 σ-置换嵌入子群,给出群 G 为 p-幂零群的新的判别准则。

关键词:有限群;σ-置换子群;σ-置换嵌入子群;p-幂零群

中图分类号:O152 **文献标志码**:A

引用格式:吉九州,周伟,杨南迎.σ-置换嵌入子群对群 p-幂零性的影响[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(5):25-32.

Influence of σ-permutably embedded subgroups on p-nilpotency of finite groups

JI Jiuzhou, ZHOU Wei, YANG Nanying*
(School of Science, Jiangnan University, Wuxi 214122, Jiangsu, China)

Abstract: Let G be a finite group. A subgroup A of G is said to be σ-permutable in G if G possesses a complete Hall σ-set $\mathscr{H}$ such that $AH^x=H^xA$ for all $H\in\mathscr{H}$ and all $x\in G$. A subgroup H of G is said to be σ-permutably embedded in G if every Hall σ_i-subgroup of H is also a Hall σ_i-subgroup of some σ-permutable subgroup of G. By studying the σ-permutably embedded subgroups of Sylow p-subgroups of G, some new criteria for G to be a p-nilpotent group are given.

Key words: finite group; σ-permutable subgroup; σ-permutably embedded subgroup; p-nilpotent group

1 引言和主要结论

本文所涉及的群都是有限群。G 表示一个有限群,$|G|$ 表示 G 的阶,$\pi(n)$ 表示所有整除 n 的素因子的集合,$\pi(G)$ 表示 $\pi(|G|)$,$|G|_\pi$ 表示能整除$|G|$且素因子均在 π 中的最大整数。

设 $\sigma=\{\sigma_i \mid i\in I\}$ 是全体素数集合 $\mathscr{P}$ 的一个划分,即 $\mathscr{P}=\bigcup_{i\in I}\sigma_i$,且对任意的 $i\neq j$,有 $\sigma_i\cap\sigma_j=\varnothing$,记$\sigma(n)=\{\sigma_i \mid \sigma_i\cap\pi(n)\neq\varnothing\}$。如果 $G=1$ 或者$|\sigma(G)|=1$,则称 G 是 σ-准素的[1];如果 G 的子群集合 $\mathscr{H}$ 中的任一非平凡元素都是 G 的 Hall σ_i-子群,则称 $\mathscr{H}$ 为 G 的一个完全 Hall σ-集[1],其中$\sigma_i\in\sigma$ 且对每个$\sigma_i\in\sigma(G)$,$\mathscr{H}$ 中有且仅有一个元素是 G 的 Hall σ_i-子群;如果 G 有一个完全 Hall σ-集,则称 G 为 σ-完全群[2]。如果对所有的$\sigma_i\in\sigma(G)$,群 G 的任意子群都是一个 D_{σ_i}-群,则称 G 为具有 Sylow 型的 σ-完全群[2];如果 G 的每个主因子都是 σ-准素的,则称 G 是 σ-可解的[1]。对于所有 $i=1,2,\cdots,t$,如果存在一个子群链 $H=H_0\leqslant H_1\leqslant\cdots\leqslant H_t=G$,满足 H_{i-1}在 H_i 中是正规的或者 $H_i/(H_{i-1})_{H_i}$是 σ-准素的,则子群 H 称为 G 的 σ-次正规子群[1];如果群 G 有一个完全 Hall σ-集 $\mathscr{H}$,使得对所有的 $H\in\mathscr{H}$ 和所有的 $x\in G$,均有 $AH^x=H^xA$,则称子群 A 在 G 中是 σ-置换的[1]。

收稿日期:2023-10-16; **网络出版时间**:2024-06-20 13:31:30
基金项目:国家自然科学基金资助项目(12201252)
第一作者:吉九州(1999—),男,硕士研究生,研究方向为有限群论. E-mail:18601502750@163.com
***通信作者**:杨南迎(1981—),男,副教授,硕士生导师,博士,研究方向为有限群论及群类理论. E-mail:yangny@jiangnan.edu.cn

研究子群的各种置换性质、嵌入性质是有限群论中的重要课题。例如，称子群 H 在 G 中是 s-置换的[3]，若对 G 的任意 Sylow 子群 P，有 $HP=PH$；称子群 H 在 G 中是 s-置换嵌入的[4]，如果存在 G 的一个 s-置换子群 K，其中 H 的任意 Sylow p-子群也是 K 的 Sylow p-子群，利用这些概念研究群的幂零性、可解性、超可解性等性质已有许多成果[3-8]。

在此基础之上，研究者们结合 σ-理论提出了一些新的概念。例如，文献[9]引入了 σ-置换嵌入的概念，称子群 A 在 G 中是 σ-置换嵌入的。如果 A 的每个 Hall σ_i-子群也是 G 的某个 σ-置换子群的 Hall σ_i-子群，易知，当 $\sigma=\{\{2\},\{3\},\{5\},\cdots\}$ 时，σ-置换嵌入子群就是 s-置换嵌入子群。

本文主要利用 σ-置换嵌入子群研究群的 p-幂零性，证明了如下的命题。

命题 1　设 G 是具有 Sylow 型的 σ-完全群且 $\mathscr{H}=\{H_1,\cdots,H_t\}$ 为 G 的完全 Hall σ-集，其中 H_1 是阶被 p 整除的 p-超可解群，p 为整除 $|G|$ 的最小素数，设 P 为 G 的 Sylow p-子群，若 P 的每个极大子群在 G 中都是 σ-置换嵌入的，则 G 为 p-幂零群。

命题 2　设 G 是具有 Sylow 型的 σ-完全群且 $\mathscr{H}=\{H_1,\cdots,H_t\}$ 为 G 的完全 Hall σ-集，其中 H_1 是阶被 p 整除的 p-超可解群，p 为整除 $|G|$ 的最小素数，设 P 为 G 的 Sylow p-子群，若对于 P 的每个素数阶循环子群 H，都有 H 在 G 中是 σ-置换嵌入的。此外，在 P 为 G 的非交换 Sylow 2-子群且 $H\nleq Z_\infty(G)$ 时，若 $|H|=4$ 时都有 H 在 G 中是 σ-置换嵌入的，则 G 为 p-幂零群。

定理 1　设 G 是具有 Sylow 型的 σ-完全群且 $\mathscr{H}=\{H_1,\cdots,H_t\}$ 为 G 的完全 Hall σ-集，其中 H_1 是阶被 p 整除的 p-超可解群，p 为整除 $|G|$ 的最小素数，设 P 为 G 的 Sylow p-子群，若存在 $D\leqslant P$ 使得 $1<|D|<|P|$ 且对任意的满足 $|H|=|D|$ 的 P 的子群 H，都有 H 在 G 中是 σ-置换嵌入的。此外，在 $|D|=2$ 且 P 非交换时，若 $|H|=2|D|$ 时 H 在 G 中是 σ-置换嵌入的，则 G 为 p-幂零群。

推论 1[5]　设 G 是一个群，P 是 G 的 Sylow p-子群，其中 p 是整除 $|G|$ 的最小素数，若 P 的每个极大子群在 G 中都是 s-置换嵌入的，那么 G 是 p-幂零的。

推论 2[5]　设 G 是一个群，若 G 的 Sylow p-子群的极大子群在 G 中都是 s-置换嵌入的，那么 G 为具有超可解形式的 Sylow 塔的群。

推论 3[10]　设 G 是一个群，P 是 G 的 Sylow p-子群，其中 p 是整除 $|G|$ 的素数且满足 $(|G|,p-1)=1$，若 P 的每个极大子群在 G 中都是 s-置换嵌入的，那么 G 是 p-幂零的。

推论 4[10]　设 G 是一个群，P 是 G 的 Sylow p-子群，其中 p 是整除 $|G|$ 的最小素数，若 P 的每个 2-极大子群在 G 中都是 s-置换嵌入的且 G 是 A_4 无关的，那么 G 是 p-幂零的。

2　准备工作

引理 1[1]　设 A，K 和 N 是 G 的子群，A 在 G 中是 σ-次正规的，N 是 G 的正规子群，那么下面的结论成立：

（1）$A\cap K$ 在 K 中是 σ-次正规的；

（2）AN/N 在 G/N 中是 σ-次正规的；

（3）若 $K\leqslant A$ 且 A 为 σ-幂零的，则 K 在 G 中是 σ-次正规的；

（4）若 G 是 Π-完全群，A 是 Π-群，则 $A\leqslant O_\Pi(G)$；

（5）若 $|G:A|$ 是 Π-数，则 $O^\Pi(A)=O^\Pi(G)$；

（6）若 A 为 G 的 Hall σ-子群，则 A 在 G 中是正规的。

引理 2[1]　设 G 为 σ-完全群且 $\mathscr{H}=\{H_1,\cdots,H_t\}$ 为 G 的完全 Hall σ-集，设 $D=G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ 并且 H 为 G 的一个子群，则：

（1）若 H 在 G 中是 $\mathscr{H}^D$-置换的，则 H 在 G 中是 σ-次正规的；

（2）若 H 在 G 中是 $\mathscr{H}^G$-置换的，则 H^G/H_G 为 σ-幂零的并且 $D\leqslant N_G(H)$。

引理 3[1]　设 G 为 σ-完全群，H 为 G 的 σ_1-子群，则 H 在 G 中是 σ-置换的当且仅当 $O^{\sigma_1}(G)\leqslant N_G(H)$。

引理 4[1]　设 G 为 σ-完全群，H，K 和 N 为 G 的子群，设 $\mathscr{H}=\{H_1,\cdots,H_t\}$ 为 G 的完全 Hall σ-集，$\mathscr{L}=\mathscr{H}^K$，设 H 在 G 中是 $\mathscr{L}$-置换的并且 N 是 G 的正规子群，则：

（1）若 $H \leqslant E \leqslant G$，则 H 在 E 中是 $\mathscr{H}^*$-置换的，其中 $\mathscr{H}^* = \{H_1 \cap E, \cdots, H_t \cap E\}^{K \cap E}$。特别地，若 G 是具有 Sylow 型的 σ-完全群，H 在 G 中是 σ-置换的，则 H 在 E 中是 σ-置换的；

（2）HN/N 在 G/N 中是 $\mathscr{L}^{**}$-置换的，其中 $\mathscr{L}^{**} = \{H_1N/N, \cdots, H_tN/N\}^{KN/N}$；

（3）若 G 是具有 Sylow 型的 σ-完全群，并且 E/N 在 G/N 中是 σ-置换的，则 E 在 G 中是 σ-置换的；

（4）若 K 在 G 中是 $\mathscr{L}$-置换的，则 $\langle H, K\rangle$ 在 G 中是 $\mathscr{L}$-置换的。

引理 5　设 G 为具有 Sylow 型的 σ-完全群，若 K 在 G 中是 σ-置换的，$K_G = 1$，L 为 K 的 Hall σ_i-子群，则 L 在 G 中也是 σ-置换的。

证明　K 在 G 中是 σ-置换的，由引理 3，可知 K 在 G 中是 σ-次正规的，且 K^G/K_G 为 σ-幂零群，因为 $K_G = 1$，所以 K^G 为 σ-幂零群。设 R 为 K^G 的 Hall σ_i-子群，则 R char K^G，于是 $R \trianglelefteq G$，又因为 G 为具有 Sylow 型的 σ-完全群，所以 $L \leqslant R \leqslant O_{\sigma_i}(G)$。设 Q 为 G 的某个 σ_j-群，若 $j = i$，因为 G 是具有 Sylow 型的 σ-完全群，所以 $L \leqslant O_{\sigma_i}(G) \leqslant Q$，从而 $LQ = QL = Q$；若 $j \neq i$，因为 K^G 为 σ-幂零群，所以 K 也为 σ-幂零群，又因为 K 在 G 中是 σ-次正规的，$L \leqslant K$，所以由引理 1(3)，L 在 G 中是 σ-次正规的，从而由引理 1(1)，L 在 KQ 中是 σ-次正规的。通过比较阶数易知 L 为 KQ 的 Hall σ_i-子群，由引理 1(6)，有 $L \trianglelefteq KQ$，从而 $LQ = QL$，所以 L 在 G 中也是 σ-置换的。

引理 6[9]　设 H, K 和 N 为 G 的子群，若 $H \leqslant K$，H 在 G 中是 σ-置换嵌入的，N 是 G 的正规子群，则：

（1）若 G 为具有 Sylow 型的 σ-完全群，则 H 在 K 中是 σ-置换嵌入的；

（2）HN/N 在 G/N 中是 σ-置换嵌入的。

引理 7[11]　设 $N \trianglelefteq G$，P 为 G 的 Sylow p-子群，且满足以下性质：

（1）$N \cap P \leqslant \Phi(P)$；

（2）$(|N \cap P| : |G : P|) = 1$。

设 π 为 $|N \cap P|$ 中素因子的集合，那么存在 N 的正规子群 M，其中 $M \cap P = 1$，使得 NM 为一个 π-群，且 $|N \cap P|$ 整除 $|N/M|$。

引理 8[12]　设 G 是一个本原群，即 G 中存在极大子群 M，$M_G = 1$，以下 3 条论断之一成立：

（1）G 中有唯一的极小正规子群 N，N 是自中心化的（事实上 N 是交换的），且 N 在 G 中是可补的，M 为 N 在 G 中的补，即 $G = NM$，$N \cap M = 1$；

（2）G 中有唯一的极小正规子群 N，N 是非交换的，且 N 在 G 中是可补充的，M 为 N 在 G 中的补充，即 $G = NM$；

（3）G 中有两个正规子群 N 和 R，且有 $C_G(N) = R$。

引理 9[11,13]　设 p 为素数且 G 为一个极小非 p-幂零群，即 G 不是 p-幂零群但是 G 的任意真子群都是 p-幂零群，则 G 也为极小非幂零群且满足：

（1）G 有一个正规的 Sylow p-子群 P，$G = P \rtimes Q$，其中 Q 为 G 的非正规的循环 q-子群，q 为不同于 p 的素数；

（2）$P/\Phi(P)$ 是 G-主因子；

（3）P 的方次数为 p 或 4（当 $p = 2$）。

引理 10[14]　设 H、K、N 为 G 中两两交换的 3 个子群，并且 H 是 G 的 Hall-子群，则 $N \cap HK = (N \cap H)(N \cap K)$。

引理 11　设 G 为具有 Sylow 型的 σ-完全群且 $\mathscr{H} = \{H_1, \cdots, H_t\}$ 为 G 的完全 Hall σ-集，其中 H_1 是阶被 p 整除的 p-超可解群，N 为 G 的正规子群并且是初等交换 p-群，若 N 有一个子群 D，满足 $1 < |D| < |N|$，且 N 的任意一个与 D 阶数相同的子群在 G 中是 σ-置换嵌入的，那么 N 中存在与 D 阶数相同的子群 H 且 H 在 G 中是正规的。

证明　因为 $N \leqslant H_1$ 并且 H_1 是 p-超可解群，所以 N 中存在与 D 阶数相同的子群 H 且 $H \trianglelefteq H_1$。根据假设，H 在 G 中是 σ-置换嵌入的，所以 G 中存在 σ-置换子群 S 使得 H 为 S 的一个 Hall σ_1-子群。当 $i > 1$ 时，$SH_i = H_iS$。由引理 10，$SH_i \cap N = (S \cap N)(H_i \cap N) = S \cap N$，$S \cap N$ 在 SH_i 中是正规的，即 $H_i \leqslant N_G(S \cap N)$。因为 H 为 S 中的 Hall σ_1-子群并且 $S \cap N \trianglelefteq S$，所以 $S \cap N \leqslant H$，从而 $S \cap N \leqslant H \leqslant N \cap S$，即 $S \cap N = H$，所以 $H_i \leqslant N_G(S \cap N) = N_G(H)$；当 $i = 1$ 时，$H \trianglelefteq H_1$，此时有 $H \trianglelefteq G$。引理 1 成立。

引理 12 设 G 为具有 Sylow 型的 σ-完全群,H 为 G 的 σ_1-子群,N 为 G 的正规 σ_1-子群,H 在 G 中是 σ-置换嵌入的,则 $K=HN$ 在 G 中是 σ-置换嵌入的。

证明 因为 H 在 G 中是 σ-置换嵌入的,所以 G 中存在 σ-置换子群 S,使得 H 为 S 的一个 Hall σ_1-子群。通过比较阶数易知 $|SN:K|$ 是 σ_1'-数,但显然 $K=HN$ 是 σ_1-群,所以 K 为 SN 的一个 Hall σ_1-子群。由引理 4(4),SN 在 G 中是 σ-置换的,所以 K 在 G 中是 σ-置换嵌入的。

3 命题与定理的证明

命题 1 的证明。假设命题非真,设 G 是满足命题条件的阶数最小的反例,不失一般性地,假设 $P\leqslant H_1$。通过以下步骤得到矛盾。

步骤 1 $O_{p'}(G)=1$。

若 $O_{p'}(G)\neq 1$,考虑群 $\bar{G}=G/O_{p'}(G)$。显然,$\bar{G}$ 为具有 Sylow 型的 σ-完全群,其中 $\mathscr{H}=\{H_1O_{p'}(G)/O_{p'}(G),H_2O_{p'}(G)/O_{p'}(G),\cdots,H_tO_{p'}(G)/O_{p'}(G)\}$ 为 $\bar{G}$ 的完全 Hall σ-集,其中 $H_1O_{p'}(G)/O_{p'}(G)\cong H_1/H_1\cap O_{p'}(G)$ 是 p-超可解群,$PO_{p'}(G)/O_{p'}(G)$ 是 $G/O_{p'}(G)$ 的一个 Sylow p-子群。设 $M/O_{p'}(G)$ 为 $PO_{p'}(G)/O_{p'}(G)$ 的一个极大子群,则有 $M=(M\cap P)O_{p'}(G)$,同时有 $p=|PO_{p'}(G)/O_{p'}(G):M/O_{p'}(G)|=|PO_{p'}(G):M|=|P:M\cap P|$,所以 $M\cap P$ 为 P 的一个极大子群。根据假设可得,$M\cap P$ 在 G 中是 σ-置换嵌入的,所以由引理 6(2),$M/O_{p'}(G)=(M\cap P)O_{p'}(G)/O_{p'}(G)$ 在 $G/O_{p'}(G)$ 中是 σ-置换嵌入的,说明 $\bar{G}=G/O_{p'}(G)$ 满足命题的假设,由 G 的构造可知,$\bar{G}=G/O_{p'}(G)$ 是 p-幂零群,此时 G 也是 p-幂零群,矛盾。步骤 1 成立。

步骤 2 G 不是非交换单群。

若 G 是非交换单群,那么 G 中的 σ-次正规子群仅有 1 和 G。设 P_1 为 P 的极大子群,由假设可知,P_1 在 G 中是 σ-置换嵌入的,所以 G 中存在 σ-置换子群 S,使得 P_1 为 S 的 Hall σ_1-子群。由引理 2 可知,S 在 G 中是 σ-次正规的,因此 $S=1$ 或 $S=G$。若 $S=G$,那么 P_1 为 G 的 Hall σ_1-子群,说明 $P_1=P$,矛盾。若 $S=1$,那么 $P_1=1$,所以 $|P|=p$,说明 G 中存在循环 Sylow p-子群,p 为整除 $|G|$ 的最小素数,所以 G 是 p-幂零群,矛盾。步骤 2 成立。

步骤 3 G/R 是 p-幂零的,其中 R 为 G 中任一极小正规子群。

显然,G/R 为具有 Sylow 型的 σ-完全群,$\{H_1R/R,H_2R/R,\cdots,H_tR/R\}$ 为 G/R 的完全 Hall σ-集,并且 $H_1R/R\cong H_1/H_1\cap R$,所以 H_1R/R 是 p-超可解的。

若 p 不整除 $|G/R|$,那么 G/R 为 p'-群,从而 G/R 是 p-幂零的。若 p 整除 $|G/R|$,那么显然,PR/R 为 G/R 中的 Sylow p-子群,由步骤 1 同理可得,PR/R 中的每一个极大子群都在 G/R 中是 σ-置换嵌入的,因此 G/R 满足命题假设,由 G 的构造可知,G/R 是 p-幂零的。步骤 3 成立。

根据步骤 2 和步骤 3,G 中有且仅有一个极小正规子群,记为 N,且 G/N 是 p-幂零的。

步骤 4 N 为初等交换 p-群。

若 N 为非交换群,那么 p 整除 $|N|$ 且 N 不是 p-群。

若 $NP<G$,由引理 6(1)可知,NP 满足假设,由 G 的构造可知 NP 是 p-幂零的,因此 N 也是 p-幂零的,说明 N 为初等交换 p-群,矛盾,所以 $G=NP$。现在假设 P_1 为 P 的任一极大子群,那么显然,$P_1\neq 1$。由假设可得,P_1 在 G 中是 σ-置换嵌入的,即 G 中存在 σ-置换子群 S,使得 P_1 为 S 的 Hall σ_1-子群。由引理 2,S/S_G 是 σ-幂零的,若 $S_G=1$,那么 S 是 σ-幂零的,因此 $P_1\trianglelefteq S$。同时由引理 2,S 在 G 中是 σ-次正规的,所以 P_1 在 G 中是 σ-次正规的,由引理 1(4)得 $P_1\leqslant O_{\sigma_1}(G)$,因此 $O_{\sigma_1}(G)\neq 1$。因为 N 为 G 中唯一极小正规子群,所以 $N\leqslant O_{\sigma_1}(G)\leqslant H_1$,故 N 为 p-超可解的,说明 N 为初等交换 p-群,矛盾,所以 $S_G\neq 1$,即 $N\leqslant S_G\leqslant S$。如果 $G=NP_1$,则 $G=NP_1\leqslant S$,即 $G=S$。在这种情况下,P_1 为 G 的 Sylow p-子群,矛盾,这说明对于 P 的任一极大子群 P_1,都有 $NP_1<G$,P 为 N 在 G 中的极小补充,故 $N\cap P\leqslant\Phi(P)$。由引理 7 可得,存在 N 中正规子群 R,满足 N/R 为 p-群,并且 $|N\cap P|$ 整除 $|N/R|$。因为 N 为非交换群,所以 $N=N_1\times\cdots\times N_m$,其中 $N_i\cong N_j$ 且 N_i 为非交换单群,$1\leqslant i<j\leqslant m$。因为 R 为 N 中的正规子群,所以 $R=N_{i_1}\times\cdots\times N_{i_k}$, $\{i_1,\cdots,i_k\}\subseteq\{1,\cdots,m\}$,若 $N\neq R$, N/R 为 p-群,则 N_i 为 p-群,从而 N 为初等交换 p-群,矛盾,所以 $N=R$。但是 $N\cap P$ 为 N 的 Sylow p-子群,显然

$N\cap P\neq 1$,又因为$|N\cap P|$整除$|N/R|$, $|N/R|=1$,矛盾,这说明 N 为交换群,所以 N 为初等交换 q-群,其中 q 为某个素数。若 $q\neq p$, $N\leqslant O_{p'}(G)=1$,矛盾,所以 $q=p$。步骤 4 成立。

步骤 5　$\Phi(G)=1$, $C_G(N)=N$ 且$|N|>p$。

因为 N 为 G 中唯一的极小正规子群,且 G/N 是 p-幂零的,结合引理 8 可得,$\Phi(G)=1$, $C_G(N)=N$。若$|N|=p$,则有 $G/C_G(N)\lesssim \mathrm{Aut}(N)\cong C_{p-1}$,即 $G/N\lesssim C_{p-1}$。但是 p 为整除$|G|$的最小素数,$G/N=1$,即 $N=G$,矛盾。步骤 5 成立。

步骤 6　最终矛盾。

由步骤 4 可知,$N\leqslant P$。

若 $N=P$,那么 $N=P\leqslant H_1$ 且 H_1 是 p-超可解的,所以 N 中存在极大子群 N_1,满足 $N_1\trianglelefteq H_1$。根据假设,N_1 在 G 中是 σ-置换嵌入的,即 G 中存在 σ-置换子群 S,使得 N_1 为 S 的 Hall σ_1-子群,所以对于任意 $i>1$, $SH_i=H_iS$。由引理 10,$SH_i\cap N=(S\cap N)(H_i\cap N)=S\cap N$,所以 $H_i\leqslant N_G(S\cap N)$。因为 $N=P$,N 为 G 中的 Sylow p-子群,所以 $S\cap N$ 也是 S 的 Sylow p-子群。而 N_1 也是 S 的 Sylow p-子群,且 $N_1\leqslant S\cap N$,则 $N_1=S\cap N$,所以 $H_i\leqslant N_G(N_1)$;$N_1\trianglelefteq H_1$,说明 $N_1\trianglelefteq G$, $N_1=1$ 且$|N|=p$,矛盾,所以 $N<P$。

因为 $\Phi(G)=1$, $C_G(N)=N$,所以 G 中存在极大子群 M,满足 $G=N\rtimes M$。显然,$P=N\rtimes(P\cap M)$ 且 $P\cap M\neq 1$。因为 $N\leqslant P\leqslant H_1$,又因为 H_1 是 p-超可解的且 $N\trianglelefteq H_1$,所以 N 中存在极大子群 N_1,满足 $N_1\trianglelefteq H_1$。现在假设 $E=N_1(P\cap M)$,可得$|P:E|=|N:N_1|=p$,即 E 为 P 的极大子群。由假设可知,G 中存在 σ-置换子群 S,使得 E 为 S 的 Hall σ_1-子群。由引理 2 可知 S/S_G 是 σ-幂零的。

若 $S_G\neq 1$,则有 $N\leqslant S_G\leqslant S$。因为 E 为 S 的 Hall σ_1-子群,所以 $N\leqslant E=N_1(P\cap M)$,从而 $N=N\cap E=N\cap N_1(P\cap M)=N_1$,矛盾,说明 $S_G=1$,所以 S 是 σ-幂零的。由引理 5,E 在 G 中是 σ-置换的,因此 $EH_i=H_iE$ 对于任意 $i>1$ 成立,从而 $EH_i\cap N=(E\cap N)(H_i\cap N)=E\cap N=N_1(P\cap M)\cap N=N_1$。对于任意 $i>1$,N_1 在 EH_i 中是正规的,所以 $H_i\leqslant N_G(N_1)$ 对于任意 $i>1$ 成立。由于 $N_1\trianglelefteq H_1$,说明 $N_1\trianglelefteq G$,所以 $N_1=1$ 且$|N|=p$,矛盾。于是命题为真。

命题 2 的证明。假设命题非真,设 G 是满足命题条件的阶数最小的反例。通过以下步骤得到矛盾。

步骤 1　G 为极小非 p-幂零群。

设 M 为 G 中任一极大子群,接下来证明 M 是 p-幂零群。事实上,若 p 不整除$|M|$,M 显然是 p-幂零群。若 p 整除$|M|$,设 M_p 为 M 的 Sylow p-子群,则 G 中存在元素 x,满足 $M_p\leqslant P^x$。因为 G 为具有 Sylow 型的 σ-完全群,所以 M 也为具有 Sylow 型的 σ-完全群,且 M 有完全 Hall σ-集 $\mathscr{H}_M=\{M_1,M_2,\cdots,M_t\}$,同时对于 G 中某个元素 y,有 $M_1\leqslant H_1^y$,显然,M_1 为 p-超可解群。对于 M_p 中的任意素数阶循环子群 H,$H^{x^{-1}}$也为 P 中的素数阶循环子群。当 M_p 为非交换 2-群且 $H\nleqslant Z_\infty(G)$,P 为非交换 2-群且 $H^{x^{-1}}\nleqslant Z_\infty(G)$时,对于 M_p 中的任意 4 阶循环子群 H,$H^{x^{-1}}$也为 P 中的 4 阶循环子群。

根据假设可得,$H^{x^{-1}}$在 G 中是 σ-置换嵌入的,H 在 G 中是 σ-置换嵌入的,从而对于 M 假设也成立,由 G 的构造可知,M 是 p-幂零群,所以 G 为极小非 p-幂零群。步骤 1 成立。

步骤 2　最终矛盾。

由步骤 1,结合引理 9 可得,$G=P\rtimes Q$,P 为 G 中的方次数为 p 或 4(若 P 为非交换 2-群)的 Sylow p-子群,Q 为 G 的 Sylow q-子群,其中 q 为某个不等于 p 的素数,$P/\Phi(P)$为 G-主因子,$Z_\infty(G)=\Phi(G)$并且 $\Phi(G)\cap P=\Phi(P)$。下面证明$|P/\Phi(P)|=p$。事实上,若 $q\in\sigma_1$,那么 G 为 σ_1-群,则 $G=H_1$ 为 p-超可解群。因为 $P/\Phi(P)$为 G-主因子,所以$|P/\Phi(P)|=p$。现在考虑 $q\notin\sigma_1$。设 $X/\Phi(P)$为 $P/\Phi(P)$的极小子群,设 $x\in X/\Phi(P)$,则有$|X/\Phi(P)|=p$,如果设 $L=\langle x\rangle$,则有 $X=L\Phi(P)$,且$|L|=p$ 或 4。若 $L\leqslant Z_\infty(G)$,则有 $L\leqslant Z_\infty(G)\cap P=\Phi(P)$,矛盾,所以 $L\nleqslant Z_\infty(G)$。根据假设,L 在 G 中是 σ-置换嵌入的,即 G 中存在 σ-置换子群 S,使得 L 为 S 的 Hall σ_1-子群,则 $SQ=QS$,从而 $SQ\cap P=(S\cap P)(Q\cap P)=S\cap P$, $S\cap P$ 在 SQ 中是正规的,即 $Q\leqslant N_G(S\cap P)$。$S\cap P$ 为 S 的 Sylow p-子群,L 也为 S 的 Sylow p-子群,并且 $L\leqslant S\cap P$, $L=S\cap P$,所以 $Q\leqslant N_G(S\cap P)=N_G(L)$。

因为 $P/\Phi(P)$为交换 p-群,所以 $L\Phi(P)/\Phi(P)=X/\Phi(P)$在 $P/\Phi(P)$中是正规的,即 $P/\Phi(P)\leqslant N_{G/\Phi(P)}(X/\Phi(P))$。因为 $Q\leqslant N_G(L)$,所以 $Q\Phi(P)/\Phi(P)\leqslant N_{G/\Phi(P)}(L\Phi(P)/\Phi(P))=N_{G/\Phi(P)}(X/\Phi(P))$,

进而 $X/\Phi(P) \trianglelefteq G/\Phi(P)$。由于 $P/\Phi(P)$ 为 G-主因子，因此 $P/\Phi(P)=X/\Phi(P)$，则 $|P/\Phi(P)|=p$。综上，在任何情况下，$|P/\Phi(P)|=p$ 都成立。

因为 $G/\Phi(P)/C_{G/\Phi(P)}(P/\Phi(P)) \lesssim \mathrm{Aut}(P/\Phi(P)) \cong C_{p-1}$，并且 p 为整除 $|G|$ 的最小素数，$G/\Phi(P)=C_{G/\Phi(P)}(P/\Phi(P))$，所以 $P/\Phi(P) \leqslant Z(G/\Phi(P))$，则 $Q\Phi(P)/\Phi(P) \trianglelefteq G/\Phi(P)$。因为 $Q\Phi(P)<QP=G$，由步骤 1 可得，$Q\Phi(P)$ 是 p-幂零群，所以 $Q \trianglelefteq Q\Phi(P)$，又因为 Q 为 $Q\Phi(P)$ 的 Sylow q-子群，所以 Q 为 $Q\Phi(P)$ 的特征子群。因为 $Q\Phi(P) \trianglelefteq G$，所以 $Q \trianglelefteq G$，矛盾。命题 2 为真。

定理 1 的证明。假设定理不正确，设 G 是满足定理条件的阶数最小的反例，通过以下步骤得到矛盾。

步骤 1 $O_{p'}(G)=1$ 从而 $O_{\sigma_1'}(G)=1$。

若 $O_{p'}(G) \neq 1$，考虑群 $\bar{G}=G/O_{p'}(G)$。显然，$\bar{G}$ 为具有 Sylow 型的 σ-完全群，$\widetilde{\mathscr{H}}=\{H_1O_{p'}(G)/O_{p'}(G), H_2O_{p'}(G)/O_{p'}(G), \cdots, H_tO_{p'}(G)/O_{p'}(G)\}$ 为 $\bar{G}$ 的完全 Hall σ-集，其中 $H_1O_{p'}(G)/O_{p'}(G) \cong H_1/H_1 \cap O_{p'}(G)$ 是 p-超可解群，$PO_{p'}(G)/O_{p'}(G)$ 是 $G/O_{p'}(G)$ 的一个 Sylow p-子群。群 $PO_{p'}(G)/O_{p'}(G)$ 中存在子群 $DO_{p'}(G)/O_{p'}(G)$，$1<|DO_{p'}(G)/O_{p'}(G)|<|PO_{p'}(G)/O_{p'}(G)|$。对于群 $PO_{p'}(G)/O_{p'}(G)$ 中的每一个阶数为 $|DO_{p'}(G)/O_{p'}(G)|$ 或 4(若 $|DO_{p'}(G)O_{p'}(G)|=2$ 并且 $PO_{p'}(G)O_{p'}(G)$ 是非交换的)的子群 $H/O_{p'}(G)$，有 $H=O_{p'}(G)(H\cap P)$，从而有 $|H/O_{p'}(G)|=|H\cap P|=|DO_{p'}(G)/O_{p'}(G)|=|D|$，或者 $|H/O_{p'}(G)|=|H\cap P|=4$(若 $|DO_{p'}(G)/O_{p'}(G)|=2$ 并且 $PO_{p'}(G)/O_{p'}(G)$ 是非交换的)。根据假设，$H\cap P$ 在 G 中是 σ-置换嵌入的。由引理 6(2)，$H/O_{p'}(G)=(H\cap P)O_{p'}(G)/O_{p'}(G)$ 在 $G/O_{p'}(G)$ 中是 σ-置换嵌入的，所以 $G/O_{p'}(G)$ 满足假设，由 G 的构造可知，$\bar{G}=G/O_{p'}(G)$ 是 p-幂零群，此时 G 也是 p-幂零群，矛盾，所以 $O_{p'}(G)=1$，显然，$O_{\sigma_1'}(G) \leqslant O_{p'}(G)=1$。步骤 1 成立。

步骤 2 若 L 为 G 的一个真子群，满足 $|L|_p>|D|$，那么 L 是 p-幂零的。

设 L_p 为 L 的一个 Sylow p-子群，H 为 L_p 的子群且满足 $|H|=|D|$，存在 $x\in G$，$H<L_p\leqslant P^x$。因为 $H^{x^{-1}}$ 在 G 中是 σ-置换嵌入的，所以 H 在 G 中是 σ-置换嵌入的。由引理 6(1)，H 在 L 中是 σ-置换嵌入的，若 $|D|=2$，由上述讨论同理可得，L_p 的每个 4 阶子群在 L 中是 σ-置换嵌入的。显然，L 为具有 Sylow 型的 σ-完全群，$\{L_1,\cdots,L_t\}$ 为 L 的完全 Hall σ-集，且对于某个 $y\in G$，$L_1\leqslant H_1^y$，所以 L_1 为阶被 p 整除的 p-超可解群，对于 L 假设成立，由 G 的构造可知 L 是 p-幂零群。步骤 2 成立。

步骤 3 $|P:D|>p$，由命题 1 可以得到。

步骤 4 $|D|>p$，由命题 2 可以得到。

步骤 5 $O_p(G)\neq 1$。

设 R 为 G 的极小正规子群，若 $PR<G$，由步骤 2 可知 PR 是 p-幂零群，因此 R 为初等交换 p-群或者 p'-群。由步骤 1，$O_{p'}(G)=1$，得到 R 为初等交换 p-群，即 $R\leqslant O_p(G)$，$O_p(G)\neq 1$。若 $G=PR$，则 $G/R\cong P/P\cap R$ 为 p-群，所以 G 存在一个极大子群 K 使得 $R\leqslant K$ 且 $|G:K|=p$。显然，由步骤 3 可知 $|K|_p>|D|$，所以由步骤 2，K 是 p-幂零的，所以 R 也是 p-幂零的。同理可得 $O_p(G)\neq 1$。步骤 5 成立。

步骤 6 设 N 为 G 的极小正规子群且满足 $N\leqslant O_p(G)$，那么 G/N 是 p-幂零的。

由步骤 5，$O_p(G)\neq 1$，G 中存在极小正规子群 N 且满足 $N\leqslant O_p(G)$，那么 $N\neq 1$。若 $|N|>|D|$，由引理 11，存在一个阶数为 $|D|$ 的 N 的子群 H，$H\trianglelefteq G$，与 N 的极小性矛盾，因此总可以假设 $|D|\geqslant |N|$。

(ⅰ) 假设 $|D|>|N|$。

若 $p>2$，或者 $p=2$ 且 $|D|>2|N|$，显然 G/N 满足定理假设。由 G 的构造可知 G/N 为 p-幂零群，假设 $p=2$ 且 $|D|=2|N|$。

如果 N 是循环群，那么 $|N|=2$ 且 $|D|=4$。对于 P 的任意一个阶数为 2 的子群 B，设 $V=BN$，若 $B=N$，则 B 在 G 中是 σ-置换嵌入的。若 $B\neq N$，则 $V=B\times N$ 为 4 阶的初等交换 2-群。由假设可知，V 在 G 中是 σ-置换嵌入的，因此 G 中存在 σ-置换子群 S，使得 V 为 S 的 Hall σ_1-子群。显然，$|S/N|_2=2$，所以 S/N 是 2-幂零的。设 K/N 为 S/N 的正规 Hall $2'$-子群，有 $K\trianglelefteq S$，$K=N\rtimes K_{2'}$，其中 $K_{2'}$ 为 K 的 Hall $2'$-子群。因为 $|N|=2$，可知 K 也是 2-幂零的，所以 $K_{2'}\trianglelefteq K$，$K_{2'}\vartriangleleft\vartriangleleft S$。由引理 2 可知，$S$ 在 G 中是 σ-次正规的，从而由引理 1(3) 可知，$K_{2'}$ 在 G 中是 σ-次正规的。因为 V 为 S 的 Hall σ_1-子群，所以 $K_{2'}$ 为 G 的 σ_1'-子群。由引理 1(4) 可知，$K_{2'}\leqslant O_{\sigma_1'}(G)=1$，因此 $K=N$ 是 2-群，且 S/N 也是 2-群，S 也是 2-群，所以 $V=S$ 且 V 在 G 中是 σ-置换的。对于任

意 $i>1$, $x\in G$,有 $VH_i^x=H_i^xV$, $NH_i^x=H_i^xN$,因为 $|VH_i^x:NH_i^x|=|V:N|=2$,所以 $NH_i^x\trianglelefteq VH_i^x$;因为 $|NH_i^x|_2=|N|=2$,所以 NH_i^x 是 2-幂零的,故 H_i^x 在 NH_i^x 中正规,H_i^x 是 NH_i^x 的特征子群,所以 $H_i^x\trianglelefteq VH_i^x$,对于任意 $i>1$, $x\in G$,有 $BH_i^x=H_i^xB$。因为 V 在 G 中是 σ-置换的,结合引理 2、1,对于任意 $x\in G$,有 $V\leqslant O_{\sigma_1}(G)\leqslant H_1^x$,对于任意 $x\in G$,有 $B\leqslant V\leqslant H_1^x$,即 $BH_1^x=H_1^x=H_1^xB$,这说明 B 在 G 中是 σ-置换的,P 的每个 2 阶极小子群在 G 中都是 σ-置换嵌入的,由命题 2 可知,G 是 p-幂零的,矛盾。说明 N 不是循环群。

设 H/N 为 P/N 的 2 阶子群,则有 $|H|=2|N|=|D|$,由假设可知,H 在 G 中是 σ-置换嵌入的。由引理 6(2),H/N 在 G/N 中是 σ-置换嵌入的,设 K/N 为 P/N 的 4 阶子群,则有 $|K|=4|N|=2|D|$,且 K 不是循环群。

若 $N\nleqslant\Phi(K)$,则存在 K 的极大子群 K_1,满足 $K=K_1N$。显然,$|K_1|=\dfrac{|K|}{2}=|D|$,由假设可知,K_1 在 G 中是 σ-置换嵌入的,由引理 6(2),$K/N=K_1N/N$ 在 G/N 中是 σ-置换嵌入的。

若 $N\leqslant\Phi(K)$,设 K_2 为 K 的任一极大子群,有 $N\leqslant K_2$ 并且 $|K_2|=\dfrac{|K|}{2}=2|N|=|D|$,所以 K_2 在 G 中是 σ-置换嵌入的,即存在 G 的 σ-置换子群 S,使得 K_2 为 S 的 Hall σ_1-子群,显然 $N\leqslant S_G$。若 $KS_G<G$,因为 $|KS_G|_2\geqslant|K|=2|D|$,由步骤 2 可知 KS_G 是 2-幂零的,所以 S_G 也是 2-幂零的。假设 L 为 S_G 的正规 Hall $2'$-子群,则 $L\lhd\lhd G$, $L\leqslant O_{2'}(G)=1$,说明 S_G 为 2-群。因为 K_2 为 S 的 Hall σ_1-子群,所以 $S_G\leqslant K_2$,从而 $N\leqslant S_G\leqslant K_2<K$。说明了 $S_G=K_2$ 或 $N=S_G$。

若 $S_G=K_2$,由于 K 不是循环群,可知存在 K 的极大子群 K_3 且 $K=K_2K_3$,显然 $|K_3|=\dfrac{|K|}{2}=|D|$。由假设可知,K_3 在 G 中是 σ-置换嵌入的,所以 $K=K_3K_2=K_3S_G$,又由引理 12,可知 K 在 G 中是 σ-置换嵌入的。

若 $N=S_G$,由引理 2 可知,$S/N=S/S_G$ 是 σ-幂零的。因为 K_2 为 S 的 Hall σ_1-子群,所以 K_2/N 也为 S/N 的 Hall σ_1-子群。由引理 4(2)可知,S/N 在 G/N 中是 σ-置换的,结合引理 5 可知,K_2/N 也在 G/N 中是 σ-置换的,由引理 4(3)可知,K_2 在 G 中是 σ-置换的。K 的每个极大子群都在 G 中是 σ-置换的。因为 K 不是循环群,存在 K 的极大子群 K_3 且 $K=K_2K_3$,所以 K_2 和 K_3 都在 G 中是 σ-置换的。由引理 4(4)可知,K 在 G 中也是 σ-置换的。

由引理 4(2)可知,K/N 在 G/N 中是 σ-置换的,这说明 G/N 满足命题 2 的假设,所以 G/N 是 p-幂零的。

(ⅱ) 假设 $|D|=|N|$。

根据步骤 4 中 $|D|>p$,可知 $|N|=|D|>p$,所以 N 不是循环群。设 L/N 为 P/N 的 p 阶子群,因为 N 不是循环群,所以 $N\nleqslant\Phi(L)$,存在 L 的极大子群 L_1,$N\nleqslant L_1$,从而 $L=L_1N$, $|L_1|=\dfrac{|L|}{p}=|N|=|D|$。因为 L_1 在 G 中是 σ-置换嵌入的,所以 $L/N=L_1N/N$ 在 G/N 中是 σ-置换嵌入的。若 $p>2$,由命题 2 可知 G/N 是 p-幂零的,不失一般性地,设 $p=2$,设 K/N 为 P/N 的 4 阶子群,下面证明 K/N 在 G/N 中是 σ-置换嵌入的。

此时,$|K|=4|N|$,设 T/N 为 K/N 的任一极大子群,因为 N 不是循环群,T 也不是循环群,所以 $N\nleqslant\Phi(T)$,存在 T 的极大子群 T_1,满足 $T=NT_1$, $|T_1|=\dfrac{|T|}{2}=|N|=|D|$。由假设可知,$T_1$ 在 G 中是 σ-置换嵌入的,由引理 12 可知,$T=T_1N$ 也在 G 中是 σ-置换嵌入的,即 G 中存在 σ-置换子群 S 且 T 为 S 的 Hall σ_1-子群,因此 $|S|_p=|T|=2|N|=2|D|>|D|$。显然,$S<G$,所以由步骤 2 可知 S 是 2-幂零的,从而 S 中存在正规 Hall $2'$-子群,记为 $S_{2'}$。由引理 2(1)可知 S 在 G 中是 σ-次正规的,因此 $S_{2'}$ 在 G 中是 σ-次正规的。由引理 1(4)可知,$S_{2'}\leqslant O_{\sigma_1'}(G)=1$,因此 S 是 2-群,即 $T=S$,T 在 G 中是 σ-置换的。由引理 4(2),可知 T/N 在 G/N 中是 σ-置换的,说明 K/N 的每个极大子群都在 G/N 中是 σ-置换的。

若 K/N 不是循环群,设 K_1/N 和 K_2/N 为 K/N 的任意两个不同极大子群,则 K_1/N 和 K_2/N 在 G/N 中是 σ-置换的,$K/N=K_1/N\cdot K_2/N$,由引理 4(4)可知 K/N 也在 G/N 中是 σ-置换的。

若 K/N 是循环群,则 $N\nleqslant\Phi(K)$,所以存在 K 的极大子群 K_3 且 $K=K_3N$。若 K_3 不是循环群,那么 K_3 中存在两个不同的极大子群 A 和 B,满足 $K_3=AB$。显然,$|A|=|B|=\dfrac{|K_3|}{2}=\dfrac{|K|}{4}=|N|=|D|$,从而 A 和 B 在 G 中都是 σ-置换嵌入的。$K/N=K_3N/N=ABN/N=AN/NBN/N$,又因为 K/N 是循环群,所以 $K/N=AN/N$ 或者

$K/N=BN/N$。不论哪一种情况，由引理6(2)，可得 K/N 在 G/N 中是 σ-置换嵌入的。假设 K_3 为循环群，因为 N 为非循环的初等交换 2-群，所以 $|N\cap K_3|=2$ 或 $|N\cap K_3|=1$。若 $|N\cap K_3|=1$，因为 $K=K_3N$ 且 $2=|K:K_3|=|N:N\cap K_3|$，所以 $|D|=|N|=2$，与步骤4矛盾，所以 $|N\cap K_3|=2$。由 $2=|K:K_3|=|N:N\cap K_3|$，可得 $|N|=|D|=4$。设 X 为 K_3 的一个极大子群，那么 X 为循环群且满足 $|X|=\dfrac{|K_3|}{2}=\dfrac{|K|}{4}=|D|$。根据假设，$G$ 中存在 σ-置换子群 S 且 X 为 S 的 Hall σ_1-子群，说明 S 中存在循环 Sylow 2-子群 X，S 是 2-幂零的，从而 S 中存在正规 Hall $2'$-子群，记为 $S_{2'}$，因为 S 在 G 中是 σ-次正规的，所以 $S_{2'}$ 也在 G 中是 σ-次正规的，所以 $S_{2'}\leqslant O_{\sigma_1}(G)=1$，说明 $S=X$ 为 2-群，所以 X 在 G 中是 σ-置换的。由引理3可知，$O^{\sigma_1}(G)\leqslant N_G(X)$，显然，$K_3\leqslant N_G(X)$。

若 $N_G(X)<G$，则有 $|N_G(X)|_p\geqslant|K_3|=2|D|$，由步骤2可知，$N_G(X)$ 是 2-幂零的，$O^{\sigma_1}(G)=L$ 也是 2-幂零的。设 L 中存在正规 Hall $2'$-子群，记为 $L_{2'}$，则 $L_{2'}\lhd\lhd G$，由步骤1可知 $L_{2'}\leqslant O_{2'}(G)=1$，因此 $L=O^{\sigma_1}(G)$ 为 2-群，且 G 为 σ_1-群，即 $G=H_1$，则 G 为 p-超可解群，从而 $|N|=p=2$，矛盾。若 $O^{\sigma_1}(G)=L=1$，那么 G 也为 σ_1-群，由上述讨论同理可得，矛盾，说明 $N_G(X)=G$，即 $X\trianglelefteq G$。

因为 N 为非循环群，所以 $X\cap N=1$。由于 K_3 为循环群，且 X 为 K_3 的一个4阶极大子群，$|K_3\cap N|=2$，因此 $K_3\cap N\leqslant X$，从而 $K_3\cap N\leqslant X\cap N=1$，和 $|K_3\cap N|=2$ 矛盾。这说明了在任意情况下 K/N 在 G/N 中都是 σ-置换嵌入的，由命题2可知 G/N 是 p-幂零的。步骤6成立。

步骤7　最终矛盾。

由步骤6可知，G/N 是 p-幂零的，因此 N 是 G 中唯一的极小正规子群并且有 $C_G(N)=N$，$N\not\leqslant\Phi(G)$，G 中存在极大子群 M 且 $G=N\rtimes M$，则 $M\cong G/N$，所以 M 也是 p-幂零的。设 $M_{p'}$ 为 M 的正规 Hall p'-子群，K 为 M 的 Sylow p-子群的极大子群，则有 $KM_{p'}\leqslant G$。假设 $T=NKM_{p'}$，则有 $T<G$，$|G:T|=p$，从而 T 为 G 的正规子群。显然，由步骤3，$|T|_p>|D|$，由步骤2，T 是 p-幂零的，则 $M_{p'}\trianglelefteq T$。又因为 $T\trianglelefteq G$，$M_{p'}$ 也是 T 的特征子群，$M_{p'}\trianglelefteq G$，所以 $M_{p'}\leqslant C_G(N)=N$，矛盾。于是定理1成立。

参考文献：

[1] SKIBA A N. On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups[J]. Journal of Algebra, 2015, 436:1-16.

[2] SKIBA A N. A generalization of a hall theorem[J]. Journal of Algebra and Its Applications, 2016, 15(5):207-214.

[3] KEGEL O H. Sylow-gruppen und subnormalteiler endlicher gruppen[J]. Mathematische Zeitschrift, 1962, 78:205-221.

[4] BALLESTER B A, PEDRAZA M C. Sufficient conditions for supersolubility of finite groups[J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 1998, 127(2):113-118.

[5] ASAAD M, HELIEL A A. On s-quasinormally embedded subgroups of finite groups[J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2001, 165(2):129-135.

[6] LI Yangming, WANG Yanming. On π-quasinormally embedded subgroups of finite groups[J]. Journal of Algebra, 2004, 281(1):109-123.

[7] GUO W B, SKIBA A N. Finite groups with given s-embedded and n-embedded subgroups[J]. Journal of Algebra, 2009, 321(10):2843-2860.

[8] LI Yangming, QIAO Shouhong, WANG Yanming. On weakly s-permutably embedded subgroups of finite groups[J]. Communications in Algebra, 2009, 37(3):1086-1097.

[9] GUO W B, SKIBA A N. Groups with maximal subgroups of sylow subgroups σ-permutably embedded[J]. Journal of Group Theory, 2017, 20(1):169-183.

[10] LI Yangming, WANG Yanming, WEI Huaquan. On p-nilpotency of finite groups with some subgroups π-quasinormally embedded[J]. Acta Mathematica Hungarica, 2005, 108:283-298.

[11] HUPPERT B. Endliche gruppen Ⅰ[M]. Berlin: Springer, 1967.

[12] DOERK K, HAWKES T O. Finite soluble groups[M]. Berlin: Walter De Gruyter, 1992.

[13] GUO Wenbin. The theory of classes of groups[M]. Beijing: Science Press-Kluwer Academic Publishers, 2000.

[14] KNYAGINA V N, MONAKHOV V S. On the π'-properties of a finite group possessing a hall π-subgroup[J]. Siberian Mathematical Journal, 2011, 52(2):234-243.

（编辑：陈丽萍）