山东大学学报(理学版)2025 年 5 月 第 60 卷 第 5 期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.60, No.5, 2025 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2025)05-0056-11 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.416

一类具有磁阻尼项的磁流体动力学方程的全局吸引子

吴辰龙,刘瑞宽*,亓子成
(西南石油大学理学院, 四川 成都 610500)

摘要:讨论了一类具有磁阻尼项的二维不可压缩磁流体动力学模型解的长时间渐近行为,证明了有界吸收集的存在性,利用 C-条件方法,得到了该模型在具有较高正则性的相空间上全局吸引子的存在性。
关键词:磁流体动力学;磁阻尼项;C-条件;全局吸引子
中图分类号:O175.29 **文献标志码**:A
引用格式:吴辰龙,刘瑞宽,亓子成.一类具有磁阻尼项的磁流体动力学方程的全局吸引子[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(5):56-66,73.

Global attractors for a class of magneto-hydrodynamic equations with magnetic damping terms

WU Chenlong, LIU Ruikuan*, QI Zicheng
(School of Science, Southwest Petroleum University, Chengdu 610500, Sichuan, China)

Abstract: The long time asymptotic behavior of solutions of a class of two dimensional incompressible magnetohydrodynamic equations with magnetic damping term is discussed. By proving the existence of the bounded absorbing set and using the C-condition method, the existence of the global attractors on the phase space with higher regularity is obtained.
Key words: magneto-hydrodynamics; magnetic damping term; the C-condition; global attractors

0 引言

基于 Navier-Stokes 方程、Maxwell 方程与 Coulomb 规范,Liu 等[1]提出了一类不可压缩磁流体动力学模型

$$\begin{cases} u_t+u\cdot\nabla u-\nu\Delta u+\dfrac{1}{\rho_0}\nabla p-\dfrac{\rho_{\mathrm{e}}}{\rho_0}u\times\operatorname{curl}A=f, & (t,x)\in[0,T)\times\Omega, \\ A_{tt}-\dfrac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\Delta A-\dfrac{\rho_{\mathrm{e}}}{\varepsilon_0\mu_0}u+\nabla\Phi=0, & (t,x)\in[0,T)\times\Omega, \\ \nabla\cdot u=0,\ \nabla\cdot A=0, & (t,x)\in[0,T)\times\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

其中: $T>0$; Ω 为 $\mathbf{R}^n(n=2,3)$ 中的有界区域;$u(t,x)\in\mathbf{R}^n$、$p(t,x)\in\mathbf{R}$、$f(x)\in\mathbf{R}^n$ 分别表示导电流体的速度场、压强与外力;$A(t,x)\in\mathbf{R}^n$ 代表磁势,$\Phi(t,x)=\partial A_0/\partial t\in\mathbf{R}$,$A_0$ 为标量电磁势;ν、ρ_0、ρ_{e}、ε_0、μ_0 均为正常数,分别代表运动粘性系数、质量密度、等效电荷密度、真空介电常数与真空磁导率。文献[1]给出了模型(1)对应的初边值问题整体弱解的存在性,文献[2]得到了该模型在二维有界区域上整体强解的存在性与唯一性,以及三维有界区域上解的部分正则性结果。

收稿日期:2023-09-26; **网络出版时间**:2024-05-09
基金项目:四川省自然科学基金资助项目(2022NSFSC0529); 南充市-西南石油大学市校科技战略合作专项资金资助项目(23XNSYJG0005)
第一作者:吴辰龙(1998—),男,硕士研究生,研究方向为偏微分方程适定性问题. E-mali:wuchenlong9810@163.com
* **通信作者**:刘瑞宽(1989—),男,讲师,硕士生导师,博士,研究方向为非线性微分方程及其应用. E-mali:liuruikuan2008@163.com

当模型(1)中磁势方向具有强阻尼效应并考虑非线性项的影响时,其动力学方程为

$$\begin{cases} u_t+u\cdot\nabla u-\nu\Delta u+\dfrac{1}{\rho_0}\nabla p-\dfrac{\rho_e}{\rho_0}u\times\operatorname{curl}A=f, \\ A_{tt}-\alpha\Delta A_t+g(A)-\dfrac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\Delta A-\dfrac{\rho_e}{\varepsilon_0\mu_0}u+\nabla\Phi=0, \\ \nabla\cdot u=0,\ \nabla\cdot A=0, \end{cases} \tag{2}$$

其中,阻尼系数 $\alpha>0$, $g=(g_1(A_1),g_2(A_2)):\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$,为非线性项。本文讨论系统(2)在初边值条件

$$u(0,x)=\varphi(x),\quad A(0,x)=\psi(x),\quad A_t(0,x)=\eta(x),\quad x\in\Omega\subset\mathbf{R}^2,$$
$$u(t,x)=0,\quad A(t,x)=0,\quad (t,x)\in[0,\infty)\times\partial\Omega \tag{3}$$

下解的整体适定性以及全局吸引子的存在性。

经典的全局吸引子存在性定理所要求的半群一致紧性条件在具体的应用中需要更高一阶的一致有界正则性估计。例如,Temam[3] 利用一致紧性条件证明了经典的磁流体动力学方程全局吸引子的存在性;Lukaszewicz[4] 通过在空间 H^1 中获得解的一致性估计,得到了二维微极流方程的 L^2-全局吸引子。然而对于大多数非线性耗散方程,当要求全局吸引子的正则性足够高时,得到解的更高阶正则性估计并不容易。一个比较好的改进是,Ma 等[5]将一致紧条件减弱成 C-条件。与一致紧条件相比,C-条件无需对解作更高阶的正则性估计,相关的拓展与应用可参见文献[6-13]。例如,Zhong 等[7]给出了范数到弱(norm-to-weak)连续半群情形下全局吸引子的 C-条件方法,并通过该方法得到了一类具有任意阶多项式增长的非线性反应扩散方程的全局吸引子;Chen 等[9]通过验证 C-条件证明了二维自治型微极流方程 H^2-全局吸引子的存在性;文献[10-11]进一步将 C-条件应用到了非自治无穷维动力系统拉回吸引子的存在性问题上;Sun 等[13]利用 C-条件方法讨论了二维非自治型微极流方程的拉回渐近行为。此外,其他有关经典的磁流体动力学模型渐近行为的研究,可参见文献[14-17]。

受上述文献启发,本文将利用 C-条件方法讨论初边值问题(2)—(3)在具有较高正则性的相空间中全局吸引子的存在性问题。

1　预备知识

定义函数空间

$$C_\sigma^\infty(\Omega;\mathbf{R}^2)=\{u\in C_0^\infty(\Omega;\mathbf{R}^2);\ \operatorname{div}u=0\},$$

并用 Y、Z 分别表示空间 $C_\sigma^\infty(\Omega;\mathbf{R}^2)$ 在 $L^2(\Omega;\mathbf{R}^2)$、$H_0^1(\Omega;\mathbf{R}^2)$ 中的闭包。记 $H=H^2(\Omega;\mathbf{R}^2)\cap Z$,引入如下记号

$$\|\cdot\|_Y:=\|\cdot\|,\quad \|\cdot\|_{L^s(\Omega;\mathbf{R}^2)}:=\|\cdot\|_s(1\leqslant s\leqslant\infty,\ s\neq 2)。$$

令 P 为 $L^2(\Omega;\mathbf{R}^2)$ 到 Y 的正交投影算子,λ_1 表示算子 $-P\Delta$ 在齐次 Dirichlet 边界下的第一特征值。在 $\mathbf{R}^2$ 中,$u\times\operatorname{curl}A$ 为 $u\times\operatorname{curl}A=(\partial A_2/\partial x_1-\partial A_1/\partial x_2)(u_2,-u_1)$。全文始终假设非线性项 $g(x)$ 满足如下条件:

(H_1) $g(\cdot)$ 是 C^1 映射,定义 $G(A):=\int_0^{A_1}g_1(x_1)\,\mathrm{d}x_1+\int_0^{A_2}g_2(x_2)\,\mathrm{d}x_2$,对任意的 $A\in Y$,存在 $0<\lambda'\leqslant\lambda_1$, $\beta>0$,使得

$$-\frac{\lambda'}{2\varepsilon_0\mu_0}\|A\|^2-\beta|\Omega|\leqslant\int_\Omega G(A)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega g(A)\cdot A\,\mathrm{d}x+\frac{\lambda'}{2\varepsilon_0\mu_0}\|A\|^2,$$

其中 $|\Omega|$ 表示 Ω 的测度;

(H_2) 对任意的 $x\in\mathbf{R}^2$, $|\nabla g(x)|\leqslant C(1+|x|^s)$, $s\geqslant 0$;

(H_3) 对任意的 $u\in Z$,有 $g(u)\in Y$,且 $g:Z\to Y$ 是一致紧算子。

下面给出初边值问题(2)—(3)解的存在性与唯一性定理。

引理 1　(1) 若 $f,\varphi,\eta\in Y$, $\psi\in Z$,则初边值问题(2)—(3)存在唯一的全局弱解

$$u\in L_{\mathrm{loc}}^2(0,\infty;Z)\cap L_{\mathrm{loc}}^\infty(0,\infty;Y),\quad A\in L_{\mathrm{loc}}^\infty(0,\infty;Z),$$

$$A_t\in L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(0,\infty;Y)\cap L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;Z)。$$

(2) 若 $f\in Y$, $\varphi,\psi\in H$, $\eta\in Z$,则初边值问题(2)—(3)存在唯一的全局强解

$$u\in L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(0,\infty;H),\quad u_t\in L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(0,\infty;Y)\cap L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;Z),$$
$$A\in L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(0,\infty;H),\quad A_t\in L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(0,\infty;Z)\cap L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;H),$$
$$A_{tt}\in L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;Y)。$$

证明 利用标准的 Galerkin 方法进行证明,具体过程与文献[2]类似,这里不再赘述。

定义 1[8] 若 Banach 空间 X 上的一族连续映射 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 满足性质

$$\begin{cases} S:[0,\infty)\times X\to X \text{ 是连续的},\\ S(0)=I \text{ 为 } X \text{ 上的恒等算子},\\ S(t+s)=S(t)S(s),\quad \forall\, t,s\geqslant 0,\end{cases}$$

则称 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 为 X 上的算子半群。

定义 2[8] 若集合 $\Sigma\subset X$ 满足 $S(t)\Sigma=\Sigma$, $\forall\, t\geqslant 0$,则称 Σ 为半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 的不变集;进一步地,若 Σ 为紧集,且对 X 上任意的有界集 B,满足

$$\lim_{t\to\infty}\inf_{v\in\Sigma}\|S(t)u_0-v\|_X=0,\quad \forall\, u_0\in B,$$

则称 Σ 为 X 上的一个全局吸引子。

定义 3[8] 令 $D\subset X$ 是有界集,若对任意有界集 $B\subset X$,存在时间 $t_0(B)>0$,使得当 $t\geqslant t_0(B)$ 时,有 $S(t)B\subset D$,则称 D 是 X 内关于半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 的一个有界吸收集。

定义 4[5] 令 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是定义在 X 上的一个算子半群,若对于任意有界集 $B\subset X$ 和 $\varepsilon>0$,存在 $t(B)>0$ 和一个有限维子空间 $X_n\subset X$,使得 $\{\|P_nS(t)B\|_X\}$ 是有界的,并且

$$\|(I-P_n)S(t)x\|_X<\varepsilon,\quad \forall\, t\geqslant t_B,\quad x\in B,$$

其中 P_n 为 X 到 X_n 规范投影算子,则称半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 满足 C-条件。

引理 2[5] 令 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是定义在 X 上的算子半群,存在一个有界吸收集,并且 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 满足 C-条件,则 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 在 X 中存在一个全局吸引子 $\mathscr{A}$,且 $\mathscr{A}$ 在 X 的范数下,吸引 X 中的任意有界集。

2 全局吸引子的存在性

利用引理 1,定义初边值问题(2)—(3)所生成的解半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 为

$$S(t)(\varphi(x),\psi(x),\eta(x)):=(u(t,x),A(t,x),A_t(t,x)),\quad \forall\,\varphi,\psi\in H,\quad \eta\in Z,$$

后续将证明半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 在 $[0,\infty)\times H\times H\times Z$ 上是连续的。

引理 3 令 B 为空间 $Y\times Z\times Y$ 中的任意有界集,并假设阻尼系数 $\alpha>\dfrac{\rho_{\mathrm{e}}^2}{\nu\varepsilon_0^2\mu_0^2\lambda_1^2}$,则当外力 $f(x)\in Y$,初值 $(\varphi(x),\psi(x),\eta(x))\in B$ 时,存在 $t_1(B)>0$,使得初边值问题(2)—(3)的解满足一致有界性估计

$$\|u(t)\|^2+\|\nabla A(t)\|^2+\|A_t(t)\|^2\leqslant R_1^2,\quad \forall\, t>t_1(B),$$

且常数 R_1 与 B 无关。

证明 将系统(2)的第 1 个方程与 u 作内积,注意到 $\int_\Omega u\cdot\nabla u\cdot u\mathrm{d}x=0$, $\int_\Omega u\times\mathrm{curl}\,A\cdot u\mathrm{d}x=0$,则有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega|u|^2\mathrm{d}x+\nu\|\nabla u\|^2=\int_\Omega f\cdot u\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_\Omega|u|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_\Omega|f|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}。$$

利用 Poincaré 不等式,得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega|u|^2\mathrm{d}x+\nu\|\nabla u\|^2\leqslant\frac{\nu}{4}\|\nabla u\|^2+\frac{1}{\nu\lambda_1}\|f\|^2,$$

即有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega|u|^2\mathrm{d}x+\frac{3\nu}{4}\|\nabla u\|^2\leqslant\frac{1}{\nu\lambda_1}\|f\|^2。\tag{4}$$

将系统(2)的第 2 个方程与 $\Lambda=A_t+\delta A(\delta>0)$ 作内积,有

$$\frac{\rho_e}{\varepsilon_0\mu_0}\int_\Omega u\cdot\Lambda\mathrm{d}x-\delta^2\int_\Omega A\cdot\Lambda\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega|\Lambda|^2\mathrm{d}x-\delta\int_\Omega|\Lambda|^2\mathrm{d}x+\alpha\int_\Omega|\nabla A_t|^2\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega G(A)\mathrm{d}x$$
$$+\frac{1}{2\varepsilon_0\mu_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega|\nabla A|^2\mathrm{d}x+\frac{\delta}{\varepsilon_0\mu_0}\int_\Omega|\nabla A|^2\mathrm{d}x+\delta\int_\Omega g(A)\cdot A\mathrm{d}x+\frac{\alpha\delta}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega|\nabla A|^2\mathrm{d}x。$$

令

$$E_1(t):=\|\Lambda\|^2+\left(\alpha\delta+\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\right)\|\nabla A\|^2+2\left(\int_\Omega G(A)\mathrm{d}x+\beta|\Omega|\right),$$

由假设(H_1),显然有 $E_1(t)\geqslant0$,于是

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}E_1(t)}{\mathrm{d}t}+\alpha\|\nabla A_t\|^2-\delta\|\Lambda\|^2+\frac{\delta}{\varepsilon_0\mu_0}\|\nabla A\|^2+\delta^2\int_\Omega A\cdot\Lambda\mathrm{d}x+\delta\int_\Omega g(A)\cdot A\mathrm{d}x=\frac{\rho_e}{\varepsilon_0\mu_0}\int_\Omega u\cdot\Lambda\mathrm{d}x,$$

同时

$$\|\nabla A_t\|^2=\|\nabla\Lambda-\delta\nabla A\|^2\geqslant\frac{\lambda_1}{2}\|\Lambda\|^2-\delta^2\|\nabla A\|^2,$$

这里用到了不等式 $|a-b|^2\geqslant\frac{1}{2}|a|^2-|b|^2$。结合假设($H_1$),利用 Poincaré 不等式与 Hölder 不等式,得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_1(t)+\left(\frac{\alpha\lambda_1}{2}-\delta\right)\|\Lambda\|^2+\delta\left(\frac{1}{2\varepsilon_0\mu_0}-\alpha\delta\right)\|\nabla A\|^2+\delta\int_\Omega G(A)\mathrm{d}x$$
$$\leqslant-\delta^2\int_\Omega A\cdot\Lambda\mathrm{d}x+\frac{\rho_e}{\varepsilon_0\mu_0}\int_\Omega u\cdot\Lambda\mathrm{d}x\leqslant\frac{\delta^2}{2\lambda_1}\|\nabla A\|^2+\frac{\delta^2}{2}\|\Lambda\|^2+\frac{\rho_e}{\varepsilon_0\mu_0}\|u\|\ \|\Lambda\|。$$

对上式利用 Young 不等式,直接得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_1(t)+\left(\frac{\alpha\lambda_1}{2}-\frac{\rho_e^2}{2\nu\varepsilon_0^2\mu_0^2\lambda_1}-\frac{\delta^2}{2}-\delta\right)\|\Lambda\|^2+\delta\left(\frac{1}{2\varepsilon_0\mu_0}-\frac{2\alpha\delta\lambda_1+\delta}{2\lambda_1}\right)\|\nabla A\|^2$$
$$+\delta\int_\Omega G(A)\mathrm{d}x\leqslant\frac{\nu}{2}\|\nabla u\|^2。\tag{5}$$

将式(4)与式(5)相加,则当 $\delta>0$ 且足够小,且 $\alpha>\frac{\rho_e^2}{\nu\varepsilon_0^2\mu_0^2\lambda_1^2}$ 时,存在常数 $C_1,C_2>0$,使得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_2(t)+C_1E_2(t)\leqslant C_2(\|f\|^2+|\Omega|),\tag{6}$$

其中 $E_2(t):=E_1(t)+\|u(t)\|^2$。对式(6)利用 Gronwall 不等式,有

$$E_2(t)\leqslant\mathrm{e}^{-C_1t}E_2(0)+C_2(\|f\|^2+|\Omega|)(1-\mathrm{e}^{-C_1t})。$$

根据假设(H_1),显然有

$$E_2(t)\geqslant\|u\|^2+\|\Lambda\|^2+\left(\alpha\delta+\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\right)\|\nabla A\|^2-\frac{\lambda'}{\varepsilon_0\mu_0\lambda_1}\|\nabla A\|^2\geqslant\|u\|^2+\|\Lambda\|^2+\alpha\delta\|\nabla A\|^2$$
$$\geqslant\|u\|^2+\frac{1}{2}\|A_t\|^2+\delta\left(\alpha-\frac{\delta}{\lambda_1}\right)\|\nabla A\|^2。$$

注意到 $E_2(0)\leqslant C(\|\varphi\|^2+\|\eta\|^2+\|\nabla\psi\|^2+|\Omega|)$,当 $\delta>0$ 足够小时,存在常数 $C_3>0$,使得

$$\|u\|^2+\|\nabla A\|^2+\|A_t\|^2\leqslant C_3((\|\varphi\|^2+\|\nabla\psi\|^2+\|\eta\|^2+|\Omega|)\mathrm{e}^{-C_1t}+(\|f\|^2+|\Omega|)(1-\mathrm{e}^{-C_1t}))。\tag{7}$$

由式(7)可知,对任意的 $(\varphi,\psi,\eta)\in B\subset Y\times Z\times Y$,存在 $t_1(B)>0$,使得当 $t>t_1(B)$ 时,

$$\|u\|^2+\|A_t\|^2+\|\nabla A\|^2\leqslant2C_3(\|f\|^2+|\Omega|)。$$

令 $R_1^2:=2C_3(\|f\|^2+|\Omega|)$,即有

$$\|u(t)\|^2+\|\nabla A(t)\|^2+\|A_t(t)\|^2\leqslant R_1^2,\quad\forall t>t(B),\tag{8}$$

完成了引理 3 的证明。

引理 4　在引理 3 的条件下,若进一步假设 B 为 $H\times H\times Z$ 中的任意有界集,阻尼系数 $\alpha>\frac{\rho_e^2}{\nu\varepsilon_0^2\mu_0^2\lambda}$(其中 λ

为不等式 $\lambda\|\nabla A\|^2\leqslant\|\Delta A\|^2$ 中的控制常数)，则当外力 $f(x)\in Y$，初值 $(\varphi(x),\psi(x),\eta(x))\in B$ 时，存在 $t_2(B)>0$，使得初边值问题(2)—(3)的解满足一致有界性估计

$$\|\nabla u(t)\|^2+\|\nabla A_t(t)\|^2+\|\Delta A(t)\|^2\leqslant R_2^2,\quad \forall\, t>t_2(B),$$

且常数 R_2 与 B 无关。

证明 将系统(2)的第1个方程与 $-\Delta u$ 作内积，有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\nu\int_\Omega|\Delta u|^2\mathrm{d}x=\int_\Omega u\cdot\nabla u\cdot\Delta u\mathrm{d}x+\frac{\rho_\mathrm{e}}{\rho_0}\int_\Omega u\times\mathrm{curl}\,A\cdot\Delta u\mathrm{d}x-\int_\Omega f\cdot\Delta u\mathrm{d}x$$

$$=:J_1+J_2+J_3。$$

利用 Agmon 不等式、Hölder 不等式以及 Young 不等式，得

$$J_1\leqslant\|u\|_\infty\|\nabla u\|\,\|\Delta u\|\leqslant C\|u\|^{1/2}\|\nabla u\|\,\|\Delta u\|^{3/2}\leqslant\frac{\nu}{6}\|\Delta u\|^2+C(\nu)\|u\|^2\|\nabla u\|^4,$$

$$J_2\leqslant\|u\|_\infty\|\nabla A\|\,\|\Delta u\|\leqslant C\|u\|^{1/2}\|\nabla A\|\,\|\Delta u\|^{3/2}\leqslant\frac{\nu}{6}\|\Delta u\|^2+C(\nu)\|u\|^2\|\nabla A\|^4,$$

$$J_3\leqslant\frac{\nu}{6}\|\Delta u\|^2+C(\nu)\|f\|^2。$$

即有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\nu\|\Delta u\|^2\leqslant C(\nu)\|f\|^2+C(\nu)\|u\|^2(\|\nabla u\|^4+\|\nabla A\|^4)。\tag{9}$$

令

$$\begin{cases}y(t):=\|\nabla u\|^2,\\ g(t):=C(\nu)\|u\|^2\|\nabla u\|^2,\\ h(t):=C(\nu)(\|f\|^2+\|u\|^2\|\nabla A\|^4),\end{cases}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant g(t)y(t)+h(t)。\tag{10}$$

当 $t>t_1(B)$，$r>0$ 时，对式(4)在区间 $[t,t+r]$ 上积分，并结合引理3，得

$$\int_t^{t+r}\|\nabla u(\tau)\|^2\mathrm{d}\tau\leqslant C(\|u(t)\|^2+r\|f\|^2)\leqslant C(R_1^2+r\|f\|^2),$$

从而

$$\int_t^{t+r}g(\tau)\mathrm{d}\tau\leqslant CR_1^2(R_1^2+r\|f\|^2)=:C_4,$$

$$\int_t^{t+r}h(\tau)\mathrm{d}\tau\leqslant Cr(\|f\|^2+R_1^6)=:C_5,$$

$$\int_t^{t+r}y(\tau)\mathrm{d}\tau\leqslant C(r\|f\|^2+R_1^2)=:C_6。$$

对式(10)利用一致 Gronwall 引理[3]，得到

$$y(t+r)\leqslant\left(\frac{C_6}{r}+C_5\right)\mathrm{e}^{C_4}=:C_7,\quad\forall\, t>t_1(B),\quad r>0。\tag{11}$$

将系统(2)的第2个方程与 $-\Delta\Lambda=-\Delta A_t-\delta\Delta A$ 作内积，有

$$\frac{\rho_\mathrm{e}}{\varepsilon_0\mu_0}\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla\Lambda\mathrm{d}x+\int_\Omega g(A)\cdot\Delta A_t\mathrm{d}x+\delta\int_\Omega g(A)\cdot\Delta A\mathrm{d}x-\delta^2\int_\Omega\nabla A\cdot\nabla\Lambda\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla\Lambda(t)\|^2+\left(\alpha\delta+\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\right)\|\Delta A(t)\|^2\right)-\delta\|\nabla\Lambda(t)\|^2+\alpha\|\Delta A_t(t)\|^2+\frac{\delta}{\varepsilon_0\mu_0}\|\Delta A(t)\|^2。$$

结合不等式 $\lambda\|\nabla A\|^2\leqslant\|\Delta A\|^2$，有 $\alpha\|\Delta A_t\|^2=\alpha\|\Delta\Lambda-\delta\Delta A\|^2\geqslant\dfrac{\alpha\lambda}{2}\|\nabla\Lambda\|^2-\alpha\delta^2\|\Delta A\|^2$。令 $E_3(t):=$

$\|\nabla\Lambda(t)\|^2+\left(\alpha\delta+\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\right)\|\Delta A(t)\|^2$，并利用 Young 不等式，得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}E_3(t)}{\mathrm{d}t}+\left(\frac{(\alpha-\theta)\lambda}{2}-\delta-\frac{\delta^2}{2}\right)\|\nabla\Lambda\|^2+\delta\left(\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}-\alpha\delta-\frac{\delta}{2\lambda}-\theta\right)\|\Delta A\|^2$$

$$\leqslant\frac{\nu}{2}\|\nabla u\|^2+\frac{\rho_{\mathrm{e}}^2}{2\varepsilon_0^2\mu_0^2}\|\nabla\Lambda\|^2+C(\theta,\delta)\|g(A)\|^2,\tag{12}$$

这里 $\delta,\theta>0$ 可以任意小，根据假设(H_2)、(H_3)与 Sobolev 嵌入定理，发现

$$\|g(A)\|^2\leqslant C(\|A\|_{2s+2}^{2s+2}+\|A\|^2+1)\leqslant C(\|\nabla A\|^{2s+2}+\|\nabla A\|^2+1),\tag{13}$$

将式(13)代入式(12)，并与式(4)相加，则当 δ 与 θ 足够小，且 $\alpha>\frac{\rho_{\mathrm{e}}^2}{\nu\varepsilon_0^2\mu_0^2\lambda}$时，存在常数 $C_8,C_9>0$，使得

$$\frac{\mathrm{d}E_4(t)}{\mathrm{d}t}+C_8E_4(t)\leqslant C_9(\|\nabla A\|^{2s+2}+\|\nabla A\|^2+\|f\|^2)+C_9,\tag{14}$$

其中$E_4(t):=\|u(t)\|^2+E_3(t)$。对式(14)应用 Gronwall 不等式，并结合式(7)，得

$$E_4(t)\leqslant\mathrm{e}^{-C_8t}E_4(0)+C_{10}\mathrm{e}^{-C_8t}E_5(t)+C_{10}(\|f\|^{2s+2}+\|f\|^2+|\Omega|^{s+1}+|\Omega|+1)(1-\mathrm{e}^{-C_8t}),$$

其中

$$E_0:=\|\varphi\|^2+\|\nabla\psi\|^2+\|\eta\|^2+|\Omega|,\quad E_5(t):=E_0^{s+1}\int_0^t\mathrm{e}^{-(s+1)C_1\tau}\mathrm{e}^{C_8\tau}\mathrm{d}\tau+E_0\int_0^t\mathrm{e}^{-C_1\tau}\mathrm{e}^{C_8\tau}\mathrm{d}\tau。$$

注意到 $\delta>0$ 可以任意小，于是

$$E_4(t)\geqslant\|u(t)\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla A_t\|^2+\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\|\Delta A\|^2+\delta\left(\alpha-\frac{\delta}{\lambda}\right)\|\Delta A\|^2\geqslant\|u(t)\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla A_t\|^2+\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\|\Delta A\|^2,$$

则存在常数 $C_{11}>0$，使得

$$\|\nabla A_t\|^2+\|\Delta A\|^2\leqslant C_{11}(\mathrm{e}^{-C_8t}E_4(0)+\mathrm{e}^{-C_8t}E_5(t)+(\|f\|^{2s+2}+\|f\|^2+|\Omega|^{s+1}+|\Omega|+1)(1-\mathrm{e}^{-C_8t}))。$$

令 $R_2^2:=2C_{11}(\|f\|^{2s+2}+\|f\|^2+|\Omega|^{s+1}+|\Omega|+1)+C_7$，并注意到 $\lim\limits_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-C_8t}E_5(t)=0$，则对任意的$(\varphi,\psi,\eta)\in B\subset H\times H\times Z$，存在 $t_2(B)>t_1(B)+r>0$，使得当 $t>t_2(B)$时，

$$\|\nabla u(t)\|^2+\|\Delta A(t)\|^2+\|\nabla A_t(t)\|^2\leqslant R_2^2,\tag{15}$$

从而引理 4 成立。

引理 5　在引理 4 的前提下，初边值问题(2)—(3)生成的解半群$\{S(t)\}_{t\geqslant0}$在相空间 $H\times H\times Z$ 中存在有界吸收集 $\mathscr{B}$。

证明　对系统(2)的第 1 个方程关于 t 求导，得

$$u_{tt}-\nu\Delta u_t+u_t\cdot\nabla u+u\cdot\nabla u_t-\frac{\rho_{\mathrm{e}}}{\rho_0}u_t\times\operatorname{curl}A-\frac{\rho_{\mathrm{e}}}{\rho_0}u\times\operatorname{curl}A_t+\frac{1}{\rho_0}\nabla p_t=0。\tag{16}$$

将方程(16)与 u_t 作内积，并利用 Hölder 不等式、Gagliardo-Nirenberg 不等式与 Young 不等式，得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_t\|^2+\nu\|\nabla u_t\|^2=-\int_\Omega u_t\cdot\nabla u_t\cdot u\mathrm{d}x+\frac{\rho_{\mathrm{e}}}{\rho_0}\int_\Omega u\times\operatorname{curl}A_t\cdot u_t\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C(\|u\|_4\|u_t\|_4\|\nabla u_t\|+\|u\|_4\|u_t\|_4\|\nabla A_t\|)$$

$$\leqslant C(\|u_t\|^{1/2}\|u\|^{1/2}\|\nabla u\|^{1/2}\|\nabla u_t\|^{3/2}+\|u\|^{1/2}\|\nabla u\|^{1/2}\|u_t\|^{1/2}\|\nabla u_t\|^{1/2}\|\nabla A_t\|)$$

$$\leqslant C(\|u_t\|^{1/2}\|u\|^{1/2}\|\nabla u\|^{1/2}\|\nabla u_t\|^{3/2}+\|u\|^{1/2}\|\nabla u\|^{1/2}\|\nabla u_t\|\ \|\nabla A_t\|)$$

$$\leqslant\frac{\nu}{2}\|\nabla u_t\|^2+C(\nu)(\|u_t\|^2\|u\|^2\|\nabla u\|^2+\|\nabla A_t\|^2\|u\|\ \|\nabla u\|)。\tag{17}$$

当 $t>t_2(B)$时，对式(17)在区间$[\bar{s},t+1](t<\bar{s}<t+1)$上应用 Gronwall 不等式，有

$$\|u_t(t+1)\|^2\leqslant\mathrm{e}^{C\int_t^{t+1}\|\nabla u\|^2\|u\|^2\mathrm{d}\tau}\left(\|u_t(\bar{s})\|^2+C\int_t^{t+1}\|\nabla A_t\|^2\|\nabla u\|\ \|u\|\mathrm{d}\tau\right)$$

$$\leqslant\mathrm{e}^{CR_1^2R_2^2}(\|u_t(\bar{s})\|^2+CR_1R_2^3)。$$

将上述不等式在$[t,t+1]$上关于$\bar{s}$积分，则有

$$\begin{aligned}\|u_t(t+1)\|^2&\leqslant e^{CR_1^2R_2^2}\left(\int_t^{t+1}\|u_t(\bar{s})\|^2\mathrm{d}\bar{s}+CR_1R_2^3\right)\\&\leqslant C_{12}\int_t^{t+1}(\|f\|^2+\|\Delta u\|^2+\|u\cdot\nabla u\|^2+\|u\times\operatorname{curl}A\|^2)\mathrm{d}\bar{s}+C_{13}\\&\leqslant C_{14}\int_t^{t+1}(\|f\|^2+\|\Delta u\|^2+\|u\|\ \|\nabla u\|^2\ \|\Delta u\|+\|u\|\ \|\nabla u\|\ \|\nabla A\|\ \|\Delta A\|)\mathrm{d}\bar{s}+C_{13}。\end{aligned}\tag{18}$$

对式(9)在$[t,t+1]$上积分，得到

$$\int_t^{t+1}\|\Delta u\|^2\mathrm{d}\bar{s}\leqslant C\left(\|\nabla u(t)\|^2+\int_t^{t+1}(\|f\|^2+\|u(\bar{s})\|^2(\|\nabla u(\bar{s})\|^4+\|\nabla A(\bar{s})\|^4)\mathrm{d}\bar{s}\right)。\tag{19}$$

将式(19)代入式(18)并注意到$t>t_2(B)$，发现存在常数$C_{15}>0$，使得

$$\|u_t(t+1)\|^2\leqslant C_{15}。\tag{20}$$

将系统(2)的第1个方程在空间Y中取范数，得

$$\begin{aligned}\|\Delta u\|&\leqslant-\|\Delta u\|+2\|u_t\|+2\|u\cdot\nabla u\|+2\|u\times\operatorname{curl}A\|+2\|f\|\\&\leqslant-\|\Delta u\|+2\|u_t\|+C\|u\|^{1/2}\|\nabla u\|\ \|\Delta u\|^{1/2}+C\|u\|^{1/2}\|\nabla u\|^{1/2}\|\nabla A\|^{1/2}\|\Delta A\|^{1/2}+2\|f\|\\&\leqslant 2\|u_t\|+C\|u\|\ \|\nabla u\|^2+C\|\nabla u\|\ \|\nabla A\|\ \|\Delta A\|+2\|f\|,\end{aligned}$$

由式(8)、(15)、(20)可知，存在常数$C_{16}>0$，使得

$$\|\Delta u(t+1)\|^2\leqslant C_{16},$$

于是对任意的$(\varphi,\psi,\eta)\in B\subset H\times H\times Z$，存在$t_3(B):=t_2(B)+1>0$，使得当$t>t_3(B)$时，有

$$\|\Delta u(t)\|^2+\|\nabla A_t(t)\|^2+\|\Delta A(t)\|^2\leqslant R_3^2,\tag{21}$$

其中$R_3^2:=R_2^2+C_{16}$。

令集合$\mathscr{B}$为$H\times H\times Z$中以0为中心，R_3为半径的闭球，则B显然为解半群$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$在相空间$H\times H\times Z$中的一个有界吸收集。

引理6 解算子$S:(t,\varphi,\psi,\eta)\mapsto S(t)(\varphi,\psi,\eta)\in H\times H\times Z$关于$(t,\varphi,\psi,\eta)\in[0,\infty)\times H\times H\times Z$连续。

证明 由引理1中解的正则性，可进一步推出$u_{tt}\in L^2([0,T],Z')$（$\forall T>0$），其中Z'为Z的对偶空间，且$Z\subset Y\subset Z'$。结合时空型Sobolev空间上的Aubin-Lions定理，不难发现初边值问题(2)—(3)的解满足如下正则性：

$$u\in C([0,T],Z),\quad u_t\in C([0,T],Y),\quad A\in C([0,T],H),\quad A_t\in C([0,T],Z),\quad \forall T>0。$$

注意到

$$\begin{aligned}\|u\cdot\nabla u(t_1)-u\cdot\nabla u(t_2)\|_{\frac{4}{3}}&\leqslant\|u(t_1)-u(t_2)\|_4\|\nabla u(t_1)\|+\|u(t_2)\|_4\|\nabla u(t_1)-\nabla u(t_2)\|\\&\leqslant\|\nabla u(t_1)-\nabla u(t_2)\|\ \|\nabla u(t_1)\|+\|\nabla u(t_2)\|\ \|\nabla u(t_1)-\nabla u(t_2)\|,\end{aligned}$$

这意味着$u\cdot\nabla u\in C([0,T];L^{4/3}(\Omega))$。同理，$u\times\operatorname{curl}A\in C([0,T];L^{4/3}(\Omega))$，于是$-\Delta u\in C([0,T];L^{4/3}(\Omega))$。结合Sobolev嵌入$W^{2,\frac{4}{3}}(\Omega)\hookrightarrow C^{0,\frac{2}{3}}(\Omega)$，得

$$\begin{aligned}\|u\cdot\nabla u(t_1)-u\cdot\nabla u(t_2)\|&\leqslant\|u(t_1)-u(t_2)\|_\infty\|\nabla u(t_1)\|+\|u(t_2)\|_\infty\|\nabla u(t_1)-\nabla u(t_2)\|\\&\leqslant\|\Delta(u(t_1)-u(t_2))\|_{4/3}\|\nabla u(t_1)\|+\|\Delta u(t_2)\|_{4/3}\|\nabla u(t_1)-\nabla u(t_2)\|,\end{aligned}$$

从而$u\cdot\nabla u\in C([0,T];Y)$。经过类似的推导，可知$u\times\operatorname{curl}A\in C([0,T];Y)$，于是

$$u\in C([0,T],H),\quad u_t\in C([0,T],Y),\quad A\in C([0,T],H),\quad A_t\in C([0,T],Z),\quad \forall T>0。\tag{22}$$

以下证明，解算子$S(t):H\times H\times Z\to H\times H\times Z$是局部Lipschitz连续的。

设(u^1,A^1,A_t^1)与(u^2,A^2,A_t^2)分别是初边值问题(2)-(3)在初值$(\varphi^1,\psi^1,\eta^1)\in H\times H\times Z$，$(\varphi^2,\psi^2,\eta^2)\in H\times H\times Z$下的解，记

$$\bar{u}=u^1-u^2,\quad \bar{A}=A^1-A^2,\quad \bar{A}_t=A_t^1-A_t^2,$$

则$(\bar{u},\bar{A},\bar{A}_t)$满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial t}+u^1\cdot\nabla\bar{u}+\bar{u}\cdot\nabla u^2-\nu\Delta\bar{u}+\dfrac{1}{\rho_0}\nabla\bar{p}-\dfrac{\rho_e}{\rho_0}u^1\times\mathrm{curl}\,\bar{A}-\dfrac{\rho_e}{\rho_0}\bar{u}\times\mathrm{curl}\,A^2=0,\\ \dfrac{\partial^2\bar{A}}{\partial t^2}-\alpha\Delta\bar{A}_t+g(A^1)-g(A^2)-\dfrac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\Delta\bar{A}-\dfrac{\rho_e}{\varepsilon_0\mu_0}\bar{u}+\nabla\bar{\Phi}=0,\\ \nabla\cdot\bar{u}=0,\ \nabla\cdot\bar{A}=0。\end{cases}\tag{23}$$

将系统(23)的第 1 个方程与$-\Delta\bar{u}$ 作内积,有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\bar{u}\|^2+\nu\|\Delta\bar{u}\|^2\leqslant\int_\Omega u^1\cdot\nabla\bar{u}\cdot\Delta\bar{u}\mathrm{d}x+\int_\Omega\bar{u}\cdot\nabla u^2\cdot\Delta\bar{u}\mathrm{d}x$$
$$-\int_\Omega u^1\times\mathrm{curl}\,\bar{A}\cdot\Delta\bar{u}\mathrm{d}x-\int_\Omega\bar{u}\times\mathrm{curl}\,A^2\cdot\Delta\bar{u}\mathrm{d}x=:\sum_{i=1}^4K_i。$$

结合 Gagliardo-Nirenberg 不等式,得

$$K_1\leqslant C\|u^1\|^{\frac12}\|\nabla u^1\|^{\frac12}\|\nabla\bar{u}\|^{\frac12}\|\Delta\bar{u}\|^{\frac32}\leqslant\frac{\nu}{4}\|\Delta\bar{u}\|^2+C(\nu,\lambda_1)\|\nabla u^1\|^4\|\nabla\bar{u}\|^2,$$

$$K_2\leqslant C\|\bar{u}\|^{\frac12}\|\nabla u^1\|\ \|\Delta\bar{u}\|^{\frac32}\leqslant\frac{\nu}{4}\|\Delta\bar{u}\|^2+C(\nu,\lambda_1)\|\nabla u^2\|^4\|\nabla\bar{u}\|^2,$$

$$K_3\leqslant C\|u^1\|^{\frac12}\|\nabla u^1\|^{\frac12}\|\nabla\bar{A}\|^{\frac12}\|\Delta\bar{A}\|^{\frac12}\|\Delta\bar{u}\|\leqslant\frac{\nu}{4}\|\Delta\bar{u}\|^2+C(\nu,\lambda_1)\|\nabla u^1\|^2\|\Delta\bar{A}\|^2,$$

$$K_4\leqslant C\|\bar{u}\|^{\frac12}\|\nabla A^2\|\ \|\Delta\bar{u}\|^{\frac32}\leqslant\frac{\nu}{4}\|\Delta\bar{u}\|^2+C(\nu,\lambda_1)\|\nabla A^2\|^4\|\nabla\bar{u}\|^2。$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\bar{u}\|^2\leqslant C(\|\nabla u^1\|^4+\|\nabla u^2\|^4+\|\nabla A^2\|^4)\|\nabla\bar{u}\|^2+C\|\nabla u^1\|^2\|\Delta\bar{A}\|^2。\tag{24}$$

将系统(23)的第 2 个方程与$-\Delta\bar{A}_t$ 作内积,有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla\bar{A}_t\|^2+\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\|\Delta\bar{A}\|^2\right)+\alpha\|\Delta\bar{A}_t\|^2\leqslant\frac{\rho_e}{\varepsilon_0\mu_0}\|\nabla\bar{u}\|\ \|\nabla\bar{A}_t\|+\int_\Omega(g(A^1)-g(A^2))\cdot\Delta\bar{A}_t\mathrm{d}x。$$

由微分中值定理与假设(H_2)可知,对任意的 $x^1,x^2\in\mathbf{R}^2$,成立

$$|g(x^1)-g(x^2)|\leqslant|\nabla g(\tilde{x})||x^1-x^2|\leqslant C(1+|x^1|^s+|x^2|^s)|x^1-x^2|,$$

其中 $\tilde{x}=x^2+(1-\xi)(x^1-x^2)$, $0<\xi<1$。于是利用 Hölder 不等式与 Sobolev 嵌入定理,得

$$\int_\Omega(g(A^1)-g(A^2))\cdot\Delta\bar{A}_t\mathrm{d}x\leqslant C(\|A^1\|_{2s+2}^s+\|A^1\|_{2s+2}^s+|\Omega|^{s/(2s+2)})\|\bar{A}\|_{2s+2}\|\Delta\bar{A}_t\|$$
$$\leqslant\alpha\|\Delta\bar{A}_t\|^2+C(\alpha)(\|\nabla A^1\|^{2s}+\|\nabla A^2\|^{2s}+|\Omega|^{2s/(2s+2)})\|\Delta\bar{A}\|^2,$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla\bar{A}_t\|^2+\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\|\Delta\bar{A}\|^2\right)$$
$$\leqslant C((\|\nabla A^1\|^{2s}+\|\nabla A^2\|^{2s}+|\Omega|^{2s/(2s+2)})\|\Delta\bar{A}\|^2+\|\nabla\bar{A}_t\|^2+\|\nabla\bar{u}\|^2)。\tag{25}$$

将式(24)、(25)相加,并利用 Gronwall 不等式,有

$$\|\nabla\bar{u}\|^2+\|\Delta\bar{A}\|^2+\|\nabla\bar{A}_t\|^2\leqslant\mathrm{e}^{\int_0^tW(\tau)\mathrm{d}\tau}(\|\nabla\bar{u}(0)\|^2+\|\Delta\bar{A}(0)\|^2+\|\nabla\bar{A}_t(0)\|^2)=:\bar{E}(0)\mathrm{e}^{\int_0^tW(\tau)\mathrm{d}\tau},\tag{26}$$

其中

$$W(t):=C(|\Omega|)(1+\|\nabla u^1\|^4+\|\nabla u^2\|^4+\|\nabla A^2\|^4+\|\nabla A^1\|^{2s}+\|\nabla A^2\|^{2s})。$$

对系统(23)中的第 1 式关于时间 t 求导并与 $\bar{u}_t$ 作内积,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\bar{u}_t\|^2+2\nu\|\nabla\bar{u}_t\|^2=-2\int_\Omega(u_t^1\cdot\nabla\bar{u}\cdot\bar{u}_t+\bar{u}_t\cdot\nabla u^2\cdot\bar{u}_t+\bar{u}\cdot\nabla u_t^2\cdot\bar{u}_t)\mathrm{d}x$$
$$+\frac{2\rho_e}{\rho_0}\int_\Omega(u_t^1\times\mathrm{curl}\,\bar{A}\cdot\bar{u}_t+u^1\times\mathrm{curl}\,\bar{A}_t\cdot\bar{u}_t+\bar{u}\times\mathrm{curl}\,A_t^2\cdot\bar{u}_t)\mathrm{d}x=:\sum_{i=1}^6M_i。\tag{27}$$

进一步地,利用 Hölder 不等式、Gagliardo−Nirenberg 不等式、Poincaré 不等式与 Young 不等式,得

$$M_1 \leqslant C\|u_t^1\|_4\|\bar{u}\|_4\|\nabla\bar{u}_t\| \leqslant C\|u_t^1\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla u_t^1\|^{\frac{1}{2}}\|\bar{u}\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\bar{u}\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\bar{u}_t\| \leqslant \frac{\nu}{3}\|\nabla\bar{u}_t\|^2+C\|\nabla u_t^1\|^2\|\nabla\bar{u}\|^2,$$

$$M_2 \leqslant C\|\bar{u}_t\|_4\|u^2\|_4\|\nabla\bar{u}_t\| \leqslant C\|\bar{u}_t\|^{\frac{1}{2}}\|u^2\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla u^2\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\bar{u}_t\|^{\frac{3}{2}} \leqslant \frac{\nu}{3}\|\nabla\bar{u}_t\|^2+C\|u^2\|^2\|\nabla u^2\|^2\|\bar{u}_t\|^2,$$

$$M_3 \leqslant C\|\bar{u}\|_4\|u_t^2\|_4\|\nabla\bar{u}_t\| \leqslant C\|\bar{u}\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\bar{u}\|^{\frac{1}{2}}\|u_t^2\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla u_t^2\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\bar{u}_t\| \leqslant \frac{\nu}{3}\|\nabla\bar{u}_t\|^2+C\|\nabla\bar{u}\|^2\|\nabla u_t^2\|^2,$$

$$M_4 \leqslant C\|u_t^1\|_4\|\nabla\bar{A}\|_4\|\bar{u}_t\| \leqslant C\|u_t^1\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla u_t^1\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\bar{A}\|^{\frac{1}{2}}\|\Delta\bar{A}\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\bar{u}_t\| \leqslant \frac{\nu}{3}\|\nabla\bar{u}_t\|^2+C\|\nabla u_t^1\|^2\|\Delta\bar{A}\|^2,$$

$$M_5 \leqslant C\|u^1\|_4\|\bar{u}_t\|_4\|\nabla\bar{A}_t\| \leqslant C\|u^1\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla u^1\|^{\frac{1}{2}}\|\bar{u}_t\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\bar{u}_t\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\bar{A}_t\| \leqslant \frac{\nu}{3}\|\nabla\bar{u}_t\|^2+C\|\nabla u^1\|^2\|\nabla\bar{A}_t\|^2,$$

$$M_6 \leqslant C\|\bar{u}\|_4\|\bar{u}_t\|_4\|\nabla A_t^2\| \leqslant C\|\bar{u}\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\bar{u}\|^{\frac{1}{2}}\|\bar{u}_t\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\bar{u}_t\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla A_t^2\| \leqslant \frac{\nu}{3}\|\nabla\bar{u}_t\|^2+C\|\nabla\bar{u}\|^2\|\nabla A_t^2\|^2。$$

对式(27)在$[0,t]$上积分得到

$$\begin{aligned}\|\bar{u}_t(t)\|^2 \leqslant &\|\bar{u}_t(0)\|^2+C\int_0^t((\|\nabla u_t^1\|^2+\|\nabla u_t^2\|^2)\|\nabla\bar{u}\|^2+\|u^2\|^2\|\nabla u^2\|^2\|\bar{u}_t\|^2)\mathrm{d}\tau\\ &+C\int_0^t(\|\nabla\bar{A}_t\|^2\|\nabla u^1\|^2+\|\nabla\bar{u}\|^2\|\nabla A_t^2\|^2+\|\nabla u_t^1\|^2\|\Delta\bar{A}\|^2)\mathrm{d}\tau\\ \leqslant &\|\bar{u}_t(0)\|^2+\bar{E}(0)\,\mathrm{e}^{\int_0^t W(\tau)\mathrm{d}\tau}\int_0^t(2\|\nabla u_t^1\|^2+\|\nabla u_t^2\|^2)\mathrm{d}\tau\\ &+\bar{E}(0)\,\mathrm{e}^{\int_0^t W(\tau)\mathrm{d}\tau}\int_0^t(\|\nabla u^1\|^2+\|\nabla A_t^2\|^2)\mathrm{d}\tau+C\int_0^t\|\nabla u^2\|^4\|\bar{u}_t\|^2\mathrm{d}\tau。\end{aligned}$$

由式(17)可知

$$\begin{aligned}\int_0^t(\|\nabla u_t^1\|^2+\|\nabla u_t^2\|^2)\mathrm{d}\tau \leqslant &\|u_t^1(0)\|^2+\|u_t^2(0)\|^2+C\int_0^t(\|u_t^1\|^2\|\nabla u^1\|^4+\|u_t^2\|^2\|\nabla u^2\|^4)\mathrm{d}\tau\\ &+C\int_0^t(\|\nabla A_t^1\|^2\|\nabla u^1\|^2+\|\nabla A_t^2\|^2\|\nabla u^2\|^2)\mathrm{d}\tau。\end{aligned}$$

结合(u,A,A_t)关于时间 t 的连续性,并注意到

$$\|u_t\|^2 \leqslant \mathrm{e}^{C\int_0^t\|\nabla u\|^4\mathrm{d}\tau}\left(\|u_t(0)\|^2+\int_0^t\|\nabla A_t\|^2\|\nabla u\|^2\mathrm{d}\tau\right),$$

$$\|u_t(0)\|^2 \leqslant C(\|\Delta u(0)\|^2+\|\Delta u(0)\|^4+\|\Delta A(0)\|^4+\|f\|^2),$$

则

$$\|\bar{u}_t(t)\|^2 \leqslant \|\bar{u}_t(0)\|^2+C(T)\left(\bar{E}(0)+\int_0^t\|\bar{u}_t(\tau)\|^2\mathrm{d}\tau\right),\quad \forall T>0,\quad t\in[0,T]。$$

对上式利用积分形式的 Gronwall 不等式,有

$$\|\bar{u}_t(t)\|^2 \leqslant C(T)(\|\bar{u}_t(0)\|^2+\bar{E}(0)) \leqslant C(T)(\|\Delta\bar{u}(0)\|^2+\|\Delta\bar{A}(0)\|^2+\bar{E}(0)) \leqslant C(T)\bar{E}(0)。\tag{28}$$

将系统(23)中的第 1 个方程在空间 Y 中取范数,得

$$\begin{aligned}\frac{\nu}{2}\|\Delta\bar{u}\| \leqslant &-\frac{\nu}{2}\|\Delta\bar{u}\|+\|\bar{u}_t\|+C(\|u^1\cdot\nabla\bar{u}\|+\|\bar{u}\cdot\nabla u^2\|+\|u^1\times\operatorname{curl}\bar{A}\|++\|\bar{u}\times\operatorname{curl}A^2\|)\\ \leqslant &-\frac{\nu}{2}\|\Delta\bar{u}\|+\|\bar{u}_t\|+C(\|u^1\|^{\frac{1}{2}}\|\Delta u^1\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\bar{u}\|+\|\bar{u}\|^{\frac{1}{2}}\|\Delta\bar{u}\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla u^2\|\\ &+\|u^1\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla u^1\|^{\frac{1}{2}}\|\Delta\bar{A}\|+\|\bar{u}\|^{\frac{1}{2}}\|\Delta\bar{u}\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla A^2\|^2)\\ \leqslant &\|\bar{u}_t\|+C(\|\nabla\bar{u}\|(\|\Delta u^1\|+\|\nabla u^2\|^2+\|\nabla A^2\|)+\|\Delta\bar{A}\|\ \|\nabla u^1\|),\end{aligned}$$

从而

$$\|\Delta\bar{u}(t)\|^2 \leqslant C(T)(\|\bar{u}_t\|^2+\|\nabla\bar{u}\|^2+\|\Delta\bar{A}\|^2),\quad \forall T>0,\quad t\in[0,T]。\tag{29}$$

于是,结合式(26)、(28)、(29),可知

$$\|\Delta\bar{u}\|^2+\|\Delta\bar{A}\|^2+\|\nabla\bar{A}_t\|^2 \leqslant C(T)(\|\Delta\bar{u}(0)\|^2+\|\Delta\bar{A}(0)\|^2+\|\nabla\bar{A}_t(0)\|^2),\quad \forall T>0,\quad t\in[0,T],$$

故引理 6 得证。

定理 1　若外力 $f(x)\in Y$，初值 $(\varphi(x),\psi(x),\eta(x))\in H\times H\times Z$，阻尼系数 $\alpha>\max\left\{\dfrac{\rho_{\mathrm{e}}^2}{\nu\varepsilon_0^2\mu_0^2\lambda_1^2},\ \dfrac{\rho_{\mathrm{e}}^2}{\nu\varepsilon_0^2\mu_0^2\lambda}\right\}$，其中常数 λ 的定义与引理 4 中相同，则初边值问题（2）—（3）生成的解半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 在相空间 $H\times H\times Z$ 中存在全局吸引子 $\mathscr{A}$，且 $\mathscr{A}$ 吸引 $H\times H\times Z$ 中的任意有界集。

证明　由引理 2、5、6，只需验证解半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 在相空间 $H\times H\times Z$ 中满足 C-条件。

考虑算子 $-P\Delta$（其中 P 为 $L^2(\Omega;\mathbf{R}^2)$ 到 Y 的正交投影算子）的特征值问题：

$$\begin{cases}-P\Delta\phi_n=\lambda_n\phi_n,\\ \phi_n|_{\partial\Omega}=0。\end{cases}$$

由线性算子的谱理论可知

$$0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n\leqslant\cdots,\quad \lambda_n\to\infty\ (n\to\infty),\tag{30}$$

特征函数 $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}\subset C_\sigma^\infty(\Omega;\mathbf{R}^2)$，且满足 $(\phi_m,\phi_n)=\int_\Omega\phi_m\cdot\phi_n\mathrm{d}x=\delta_{mn}$，其中 δ_{mn} 为 Kronecker 符号。

取有限维子空间 $Y_n:=\mathrm{span}\{\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_n\}$，记 P_n 为 $Y\to Y_n$ 的正交投影算子，则 (u,A,A_t) 可作如下分解

$$(u,A,A_t)=(P_nu,P_nA,P_nA_t)+((I-P_n)u,(I-P_n)A,(I-P_n)A_t)=:(P_nu,P_nA,P_nA_t)+(u^n,A^n,A_t^n)。$$

令 B 为 $H\times H\times Z$ 中的任意有界集，则当初值 $(\varphi,\psi,\eta)\in B$，且 $t>t_3(B)$ 时，显然有

$$\|P_n\nabla A_t(t)\|^2+\|P_n\Delta A(t)\|^2+\|P_n\Delta u(t)\|^2\leqslant R_3^2。\tag{31}$$

同时，当 $t>t_3(B)$ 时，$A(t)\in Z$，由假设（H_3）可知 $g(A)\in Y$。

将系统（2）的第 2 个方程与 $-\Delta\Lambda^n=-\Delta A_t^n-\delta\Delta A^n\ (\delta>0)$ 作内积，则有

$$\begin{aligned}&\frac{\rho_{\mathrm{e}}}{\varepsilon_0\mu_0}\int_\Omega\nabla u^n\cdot\nabla\Lambda^n\mathrm{d}x+\int_\Omega(I-P_n)g(A)\cdot\Delta A_t^n\mathrm{d}x+\delta\int_\Omega(I-P_n)g(A)\cdot\Delta A^n\mathrm{d}x-\delta^2\int_\Omega\nabla A^n\cdot\nabla\Lambda^n\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla\Lambda^n(t)\|^2+\left(\alpha\delta+\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\right)\|\Delta A^n(t)\|^2\right)-\delta\|\nabla\Lambda^n(t)\|^2+\alpha\|\Delta A_t^n(t)\|^2+\frac{\delta}{\varepsilon_0\mu_0}\|\Delta A^n(t)\|^2。\end{aligned}$$

令 $E_6(t):=\|\nabla\Lambda^n(t)\|^2+\left(\alpha\delta+\dfrac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\right)\|\Delta A^n(t)\|^2$，与引理 4 中相似的估计，得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}E_6(t)}{\mathrm{d}t}+\left(\frac{(\alpha-\theta)\lambda}{2}-\delta-\frac{\delta^2}{2}-\frac{\delta}{2}\right)\|\nabla\Lambda^n\|^2+\delta\left(\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}-\alpha\delta-\frac{\delta}{2\lambda}-\theta\right)\|\Delta A^n\|^2\\&\leqslant C(\delta,\lambda)\|\Delta u^n\|^2+C(\theta,\delta)\|(I-P_n)g(A)\|^2。\end{aligned}$$

由于 $\delta,\theta>0$ 可以任意小，因此存在常数 $C_{17},C_{18}>0$，使得

$$\frac{\mathrm{d}E_6(t)}{\mathrm{d}t}+C_{17}E_6(t)\leqslant C_{18}(\|\Delta u^n\|^2+\|(I-P_n)g(A)\|^2)。\tag{32}$$

在区间 $[t_0,t]\ (t_0>t_3(B))$ 上对式（32）应用 Gronwall 不等式，有

$$\begin{aligned}\|\nabla A_t^n(t)\|^2+\|\Delta A^n(t)\|^2\leqslant{}&C_{19}\mathrm{e}^{-C_{17}(t-t_0)}(\|\nabla A_t(t_0)\|^2+\|\Delta A(t_0)\|^2)\\&+C_{19}\mathrm{e}^{-C_{17}t}\int_{t_0}^t(\|\Delta u^n\|^2+\|(I-P_n)g(A)\|^2)\mathrm{e}^{C_{17}\tau}\mathrm{d}\tau,\end{aligned}\tag{33}$$

这里常数 $C_{19}>2C_{17}$。

将方程（16）与 $(I-P_n)u_t=u_t^n$ 作内积，并利用 Amgon 不等式、Hoölder 不等式与 Gagliardo-Nirenberg 不等式，则有

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_t^n\|^2+2\nu\|\nabla u_t^n\|^2\\&\leqslant C(\|u_t\|\|\nabla u\|_4\|u_t^n\|_4+\|u\|_\infty\|\nabla u_t^n\|\|u_t\|+\|u\|_\infty\|\nabla A_t\|\|u_t^n\|+\|u_t\|\|\nabla A\|_4\|u_t^n\|_4)\\&\leqslant C(\|u_t\|\|\nabla u\|^{\frac12}\|\Delta u\|^{\frac12}\|\nabla u_t^n\|+\|u\|^{\frac12}\|\Delta u\|^{\frac12}\|\nabla u_t^n\|\|u_t\|+\|u\|^{\frac12}\|\Delta u\|^{\frac12}\|\nabla u_t^n\|\|\nabla A_t\|\\&\quad+\|u_t\|\|\nabla A\|^{\frac12}\|\Delta A\|^{\frac12}\|\nabla u_t^n\|)\\&\leqslant\nu\|\nabla u_t^n\|^2+C(\nu,\lambda_1)(\|\Delta u\|\|u\|\|u_t\|^2+\|\Delta u\|\|\nabla u\|\|u_t\|^2+\|\Delta u\|\|u\|\|\nabla A_t\|^2+\|\Delta A\|\|\nabla A\|\|u_t\|^2)\\&=:\nu\|\nabla u_t^n\|^2+W(t)。\end{aligned}$$

由 Poincaré 不等式 $\|\nabla u_t^n\|^2 \geqslant \lambda_{n+1}\|u_t^n\|^2$,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_t^n\|^2+\lambda_{n+1}\|u_t^n\|^2 \leqslant W(t)。\tag{34}$$

注意到,当 $t>t_3(B)$ 时,$W(t) \leqslant C(R_2R_3^3+R_1R_3^3+R_1R_2^2R_3+R_1R_2R_3^2)=:C_{20}$,从而对式(34)在$[t,t+1]$上应用 Gronwall不等式,有

$$\begin{aligned}\|u_t^n(t+1)\|^2 &\leqslant \mathrm{e}^{-\lambda_{n+1}}\|u_t^n(t)\|^2+\mathrm{e}^{-\lambda_{n+1}(t+1)}\int_t^{t+1}W(\tau)\mathrm{e}^{-\lambda_{n+1}\tau}\mathrm{d}\tau \\ &\leqslant \mathrm{e}^{-\lambda_{n+1}}\|u_t(t)\|^2+\frac{C_{20}}{\lambda_{n+1}}(1-\mathrm{e}^{-\lambda_{n+1}t}) \leqslant C_{21}\left(\mathrm{e}^{-\lambda_{n+1}}+\frac{1}{\lambda_{n+1}}\right)。\end{aligned}\tag{35}$$

现将算子 $I-P_n$ 作用在系统(2)中的第 1 个方程上,并在空间 Y 中取范数,得

$$\begin{aligned}\|(I-P_n)\Delta u\|^2 &= \frac{1}{\nu}\left\|u_t^n+(I-P_n)(f-u\cdot\nabla u+\frac{\rho_{\mathrm{e}}}{\rho_0}u\times\mathrm{curl}\,A)\right\| \\ &\leqslant C\|u_t^n\|^2+C(\|(I-P_n)f\|^2+\|(I-P_n)(u\cdot\nabla u)\|^2+\|(I-P_n)(u\times\mathrm{curl}\,A)\|^2)。\end{aligned}$$

注意到,当 $t>t_3(B)+1$ 时,$u\cdot\nabla u$,$u\times\mathrm{curl}\,A\in Y$。由式(30)、(35)与 $f\in Y$ 可知,对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $N_1>0$,使得当 $n>N_1$ 时,有

$$\|\Delta u^n(t)\|^2=\|(I-P_n)\Delta u(t)\|^2<\frac{C_{17}\varepsilon^2}{4C_{19}}。\tag{36}$$

由于 $g(A)\in Y$,所以存在 $N_2>0$,使得当 $n>N_2$ 时,对任意的 $\varepsilon>0$,有

$$\|(I-P_n)g(A)\|^2<\frac{C_{17}\varepsilon^2}{4C_{19}}。\tag{37}$$

此外,当 $t_0>t_3(B)+1$ 时,$\|\nabla A_t(t_0)\|^2+\|\Delta A(t_0)\|^2\leqslant R_3^2$,从而当 $t>t_0$,且 t 足够大时,

$$C_{19}\mathrm{e}^{-C_{17}(t-t_0)}(\|\nabla A_t(t_0)\|^2+\|\Delta A(t_0)\|^2)<\frac{(2C_{19}-C_{17})\varepsilon^2}{4C_{19}}。\tag{38}$$

令 $N:=\max\{N_1,N_2\}$,由式(33)、(36)-(38)可知,对任意的$(\varphi,\psi,\eta)\in H\times H\times Z$, $\varepsilon>0$,存在 $t_4(B)>t_3(B)+1$,使得当 $t>t_4(B)$, $n>N$ 时,有

$$\|\Delta(I-P_n)u\|^2+\|\Delta(I-P_n)A\|^2+\|\nabla(I-P_n)A_t\|^2<\varepsilon^2。\tag{39}$$

显然,由式(31)、(39)知解半群$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$满足 C-条件。

参考文献:

[1] LIU Ruikan, YANG Jiayan. Magneto-hydrodynamical model for plasma[J]. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 2017, 68:1-15.

[2] LIU Ruikuan, YANG Jiayan. Global strong solutions of a 2 D new magnetohydrodynamic system[J]. Applications of Mathematics, 2020, 65(1):105-120.

[3] TEMAM R. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics[M]. New York: Springer, 1997.

[4] LUKASZEWICZ G. Long time behavior of 2D micropolar fluid flows[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2001, 34(5/6): 487-509.

[5] MA Qingfeng, WANG Shouhong, ZHONG Chengkui. Necessary and sufficient conditions for the existence of global attractors for semigroups and applications[J]. Indiana University Mathematics Journal, 2001, 51(6):1541-1559.

[6] LU Songsong, WU Hongqing, ZHONG Chengkui. Attractors for non-autonomous 2D Navier-Stokes equations with normal external force[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2005, 13(3):701.

[7] ZHONG Chengkui, YANG Meihua, SUN Chunyou. The existence of global attractors for the norm-to-weak continuous semigroup and application to the nonlinear reaction-diffusion equation[J]. Journal of Differential Equations, 2006, 223(2): 367-399.

[8] 马天,汪守宏. 非线性演化方程的稳定性与分歧[M]. 北京:科学出版社,2007.
MA Tian, WANG Shouhong. Stability and bifurcation of nonlinear evolution equations[M]. Beijing: Science Press, 2007.

(下转第 73 页)