

# 基于 W-G-VaR 模型的股票市场风险测度

张慧<sup>1</sup>, 魏佳琪<sup>1</sup>, 孟纹羽<sup>2</sup>, 朱庆峰<sup>1</sup>

(1. 山东财经大学统计与数学学院, 山东 济南 250014; 2. 山东财经大学金融学院, 山东 济南 250014)

**摘要:**为了验证基于不同频域尺度捕捉金融时间序列的概率分布不确定性特征可以有效提高 VaR 模型的度量精度,首次将小波多分辨率分析与非线性期望理论相结合构建 W-G-VaR 模型,选择美国标准普尔 500 指数(Standard & Poors 500 composite stock price index, S&P 500 Index)与上证综合指数作为样本进行实证分析。结果表明,相比于 G-VaR 模型,从时域和频域双视角下构建的 W-G-VaR 模型在整个样本期间,尤其在重大风险发生期间具有更精确的风险度量结果,且捕捉不确定性时的窗口大小不会影响 W-G-VaR 模型的优越性。

**关键词:**小波多分辨率分析;非线性期望理论;W-G-VaR 模型;尾部风险

**中图分类号:**O211.9 **文献标志码:**A

**引用格式:**张慧,魏佳琪,孟纹羽,等.基于 W-G-VaR 模型的股票市场风险测度[J].山东大学学报(理学版),2025,60(8):21-33.

## Stock market risk measurement based on W-G-VaR model

ZHANG Hui<sup>1</sup>, WEI Jiaqi<sup>1</sup>, MENG Wenyu<sup>2</sup>, ZHU Qingfeng<sup>1</sup>

(1. School of Statistics and Mathematics, Shandong University of Finance and Economics, Jinan 250014, Shandong, China;  
2. School of Finance, Shandong University of Finance and Economics, Jinan 250014, Shandong, China)

**Abstract:** In order to verify that capturing the uncertainty features of the probability distribution of financial time series based on different frequency domain scales can effectively improve the measurement accuracy of VaR model, the W-G-VaR model is constructed by combining wavelet multi-resolution analysis with nonlinear expectation theory for the first time. Standard & Poors 500 composite stock price index(S&P 500 Index) and Shanghai(securities) composite index are selected as samples for empirical analysis. The results show that, compared to the G-VaR model, the W-G-VaR model constructed from the dual perspectives of the time domain and the frequency domain has more accurate risk measurement results throughout the sample period, especially during the occurrence of major risks, and the size of the window when capturing uncertainties does not affect the superiority of the W-G-VaR model.

**Key words:** wavelet multi-resolution analysis; nonlinear expectation theory; W-G-VaR model; tail risk

## 0 引言

2008 年以来的一系列金融动荡表明,基于历史数据与固定概率分布假设的传统 VaR 方法是不可靠的。在现实世界中,金融时间序列的分布是动态的,具有不确定概率分布的特征<sup>[1-2]</sup>。彭实戈<sup>[3]</sup>在概率模型中加入不确定性,构建非线性期望理论,从本质上改变了概率统计模型的基本假设,可用于研究不确定性下的金融风险度量。宫晓琳等<sup>[1,4]</sup>将非线性预期理论与 VaR 相结合,构建了 G-VaR 模型,该模型考虑了金融资产时间序列的标准差不确定性特征,提高了风险度量的准确性和审慎性。Pei 等<sup>[5]</sup>进一步将 G-VaR 扩展为具有均值和标准差双重不确定性的 G-VaR 模型,并通过求解 HJB 方程得到了 G-VaR 的显式表达式。

在考虑概率分布不确定性的 G-VaR 模型基础上,一系列研究基于多种方法(例如动态平滑极值移动窗口法<sup>[1]</sup>、自回归条件异方差方法<sup>[4]</sup>、非线性大数定理<sup>[6]</sup>)对 G-VaR 模型的参数估计程序进行改进,进一步优化了 G-VaR 模型的风控表现。然而,异质市场假说(heterogeneous market hypothesis, HMM)表明,资产价格

的局部波动特征在不同交易周期上具有显著差异<sup>[7]</sup>,在单一尺度上的 G-VaR 模型参数估计方法无法捕捉到不同交易周期(即不同时间尺度)所蕴含的交易信息对资产收益率波动的影响<sup>[8]</sup>。研究表明,在不同交易频率下的数据生成过程具有异质性,基于单一尺度视角的研究难以使模型拟合效果达到最优<sup>[9]</sup>。多分辨率分析(multi-resolution analysis, MRA)和集成(即预测组合)算法可以用于跟踪多尺度时变数据特征,其通过明晰交易活动在不同频率水平上的变化,从而进行更加准确的预测<sup>[8-9]</sup>。但是,现有的使用日度、月度、年度收益率数据的 MRA 方法存在信息丢失和移位变化的缺陷,小波分析为此提供了解决方案。许多研究开始使用小波分析来研究资本市场的历史价格或相关行为<sup>[10-11]</sup>,例如,小波分析已被用于分析不同尺度上的风险分布<sup>[12-13]</sup>。Gençay 等<sup>[14]</sup>使用小波域隐马尔可夫模型揭示了不同时间尺度上波动率的不对称垂直依赖特性。此外,进入 21 世纪以来,重大突发事件频繁发生,如 2008 年全球金融危机、2010 年欧债危机、2015 年中国股灾以及 2018 年中美贸易摩擦等。在重大突发事件的冲击下,市场基本面因素(金融市场微观结构、投资者结构以及市场信息披露状况)与投资者情绪作为金融风险的影响机制发生变化,导致金融市场发生异常波动<sup>[15-16]</sup>。崔金鑫等<sup>[17]</sup>从时域和频域视角研究了国际股市间的风险溢出,发现重大突发事件对金融市场造成的影响在不同频域范围内具有异质性,在重大事件发生期间,金融时间序列的分布不确定性与正常情况下可能具有显著区别。

综上所述,本文参考文献[9,18],基于小波多尺度的“分解—预测—重构”框架构建基于小波多分辨率分析和非线性期望理论的新型风险测度模型—W-G-VaR,并使用回溯测试程序来研究 W-G-VaR 模型预测结果的准确性。本文的创新性主要体现在用异质市场假说取代了同质单一时间范围假设,将小波分析与非线性期望理论相结合,首次从时域和频域双视角下考量金融时间序列的概率分布不确定性特征,并构建 W-G-VaR 模型度量股票市场尾部风险,该模型将宫晓琳等<sup>[1,4]</sup>和 Pei 等<sup>[5]</sup>的概率分布不确定性假设从时域范围扩展到频域中的每个分解序列上。实证分析表明,本文构建的 W-G-VaR 模型比宫晓琳等<sup>[1,4]</sup>和 Pei 等<sup>[5]</sup>的 G-VaR 模型的度量结果更精确。

## 1 模型与方法

### 1.1 小波分析

小波是一种数学函数,满足  $C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\varphi(f)|}{f} df < \infty$ ,  $\int_{-\infty}^\infty |\psi(t)|^2 dt = 1$ , 其中,  $\varphi$  为频率  $f$  的傅里叶变换,  $\psi$

为小波变换。小波变换是一种正交变换,使用小波分析  $W(u, s) = \int_{-\infty}^\infty x(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) dt$ , 可以对时间序列数据进行分解,以揭示更精细的尺度细节。在实践中,通常采用临界采样尺度下的离散小波变换(discrete wavelet transform, DWT)进行分析,以克服连续小波分析的复杂计算问题<sup>[19]</sup>。然而,随着时间尺度增加,通过 DWT 产生的不同分解层级的数据不断减少,导致难以确保每个分解层级信号的时间匹配,成为多尺度分析的阻碍。极大重叠离散小波变换(maximal overlap discrete wavelet transform, MODWT)改进了离散小波变换,不仅克服了离散小波变换分解层级数据不断减少的缺点,而且可以处理任何样本大小的数据,其通过高通滤波器分析数据的高频成分,通过低通滤波器分析低频成分。

原始时间序列可以分解为小波函数的线性组合

$$R_{T \times 1} = \tilde{W}'_{T \times [(J+1) \times T]} \tilde{\omega}_{[(J+1) \times T] \times 1} = \sum_{j=1}^J \tilde{W}'_{T \times T} \tilde{\omega}_j + \tilde{V}'_J \tilde{v}_J, \quad (1)$$

也可以简化为

$$R_{T \times 1} = \sum_{j=1}^J \tilde{D}_j + \tilde{S}_j, \quad (2)$$

其中,  $\tilde{D}_j = \tilde{W}'_j \tilde{\omega}_j$  为小波细节序列;  $\tilde{S}_j = \tilde{V}'_j \tilde{v}_j$  为  $J$  水平小波平滑序列;  $\tilde{\omega}_{j,t}$ 、 $\tilde{v}_{j,t}$  分别表示第  $j$  层小波系数与尺度系数;  $\tilde{W}_j$ 、 $\tilde{V}_j$  均由小波滤波器和尺度滤波器组成。第  $j$  级小波细节  $\tilde{D}_j$  对应着周期范围  $2^j$  到  $2^{j+1}$  的频带,低频尺度下的分解序列受趋势的支配,高频尺度下的分解序列更多受市场价格波动的影响。

### 1.2 W-G-VaR 模型构建

本文基于“分解—预测—重构”框架,按照图 1 给出的构建 W-G-VaR 风险测度指标示意图,从以下 3 个步骤详细给出了构建 W-G-VaR 风险测度模型的方法。

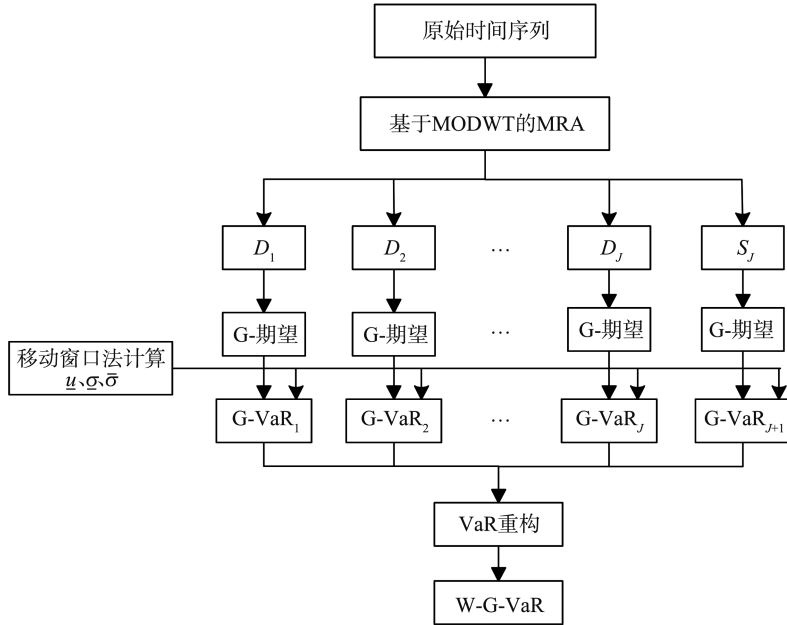


图 1 构建 W-G-VaR 风险测度指标示意图

Fig.1 Schematic diagram of W-G-VaR risk measurement index construction

#### 1) 收益率序列 $R_t$ 的小波分解

通过 MODWT 方法将原始序列  $R_t$  分解为不同尺度上的  $J+1$  个时间序列,即  $\{R_{1,t}, R_{2,t}, \dots, R_{j,t}, \dots, R_{J,t}, R_{J+1,t}\}$ ,其中  $R_{j,t} = D_{j,t}$ ,  $R_{J+1,t} = S_{J,t}$ ,  $j = 1, 2, \dots, J$ ;  $t = 1, 2, \dots, T$ ;  $D_j$  为第  $j$  级小波细节序列;  $S_j$  为小波平滑序列。

#### 2) 基于非线性期望理论预测每个分解序列的 VaR

在置信水平  $\alpha$  下,风险价值 ( $VaR_t$ ) 定义为在  $t$  时刻收益率序列的  $\alpha$  分位数,即  $P(R_t \leq VaR_t) = \alpha$ ,准确测度 VaR 的关键在于明晰收益率的分布。与传统计量经济学假设收益率服从单一分布  $F_0$  (至少在一段时间内) 的观点不同,彭实戈<sup>[3]</sup>的非线性期望理论表明,金融时间收益率序列  $\{R_t\}$  存在无限分布族  $\{F_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ ,没有任何一个单一的随机模型或分布可以作为完美的模型。本文将该理论的应用范围进一步扩展至频域,假设不同频域尺度上的分解序列存在不完全相同的无限分布族。参考文献[20],假设某个频域尺度分解序列上的方差  $\sigma^2$  在区间  $[\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2]$  内是时变的,用  $[\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2]$  刻画该分解序列的未知分布族  $\{F_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ ,使用 G-正态分布表示族  $\{F_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ 。

参考宫晓琳等<sup>[1]</sup>与 Pei 等<sup>[5]</sup>基于非线性期望理论的 VaR 计算程序,给定随机变量  $R_t$  代表股票指数在  $t$  时刻的收益率,假设  $R_t$  的均值在  $[\underline{u}, \bar{u}]$  中变化,标准差在  $[\underline{\sigma}, \bar{\sigma}]$  中波动,则  $R_t \sim \mathcal{N}([\underline{u}, \bar{u}], [\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2])$ 。在风险水平为  $\alpha$  (例如 10%、5%、1%) 时,一般 G-VaR 表达式为

$$G-VaR_\alpha(R_{t, [\underline{u}, \bar{u}], [\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2]}) = \underline{u} + \bar{\sigma} \Phi^{-1}\left(\frac{\bar{\sigma} + \underline{\sigma}}{2\bar{\sigma}} \alpha\right), \quad 0 < \alpha < \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma} + \underline{\sigma}}. \quad (3)$$

本文同时考虑美国标准普尔 500 指数 (Standard & Poors 500 composite stock price index, S& P500 Index) 与上证综合指数 (Shanghai (securities) composite index) 的收益率分解序列均存在均值和标准差不确定的情况,对于给定样本数据  $\{D_{j,t}\}$  (或  $\{S_{j,t}\}$ )  $j = 1, 2, \dots, J$ ,  $t = 1, 2, \dots, T$ ,在任意固定时刻  $\bar{t}$ ,参考宫晓琳等<sup>[1]</sup>使用的移动窗口法,设定窗口为  $W_0$ ,分别计算  $\bar{t}+1$  时刻之前、长度为  $K$  ( $K > W_0$ ) 的样本区间内的下均值  $\underline{u}$  以及上、下标准差  $\bar{\sigma}, \underline{\sigma}$ ,以预测不同频域尺度内时刻  $\bar{t}+1$  的 G-VaR,以此类推,计算各个尺度的时变 G-VaR 序列,记为  $\{G-VaR^{(D_1)}, G-VaR^{(D_2)}, \dots, G-VaR^{(D_j)}, G-VaR^{(S_j)}\}$ ,其中,

$$G-VaR^{(D_j)} = \underline{u}_{D_j} + \bar{\sigma}_{D_j} \Phi^{-1}\left(\frac{\bar{\sigma}_{D_j} + \underline{\sigma}_{D_j}}{2\bar{\sigma}_{D_j}} \alpha\right), \quad 0 < \alpha < \frac{\bar{\sigma}_{D_j}}{\bar{\sigma}_{D_j} + \underline{\sigma}_{D_j}}, \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad (4)$$

$$\text{G-VaR}^{(S_j)} = \underline{u}_{S_j} + \bar{\sigma}_{S_j} \Phi^{-1} \left( \frac{\bar{\sigma}_{S_j} + \sigma_{S_j}}{2\bar{\sigma}_{S_j}} \alpha \right), \quad 0 < \alpha < \frac{\bar{\sigma}_{S_j}}{\bar{\sigma}_{S_j} + \sigma_{S_j}}, \quad (5)$$

$\underline{u}_{D_j}(\underline{u}_{S_j})$  为  $D_j(S_j)$  级尺度子序列的下均值,  $\bar{\sigma}_{D_j}, \sigma_{D_j}(\bar{\sigma}_{S_j}, \sigma_{S_j})$  分别为  $D_j(S_j)$  级尺度子序列的上、下标准差。

### 3) W-G-VaR 模型的重构

将各频域尺度上的 G-VaR 聚合就得到本文的 W-G-VaR 模型, 模型如下:

$$\sum_{j=1}^J \text{G-VaR}^{(D_j)} + \text{G-VaR}^{(S_j)}. \quad (6)$$

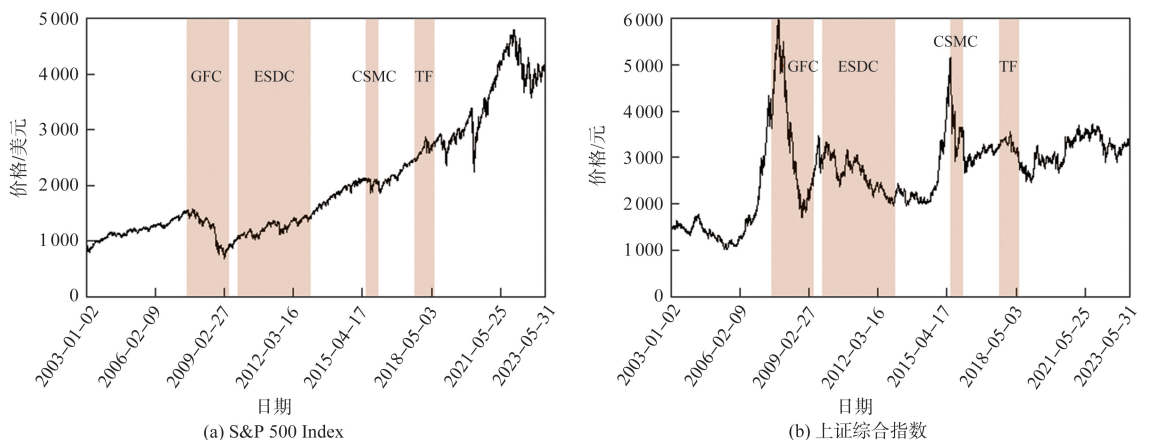
W-G-VaR 模型结合了小波多分辨率分析与非线性期望理论的优点, 考虑了不同频域内金融时间序列的概率分布不确定性的现实特征。

## 2 实证过程及分析

### 2.1 数据选取与统计分析

本文选择最具代表性的发达股票市场与新兴股票市场, 即美国股票市场与中国股票市场作为研究对象, 参考文献[21-22]等, 选择美国 S&P 500 Index 与上证综合指数分别作为美国和中国股票市场的样本数据。研究样本期间为 2003 年 1 月 1 日至 2023 年 5 月 31 日, 共 4 793 个样本数据。该样本周期涵盖了一些重大国际事件的影响, 此类事件发生时, 金融系统会处于高度不确定的状态。参考沈悦等<sup>[23]</sup>对各重大时间窗口设置如下: 2007 年 7 月 3 日至 2009 年 5 月 15 日为国际金融危机时期(global financial crisis, GFC); 2009 年 10 月 12 日至 2012 年 12 月 31 日为欧债危机时期(European sovereign debt crisis, ESDC); 2015 年 6 月 15 日至 2016 年 1 月 7 日为中国股灾时期(Chinese stock market crash, CSMC); 2017 年 8 月 14 日至 2018 年 7 月 6 日为中美贸易摩擦时期(Sino-US trade friction, TF)。本文使用的收益率计算公式为  $R_t = \log(P_t/P_{t-1}) \times 100$ , 其中  $P_t$  表示  $t$  时刻股票指数价格。

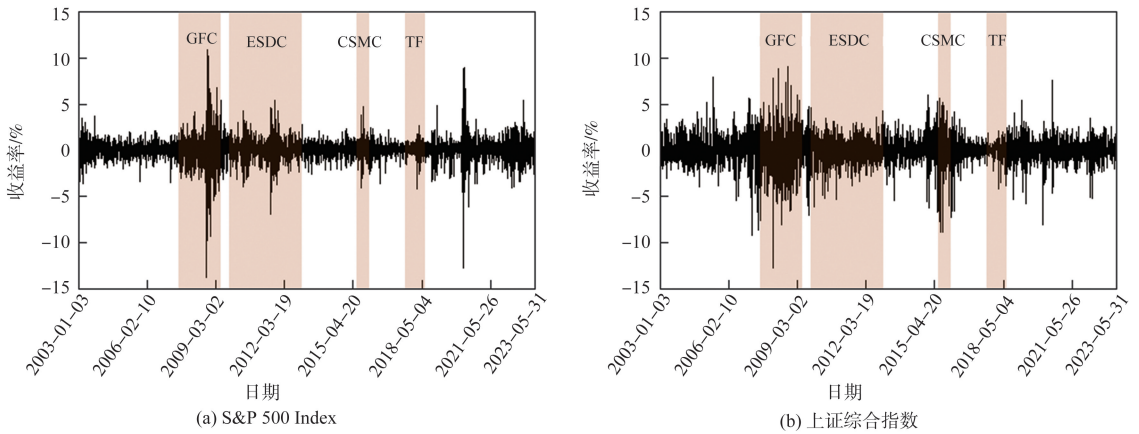
图 2 为 S&P 500 Index 与上证综合指数价格时序图。在样本期间, 美国股票市场呈现上升趋势, 在全球金融危机期间呈现明显下降, 中国股票市场在各重大事件期间均呈现明显的陡增陡降现象, 在全球金融危机和中国股灾期间尤为明显。图 3 为 2 个股票指数的收益率时序图。可以发现, 在各重大国际事件期间, 美国与中国股票市场均出现明显的波动聚集性。根据表 1 股票收益率序列的描述性统计发现, 样本期间 2 个股票市场的均值为正, 美国股票市场收益率均值高于中国股票市场收益率均值, 但美国股票市场收益率标准差小于中国股票市场收益率标准差, 2 个市场收益率序列均呈现左偏与尖峰, JB 检验显示样本期间的 2 个股票市场收益率不服从正态分布, ADF 检验显示其均为平稳时间序列, Q(10) 检验结果表明 2 个股票市场收益率均具有 ARCH 效应。



注: 图中阴影部分为重大事件发生时期。

图 2 S&P 500 Index 与上证综合指数价格时序图

Fig.2 Price timing chart of S&P 500 Index and Shanghai (securities) composite index



注:图中阴影部分为重大事件发生时期。

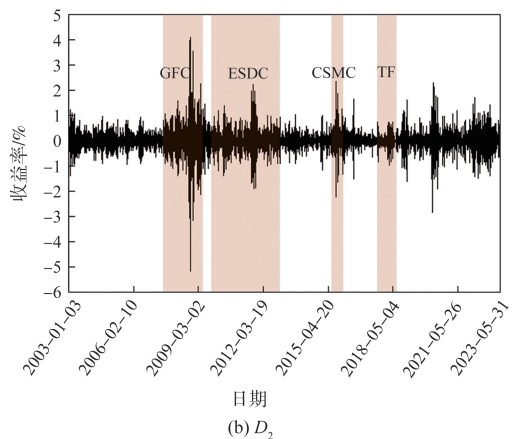
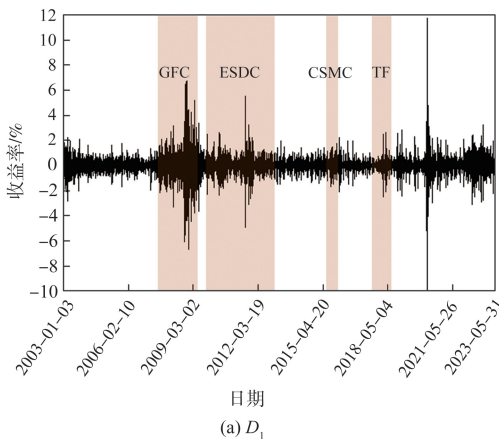
图 3 S&P500 Index 与上证综合指数收益率时序图  
Fig.3 Time series of S&P 500 Index and Shanghai(securities) composite index returns

为了从不同频域范围内捕捉股票收益率序列的波动特征,本文使用 MODWT 方法对美国 S&P 500 Index 与中国上证综合指数收益率序列进行多分辨率分析。借鉴 Trimech 等<sup>[24]</sup>与 Xu 等<sup>[18]</sup>的研究成果,本文使用最适于分解金融时间序列的 Daubechies 小波,对美国 S&P 500 Index 与中国上证综合指数收益率序列进行分解,获得 8 个不同周期长度的子时间序列,分别由小波细节序列  $D_1, D_2, \dots, D_7$  与平滑序列  $S_7$  表示。小波细节序列与平滑序列形成叠加性分解,即将小波细节序列与平滑序列在  $t$  时刻的值相加可以得到美国 S&P 500 Index 与中国上证综合指数收益率序列在  $t$  时刻的值。根据图 4—5 指数收益率序列的 MRA 结果可以发现:第一,随着频率的降低,分解序列中的噪声信息减少而趋势信息增多,波动性减小;第二,所有分解序列上均可以观察到各重大事件冲击造成的波动聚集性,意味着“黑天鹅”事件的发生不仅仅在短期内会引起金融市场的剧烈波动,也会在长期造成影响;第三,与小波分解序列  $D_1, D_2, \dots, D_7$  相比,  $S_7$  更平滑,能量更少,在非重大事件冲击时期,其波动并不显著,但是在重大事件冲击时期仍存在明显的趋势变化。上述几点显示出,尽管随着频率的降低分解序列的波动性减小,但是若事件足够“极端”,那么其产生的影响在长期内并不能完全消失,因此低频数据在风险预警方面仍具有重要参考价值。

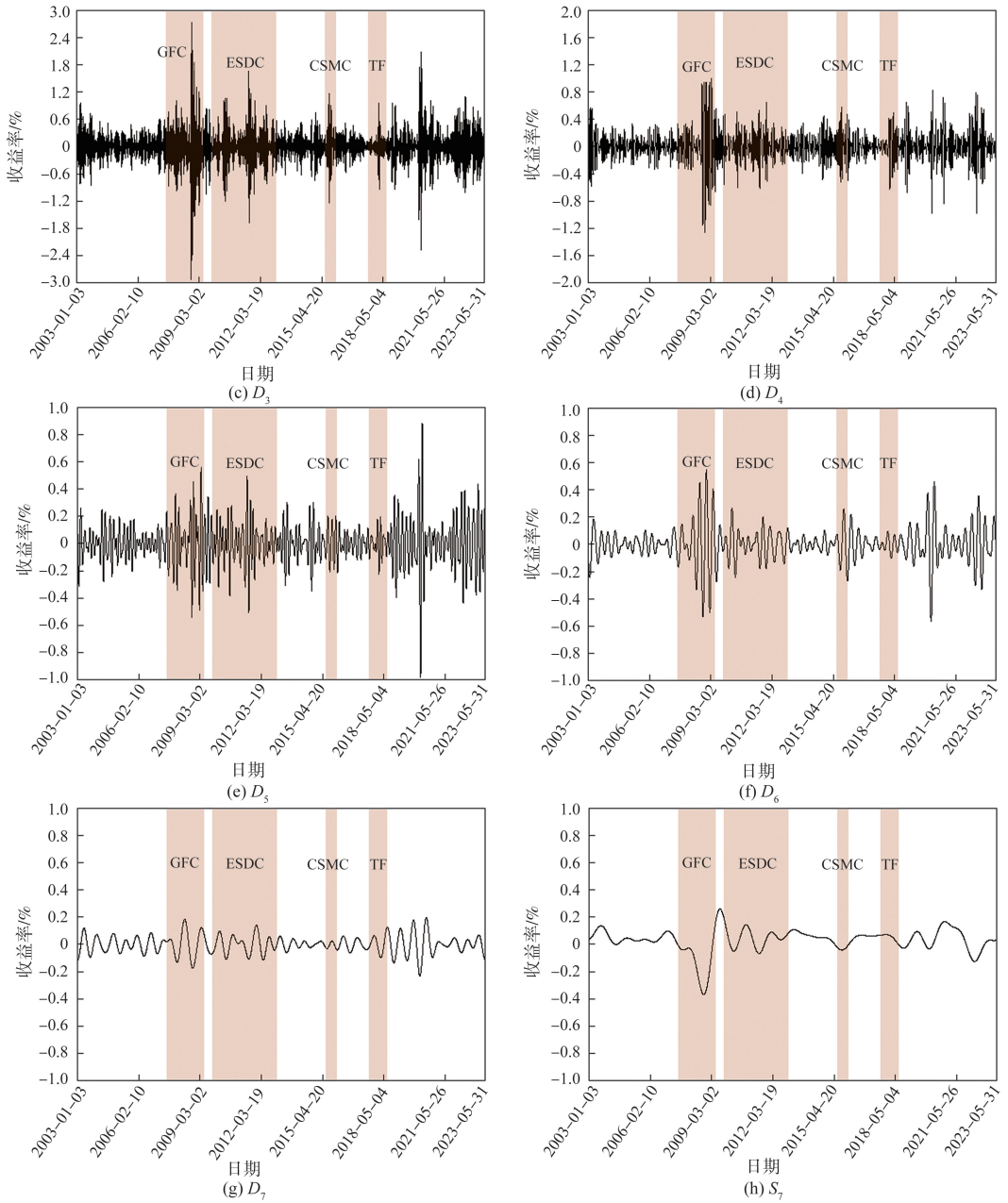
表 1 S&P 500 Index 与上证综合指数收益率描述性统计  
Table 1 Descriptive statistics of returns of S&P 500 Index and Shanghai (securities) composite index

| 统计量   | S&P 500 Index | 上证综合指数    |
|-------|---------------|-----------|
| 均值    | 0.031 8       | 0.018 5   |
| 中位数   | 0.074 4       | 0.051 7   |
| 最大值   | 10.957 2      | 9.034 3   |
| 最小值   | -13.798 9     | -12.763 6 |
| 标准差   | 1.244 3       | 1.543 1   |
| 偏度    | -0.647 6      | -0.538 7  |
| 峰度    | 17.642 5      | 8.597 0   |
| JB    | 43 144 ***    | 6 487 *** |
| ADF   | -17 ***       | -15 ***   |
| Q(10) | 1 288 ***     | 421 ***   |
| 样本量   | 4 792         | 4 792     |

注:\*\*\*表示在 1%显著性水平下拒绝原假设,JB 表示 Jarque-Bera 检验,ADF 为单位根 ADF 检验,Q(10)表示滞后 10 阶的 Ljung-Box 检验。



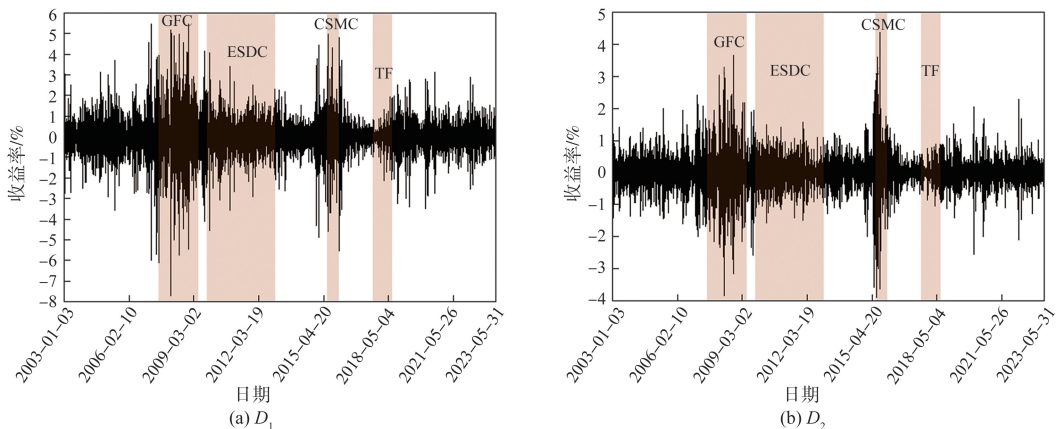
综上所述,对时间序列进行 MRA 所产生的高频信息和低频信息对于衡量系统风险都具有重要作用。

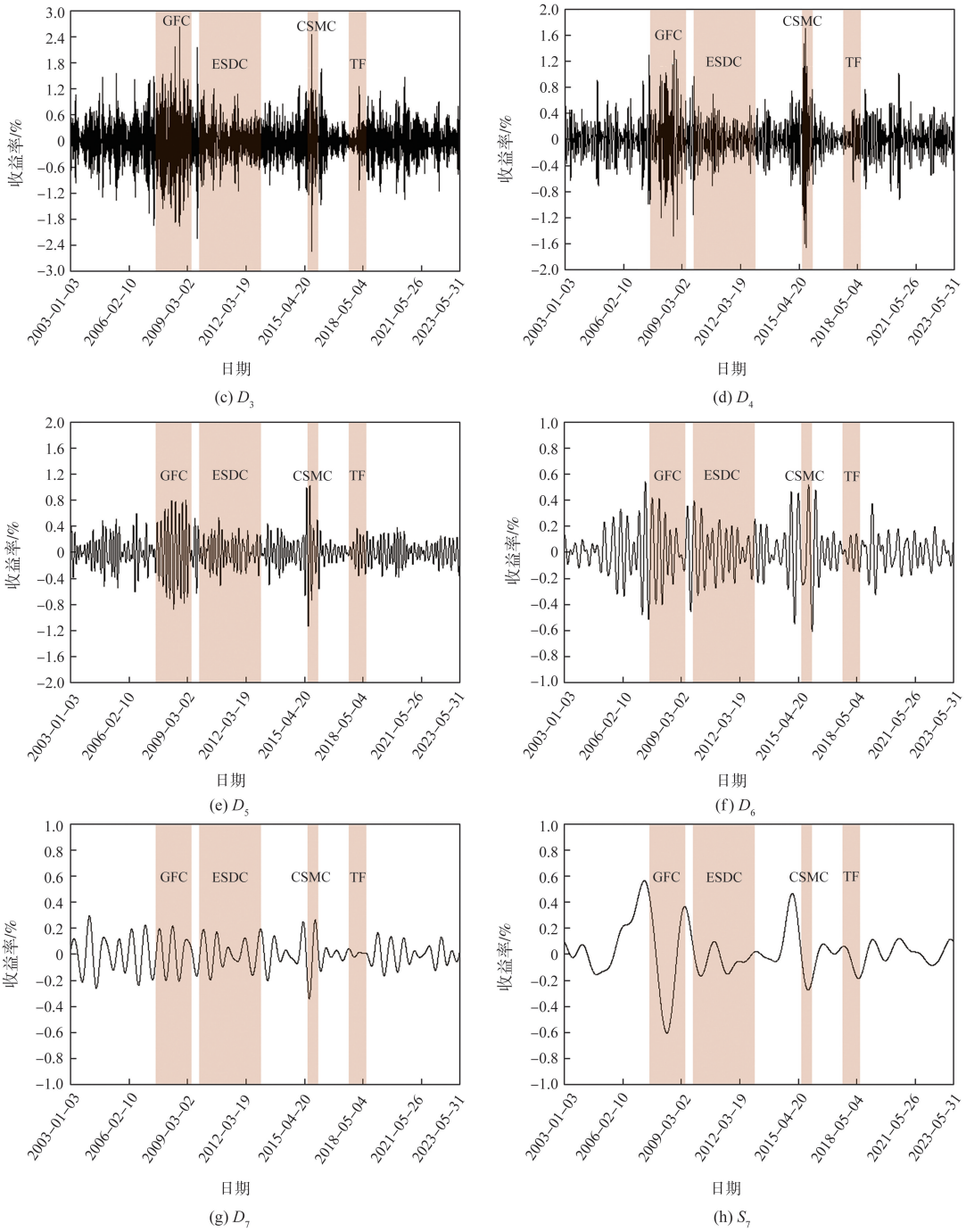


注:阴影部分为重大事件发生时期,在小波多分辨率分析中第  $j$  级小波细节对应着周期范围  $2^j$  到  $2^{j+1}$  的频带,本文界定股票收益率序列周期在 2 到 16 天为短期,即  $D_1, D_2, D_3$ , 股票收益率序列周期在 16 到 64 天为中期,即  $D_4, D_5$ , 股票收益率序列周期在 64 到 256 天为长期,即  $D_6, D_7$ 。  $S_7$  表示周期超过 256 天的所有波动。

图 4 S&P 500 Index 收益率的多分辨率分析

Fig.4 Multi-resolution analysis of S&P 500 stock index returns

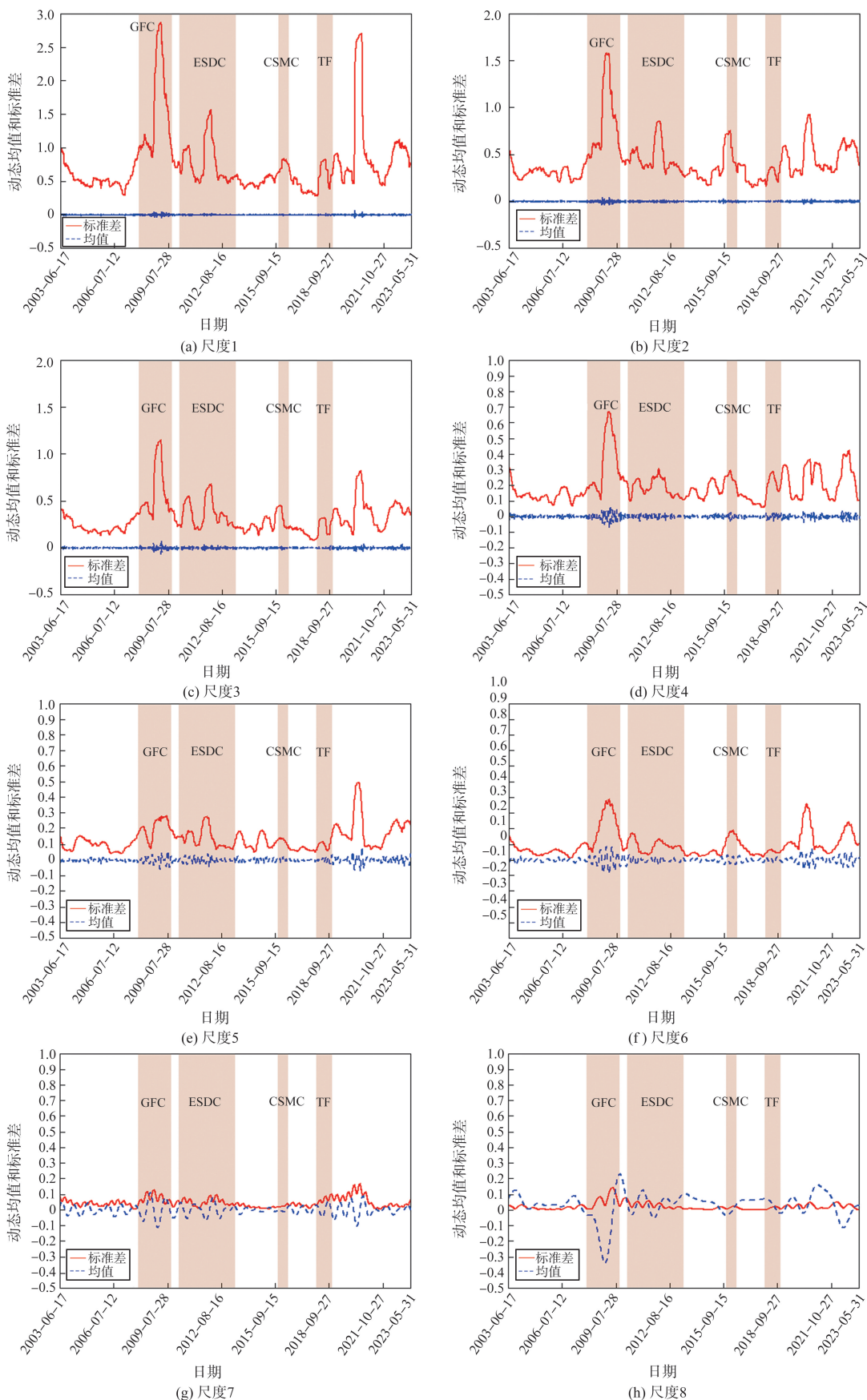




注: 阴影部分为重大事件发生时期, 在小波多分辨率分析中第  $j$  级小波细节对应着周期范围  $2^j$  到  $2^{j+1}$  的频带, 本文界定股票收益率序列周期在 2 到 16 天为短期, 即  $D_1$ 、 $D_2$ 、 $D_3$ , 股票收益率序列周期在 16 到 64 天为中期, 即  $D_4$ 、 $D_5$ , 股票收益率序列周期在 64 到 256 天为长期, 即  $D_6$ 、 $D_7$ 。  $S_7$  表示周期超过 256 天的所有波动。

图 5 上证综合指数收益率的多分辨率分析  
Fig.5 Multi-resolution analysis of Shanghai (securities) composite index returns

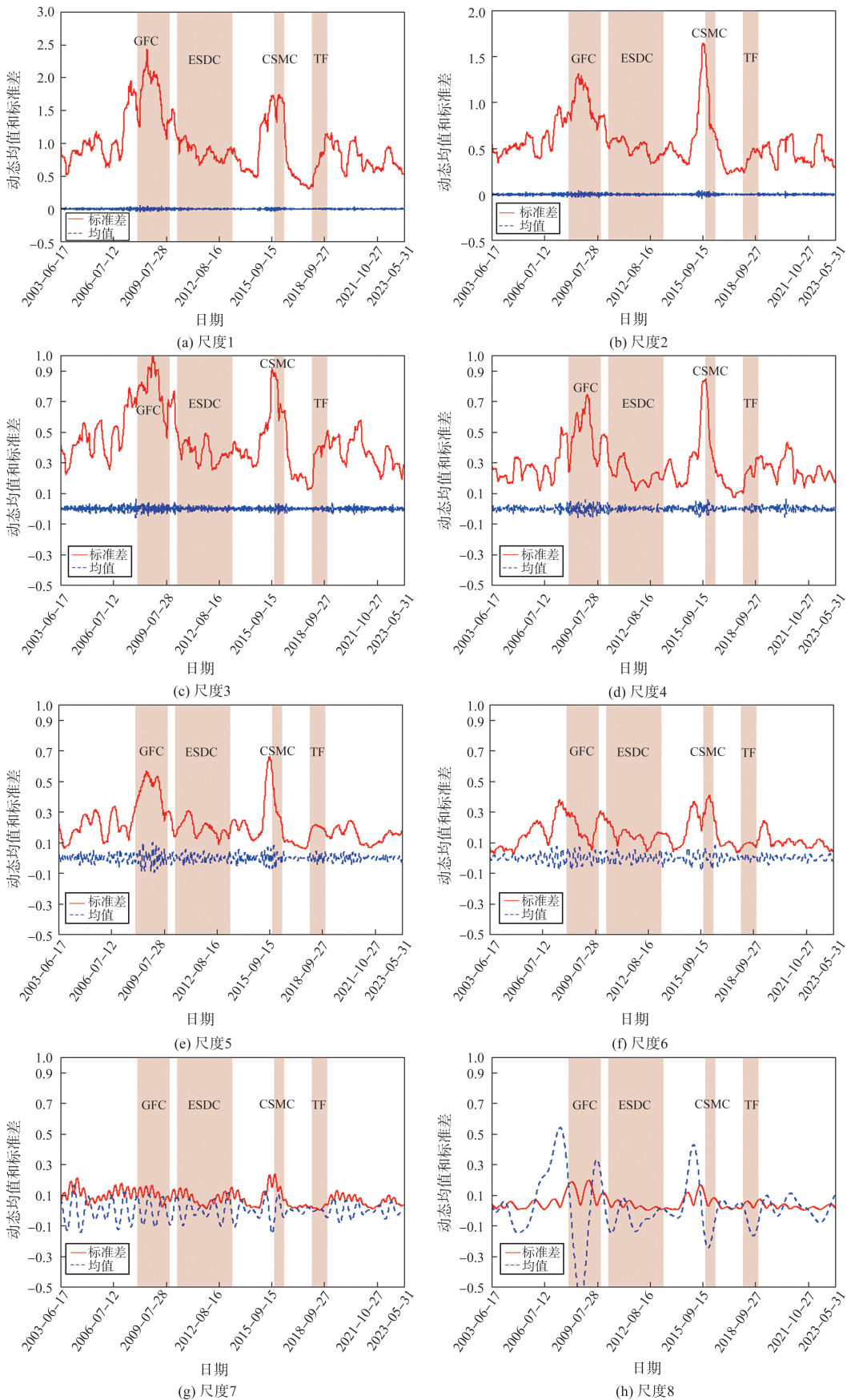
本文将金融时间序列的概率分布不确定性特征检验由时域扩展至频域, 参考宫晓琳等<sup>[1]</sup>的滑动窗口法, 计算各尺度上的收益率子序列的动态均值与标准差, 发现各分解子序列均存在概率分布不确定性特征。图 6—7 分别为美国与中国股票指数收益率分解子序列的动态均值与标准差, 均值与标准差均呈现较为明显的动态变化。标准差序列随着频率的降低, 波动幅度减弱, 相反, 均值序列随着频率的降低, 波动幅度反而增强, 在较低频域内均值序列变化幅度超越了标准差序列的变化幅度, 显示出股票指数在原序列及分解子序列上均具有概率分布不确定性特征, 尤其在重大风险时期的概率分布不确定性特征增强, 因此在进行风险价值计算时必须考虑到这一点。



注:尺度 1—7 展示小波细节序列  $D_1—D_7$  的动态均值与标准差,尺度 8 展示平滑序列  $S_7$  的动态均值与标准差,阴影部分代表重大事件发生时期,滑动窗口大小为 100。

图 6 S&P 500 Index 分解序列的动态均值与标准差

Fig.6 Dynamic mean and standard deviation of the S&P 500 decomposition sequence



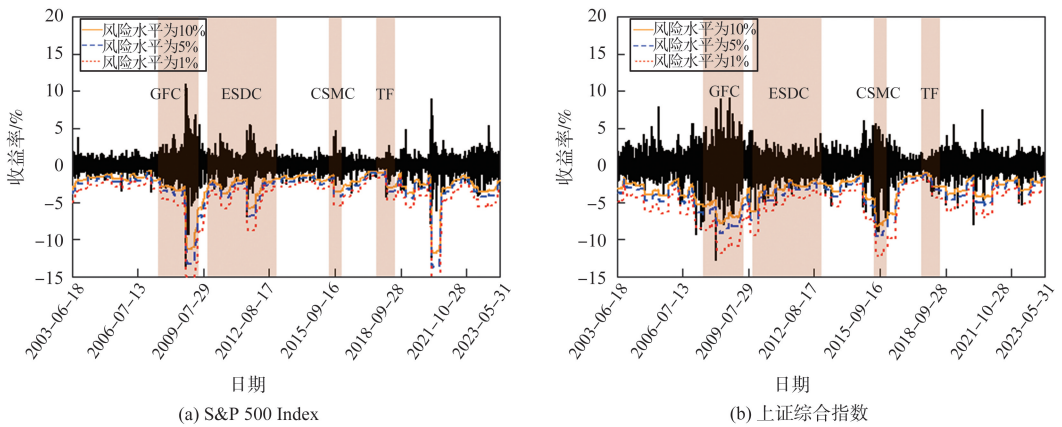
注:尺度1—7展示小波细节序列  $D_1$ — $D_7$  的动态均值与标准差,尺度8展示平滑序列  $S_7$  的动态均值与标准差,阴影部分为重大事件发生时期,窗口大小为100。

图7 上证综合指数分解序列的动态均值与标准差

Fig.7 Dynamic mean and standard deviation of Shanghai (securities) composite index decomposition sequence

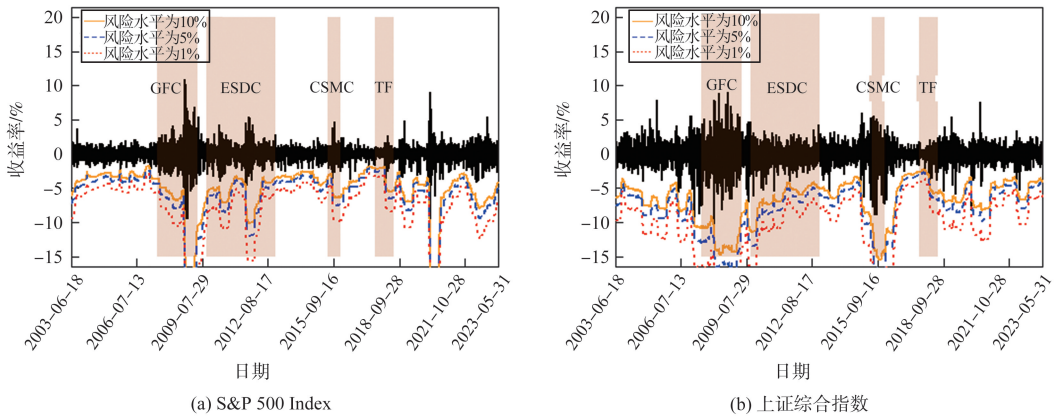
### 2.2 股票市场的风险测度

本部分基于 W-G-VaR 模型计算美国标准普尔 500 指数与中国上证综合指数收益率序列的风险价值,并与 G-VaR 模型的测度结果作比较,以证实从频域视角捕捉概率分布不确定特征的必要性。VaR 的计算过程见图 1,首先使用 MODWT 方法将原始股票收益率序列分别分解成 8 个不同尺度上的子序列,在各个子序列上基于非线性期望理论计算各子序列的 G-VaR,最后将 8 个子序列的 G-VaR 相加,得到 W-G-VaR 模型的估计值。图 8 展示了基于 G-VaR 模型计算出来的 2 个股票市场的时变风险价值,各模型的风险价值随着风险水平逐渐减小而逐渐增大,时变 VaR 序列与原始收益率序列波动趋势高度相似,在重大风险事件发生期间 VaR 均出现较为明显的下降,但是仍不足以覆盖股票市场的损失(可以通过观察重大事件发生期间收益率序列多次穿透 VaR 序列得到)。图 9 为基于 W-G-VaR 模型计算的风险价值,可以发现其普遍小于基于 G-VaR 模型计算的风险价值,因为前者综合考虑了不同频域范围内的风险,W-G-VaR 模型度量结果均与实际收益率的波动形态同样具有一致性,且相较于 G-VaR 模型,W-G-VaR 更加准确地捕捉到了股票收益率受外界冲击影响下的剧烈波动。



注:阴影部分为重大事件发生时期。图 8 为滑动窗口( $W_0$  为 20, $K$  为 100)的 G-VaR 模型的测度结果。

图 8 G-VaR 模型风险测度结果  
Fig.8 Risk measurement results of G-VaR model



注:阴影部分为重大事件发生时期。图 9 为滑动窗口( $W_0$  为 20, $K$  为 100)的 W-G-VaR 模型的测度结果。

图 9 W-G-VaR 模型风险测度结果  
Fig.9 Risk measurement results of W-G-VaR model

表 2 展示了 G-VaR 模型与 W-G-VaR 模型在滑动窗口  $K$  为 50、100、150 下的突破次数与突破率。通过比较 G-VaR 模型与 W-G-VaR 模型的突破次数、突破率可以看出,在各风险水平下,W-G-VaR 模型的突破率在各样本本区内均明显下降,度量准确性显著提升,且在中国股票市场与美国股票市场上表现基本一致,随着窗口的增大,风险测度模型可以识别到更多收益波动信息,G-VaR 模型与 W-G-VaR 模型的准确率都有一定程度增加,但在相同条件下,W-G-VaR 模型准确性始终优于 G-VaR 模型。此外通过对 G-VaR 模型与 W-G-VaR 模型风险测度结果进行回测检验进一步证明 W-G-VaR 模型具有更优的风控效力和最小的负外溢

效应。本文参考 Lopez<sup>[25]</sup>与宫晓琳等<sup>[1]</sup>使用的规模损失函数方法对各模型的估计结果进行检验<sup>①</sup>。定义损失函数为

$$C_t = \begin{cases} 1 + (R_{t+1} - VaR_t)^2, & R_{t+1} < VaR_t, \\ 0, & R_{t+1} \geq VaR_t, \end{cases} \quad (7)$$

其中,  $R_{t+1}$  表示  $t+1$  时刻的实际收益率,  $VaR_t$  表示对  $t+1$  时刻 VaR 的估计值。对于动态风险测度序列, 最终损失函数值为  $C = \sum_{t=1}^{T-k} C_t$ , 其中,  $T-k$  为 VaR 估计值的个数, 损失函数值越小说明模型准确性越高。根据表 3, W-G-VaR 模型的损失函数值显著低于相应 G-VaR 模型, 说明从时域和频域双视角下考虑股票指数收益序列的概率分布不确定性特征可以有效提高风险测度模型的准确性。

表 2 G-VaR 与 W-G-VaR 模型的突破率、突破次数

Table 2 Breakthrough rates and numbers of G-VaR and W-E-VaR models

| K   | 置信水平/% | S&P 500 Index |             | 上证综合指数       |             |
|-----|--------|---------------|-------------|--------------|-------------|
|     |        | G-VaR         | W-G-VaR     | G-VaR        | W-G-VaR     |
| 50  | 10     | 184(0.038 8)  | 20(0.004 2) | 173(0.036 5) | 20(0.004 2) |
|     | 5      | 114(0.024 0)  | 8(0.001 7)  | 101(0.021 3) | 5(0.001 1)  |
|     | 1      | 51(0.010 8)   | 2(0.000 4)  | 42(0.008 9)  | 1(0.000 2)  |
| 100 | 10     | 97(0.020 7)   | 8(0.001 7)  | 95(0.020 2)  | 4(0.000 9)  |
|     | 5      | 60(0.012 8)   | 5(0.001 1)  | 50(0.010 7)  | 2(0.000 4)  |
|     | 1      | 24(0.005 1)   | 2(0.000 4)  | 19(0.004 0)  | 1(0.000 2)  |
| 150 | 10     | 64(0.013 8)   | 5(0.001 1)  | 65(0.014 0)  | 4(0.000 9)  |
|     | 5      | 40(0.008 6)   | 4(0.000 9)  | 36(0.007 8)  | 1(0.000 2)  |
|     | 1      | 14(0.003 0)   | 0(0.000 0)  | 12(0.002 6)  | 1(0.000 2)  |

表 3 G-VaR 与 W-G-VaR 模型的损失函数值

Table 3 Loss function values of G-VaR and W-G-VaR models

| K   | 置信水平/% | S&P 500 Index |          | 上证综合指数    |          |
|-----|--------|---------------|----------|-----------|----------|
|     |        | G-VaR         | W-G-VaR  | G-VaR     | W-G-VaR  |
| 50  | 10     | 501.839 2     | 51.071 6 | 682.901 9 | 51.271 7 |
|     | 5      | 326.865 5     | 18.166 4 | 423.741 1 | 14.850 9 |
|     | 1      | 154.162 1     | 2.093 3  | 184.340 2 | 1.607 5  |
| 100 | 10     | 339.173 5     | 31.731 8 | 370.947 6 | 20.146 3 |
|     | 5      | 228.451 3     | 12.372 3 | 221.313 3 | 7.538 1  |
|     | 1      | 109.747 2     | 2.027 9  | 97.170 7  | 1.330 8  |
| 150 | 10     | 267.364 7     | 23.517 5 | 282.289 4 | 13.284 1 |
|     | 5      | 180.956 8     | 8.959 1  | 167.499 2 | 4.974 3  |
|     | 1      | 85.377 7      | 0.000 0  | 70.182 4  | 1.047 3  |

损失函数值可以作为比较模型预测能力的标准, 然而仅凭其值的大小不足以判断模型预测能力的优劣, 因为 2 个模型的预测误差之间的差异可能并不显著, 基于此, 本文参考 He 等<sup>[9]</sup>使用 Diebold-Mariano 检验 (DM 检验)<sup>[26]</sup>进一步衡量 W-G-VaR 模型相对于 G-VaR 模型的预测准确性。DM 检验主要用于模型两两之间的比较, 基于 G-VaR 模型与 W-G-VaR 模型的损失函数构造 DM 统计量

$$DM = \frac{S - T(T+1)/4}{\sqrt{\frac{T(T+1)(2T+1)}{24}}} \sim N(0, 1), \quad (8)$$

① 实证研究中 Kupiec(1995)无条件覆盖检验(UC)与 Christoffersen(1998)条件覆盖检验(CC)是常用的回测检验方法, 但是基于假设检验的 VaR 模型评价方法(如 UC、CC)的检测结果依赖于单一计量标准, 仅能为 VaR 模型的实际精确性提供有效信息, 其有效性颇具争议<sup>[1,25]</sup>。本文也使用 VaR 测度模型无条件覆盖检验(UC)与条件覆盖检验(CC), 结果显示, G-VaR 模型由于其风险控制结果太好, 突破率过低也无法通过回测检验, 这与宫晓琳等<sup>[1]</sup>使用 G-VaR 模型测度深成指数的收益率波动风险回测结果一致, 因此本文选用损失函数法进行回测检验。

其中,  $S = \sum_{i=1}^T I+(d_i) \text{rank}(|d_i|)$ ,  $I+(d_i) = \begin{cases} 1, & d_i > 0 \\ 0, & d_i < 0 \end{cases}$  是指示函数,  $\text{rank}(|d_i|)$  为两个模型对应损失函数的差分序列取绝对值, 按从小到大的顺序进行排序后的对应序数值。若计算结果拒绝原假设, 则证明 W-G-VaR 模型的预测能力优于 G-VaR 模型。根据表 4 DM 检验结果显示, 在绝大多数情况下, W-G-VaR 模型预测能力优于 G-VaR 模型。

表 4 G-VaR 模型与 W-G-VaR 模型的 DM 检验结果  
Table 4 DM test results of G-VaR model and W-G-VaR model

| K   | 置信水平/% | S&P 500 Index    | 上证综合指数           |
|-----|--------|------------------|------------------|
| 50  | 10     | 3.397 9(0.000 7) | 5.061 5(0.000 0) |
|     | 5      | 2.653 7(0.008 0) | 3.913 1(0.000 1) |
|     | 1      | 1.933 5(0.053 2) | 2.634 9(0.008 4) |
| 100 | 10     | 2.661 9(0.007 8) | 3.459 2(0.000 5) |
|     | 5      | 2.179 7(0.029 3) | 2.614 3(0.009 0) |
|     | 1      | 1.685 9(0.091 9) | 1.811 7(0.070 1) |
| 150 | 10     | 2.264 6(0.023 6) | 3.083 7(0.002 1) |
|     | 5      | 1.855 8(0.063 5) | 2.433 4(0.015 0) |
|     | 1      | 1.424 3(0.154 4) | 1.781 1(0.075 0) |

注: 括号外为 DM 检验的统计量, 括号内为相应  $p$  值。

### 3 结语

股票市场的风险大小时刻影响投资者与融资者以及政府的决策, 因此构建更加准确的风险测度模型, 及时识别、监测、防控股票市场风险具有重要意义。本文首先基于 MODWT 方法从频域视角剖析美国 S&P 500 Index 指数与中国上证综合指数收益率序列的动态特征与概率分布不确定性; 其次, 基于“分解-预测-重构”思想, 将非线性期望理论应用于不同分解尺度, 构建了 W-G-VaR 模型, 该模型从不同频域尺度范围捕捉了收益率序列的概率分布不确定性特征, 更具现实意义与审慎性。同时, 本文将 W-G-VaR 模型与 G-VaR 风险测度模型的度量准确性进行比较, 其结果证实从时域和频域双视角下考虑金融时间序列的概率分布不确定性特征可以最大程度提高风险测度模型的准确性。

本文的实证结果对金融风险测度有以下 2 点启示。首先, 在对金融资产进行风险测度时要充分考虑其现实特征, 如金融时间序列所具有的概率分布不确定性特征, 尤其是“黑天鹅”事件发生往往伴随经济下行、产业链断裂、投资者情绪波动和投资者偏好变化以及国家重要政策的颁布, 从而通过信息机制和风险传染机制影响金融市场, 金融资产损失的潜在分布往往发生变化且难以预测, 若仍采用传统概率分布确定的风险测度模型会对投资者造成巨大损失, 甚至引发系统性金融风险。此外, 不同尺度内的频域信息对提高风险测度模型的准确性也至关重要, 某些事件造成的风险在长期内被市场化解, 而少数“极端”事件造成的风险不仅在高频域内表现显著, 甚至在低频域也会引起金融资产统计特征长期偏移历史水平, 从而对风险估计造成影响。

#### 参考文献:

- [1] 宫晓琳, 彭实戈, 杨淑振, 等. 基于不确定性分布的金融风险审慎管理研究[J]. 经济研究, 2019, 54(7): 64-77.  
GONG Xiaolin, PENG Shige, YANG Shuzhen, et al. Research on prudent management of financial risk based on uncertainty distribution[J]. Economic Research Journal, 2019, 54(7): 64-77.
- [2] 宫晓琳, 杨淑振, 孙怡青, 等. 基于概率统计不确定性模型的 CCA 方法[J]. 管理科学学报, 2020, 23(4): 55-64.  
GONG Xiaolin, YANG Shuzhen, SUN Yiqing, et al. CCA method based on probabilistic statistical uncertainty model[J]. Journal of Management Science, 2020, 23(4): 55-64.
- [3] 彭实戈. 非线性期望的理论、方法及意义[J]. 中国科学: 数学, 2017, 47(10): 1223-1254.  
PENG Shige. Theory, method and significance of nonlinear expectation[J]. Scientia Sinica Mathematica, 2017, 47(10): 1223-1254.
- [4] 宫晓琳, 杨淑振, 胡金焱, 等. 非线性期望理论与基于模型不确定性的风险度量[J]. 经济研究, 2015, 50(11): 133-147.  
GONG Xiaolin, YANG Shuzhen, HU Jinyan, et al. Nonlinear expectation theory and risk measurement based on model uncer-

- tainty[J]. *Economic Research Journal*, 2015, 50(11):133-147.
- [5] PEI Ziting, WANG Xishun, XU Yuhong, et al. A worst-case risk measure by G-VaR[J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, 2021, 37(2):421-440.
- [6] JIN Hanqing, PENG Shige. Optimal unbiased estimation for maximal distribution[EB/OL]. (2016-11-23)[2023-07-22]. <https://arxiv.org/abs/1611.07994v1>.
- [7] 彭选华,傅强. 基于小波多尺度分析的 GARCH 建模方法的拓展[J]. *系统工程理论与实践*,2011,31(11):2060-2069.  
PENG Xuanhua, FU Qiang. Expansion of GARCH modeling method based on wavelet multi-scale analysis[J]. *Systems Engineering Theory & Practice*, 2011, 31(11):2060-2069.
- [8] CHAKRABARTY A, DE A, GUNASEKARAN A, et al. Investment horizon heterogeneity and wavelet: overview and further research directions[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2015, 429:45-61.
- [9] HE K J, LAI K K, YEN J. Ensemble forecasting of Value at Risk via multi resolution analysis based methodology in metals markets[J]. *Expert Systems with Applications*, 2012, 39(4):4258-4267.
- [10] FERNANDEZ V. The CAPM and value at risk at different time-scales[J]. *International Review of Financial Analysis*, 2006, 15(3):203-219.
- [11] GENÇAY R, SELÇUK F, WHITCHER B. Systematic risk and timescales[J]. *Quantitative Finance*, 2003, 3(2):108-116.
- [12] FERNANDEZ V, LUCEY B M. Portfolio management under sudden changes in volatility and heterogeneous investment horizons[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2007, 375(2):612-624.
- [13] MANCHANDA P, KUMAR J, SIDDIQI A. Mathematical methods for modelling price fluctuations of financial times series [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2007, 344(5):613-636.
- [14] GENÇAY R, GRADOJEVIC N, SELÇUK F, et al. Asymmetry of information flow between volatilities across time scales [J]. *Quantitative Finance*, 2010, 10(8):895-915.
- [15] 方意,和文佳,荆中博. 中美贸易摩擦对中国金融市场的溢出效应研究[J]. *财贸经济*,2019,40(6):55-69.  
FANG Yi, HE Wenjia, JING Zhongbo. Research on the spillover effect of Sino-US trade frictions on China's financial market [J]. *Finance and Trade Economics*, 2019, 40(6):55-69.
- [16] 胡春阳,马亚明,马金娅. 重大事件冲击下金融市场与实体经济间双向尾部风险溢出效应[J]. *金融经济研究*,2023, 38(2):3-19.  
HU Chunyang, MA Yaming, MA Jinya. Bidirectional tail risk spillover effect between financial market and real economy under impact of major events[J]. *Research in Financial Economics*, 2023, 38(2):3-19.
- [17] 崔金鑫,邹辉文. 时频视角下国际股市间高阶矩风险溢出效应研究[J]. *国际金融研究*,2020,36(6):75-85.  
CUI Jinxin, ZOU Huiwen. Research on high-moment risk spillover effect between international stock markets from time-frequency perspective[J]. *International Finance Research*, 2020, 36(6):75-85.
- [18] XU Qifa, JIN Bei, JIANG Cuixia. Measuring systemic risk of the Chinese banking industry: a wavelet-based quantile regression approach[J]. *The North American Journal of Economics and Finance*, 2021, 55:1-13.
- [19] PERCIVAL D, WALDEN A. *Wavelet methods for time series analysis*[M]. Cambridge: Cambridge Press, 2000.
- [20] PENG Shige, YANG Shuzhen, YAO Jianfeng. Improving Value-at-Risk prediction under model uncertainty[J]. *Journal of Financial Econometrics*, 2023, 21(1):228-259.
- [21] 许启发,陈士俊,蒋翠侠,等. 极端 VaR 风险测度的新方法:QRNN+POT[J]. *系统工程学报*,2016,31(1):33-44.  
XU Qifa, CHEN Shijun, JIANG Cuixia, et al. A new method for extreme VaR risk measurement: QRNN+POT[J]. *Journal of Systems Engineering*, 2016, 31(1):33-44.
- [22] SONG Shijia, LI Handong. Predicting VaR for China's stock market: a score-driven model based on normal inverse Gaussian distribution[J].*International Review of Financial Analysis*, 2022, 82:1-20.
- [23] 沈悦,李朝前,赵欣悦,等. 重大风险事件下全球股票市场风险传染效应研究[J]. *国际经贸探索*,2023,39(4):83-99.  
SHEN Yue, LI Chaoqian, ZHAO Xinyue, et al. Study on the risk contagion effect of global stock market under major risk events[J]. *Journal of International Economic and Trade Exploration*, 2023, 39(4):83-99.
- [24] TRIMECH A, BENAMMOU S. Multiscale Fama-French and VaR explanatory factor analysis: evidence to the French market [J]. *International Journal of Decision Sciences, Risk and Management*, 2012, 4(1/2):58-76.
- [25] LOPEZ J A. Methods for evaluating Value-at-Risk estimates[J]. *Federal Reserve Bank of San Francisco Economic Review*, 1999, 2:3-17.
- [26] DIEBOLD F, MARIANO R. Comparing predictive accuracy[J]. *Journal of Business & Economic Statistics*, 1994, 13(3): 253-263.