

若干联图的邻点可约全标号

王江,李敬文*,高鑫,孙亮晶

(兰州交通大学电子与信息工程学院,甘肃兰州730070)

摘要:对于无向连通图 $G(V,E)$,若存在一个单映射 $f:V(G)\cup E(G)\rightarrow\{1,2,\dots,|V|+|E|\}$,如果 $uv\in E(G)$ 且 $d(u)=d(v)$,有 $S(u)=S(v)$,其中 $S(u)=f(u)+\sum_{uz\in E(G)}f(uz)$, $d(u)$ 表示点 u 的度,则称 f 为 G 的邻点可约全标号(adjacent vertex reducible total labeling, AVRTL)。结合遗传算法和粒子群算法设计一种启发式搜索算法,可以判断有限点内随机图是否存在 AVRTL。通过对实验结果分析,总结了若干联图的定理并给出证明。得到结论:如果子图 G_1 和 G_2 是 AVRTL 图,则图运算 \uparrow_{ab} 具有封闭性,即联图 $G_1\uparrow_{ab}G_2$ 亦为 AVRTL 图。

关键词:联图;邻点可约全标号;AVRTL图;启发式搜索算法;图运算

中图分类号:O157.6 **文献标志码:**A

引用格式:王江,李敬文,高鑫,等.若干联图的邻点可约全标号[J].山东大学学报(理学版),2025,60(8):57-67.

Adjacent vertex reducible total labeling of some joint graphs

WANG Jiang, LI Jingwen*, GAO Xin, SUN Liangjing

(School of Electronics and Information Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, Gansu, China)

Abstract: For an undirected connected graph $G(V,E)$, if there exists a single mapping $f:V(G)\cup E(G)\rightarrow\{1,2,\dots,|V|+|E|\}$, and conditions $uv\in E(G)$ and $d(u)=d(v)$ are satisfied, then there exists $S(u)=S(v)$, where $S(u)=f(u)+\sum_{uz\in E(G)}f(uz)$ holds. Let $d(u)$ denote the degree of vertex u ; thus, f is referred to as an adjacent vertex reducible total labeling (AVRTL) of G . This study combines genetic algorithms and particle swarm algorithms to design a heuristic search algorithm that can determine whether a random graph with a finite number of vertices contains an AVRTL. Through the analysis of experimental results, several theorems regarding linked graphs are summarized and proved. Finally, the following conclusion is drawn: if subgraphs G_1 and G_2 are AVRTL graphs, then the graph operation \uparrow_{ab} exhibits closure, meaning the linked graph $G_1\uparrow_{ab}G_2$ is also an AVRTL graph.

Key words: joint graphs; adjacent vertex reducible total labeling; AVRTL graphs; heuristic search algorithms; graph operations

0 引言

图论在社交网络分析、交通规划、通信网络设计和生物信息学等领域得到广泛应用,为解决实际问题提供了有力的工具和理论支持,并且与计算机算法、机器学习以及深度学习等领域的交叉应用,进一步推动了图论的应用和发展。

图标号问题是图论中的一个重要的研究方向,具有很大的研究价值。Ringel^[1]提出一个猜想:假设 T 是一个给定的有 n 个顶点、 $n-1$ 条边的树,由 k_{2n-1} 可分解成同构于 T 的 $2n-1$ 个树。Rosa^[2]提出所有的树都是优美的猜想。随后,图的标号问题得到了快速的发展,诞生了许多图标号种类,如优雅标号^[3]、优美标号、幻和标号^[4]等。近年来,有学者提出了距离标号^[5]、邻点可约边标号^[6]、点可约全标号^[7]等新的标号概念,并

收稿日期:2023-11-08;网络出版时间:2024-12-19 11:40:56

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11961041,62262038);甘肃省自然科学基金资助项目(24JRRA222)

第一作者:王江(1997—),男,硕士研究生,研究方向为图论算法及应用. E-mail:aries_mar5wj@163.com

*通信作者:李敬文(1965—),男,教授,硕士生导师,研究方向为图论算法及应用. E-mail:lijingwen28@163.com

尝试将距离标号应用于力学计算等领域,优美标号应用于通讯网络等领域。

针对在电力分布网络中的问题,若节点的权值表示变压器,边的权值表示输电电压,则要求相邻的度相同的变压器保持电力基本相等,同时确定电力网络中的最佳传输线路达到极值的情况,可以用邻点可约全标号模型来进行描述。本文结合现实问题在已有的研究基础上^[8-20],结合遗传算法和粒子群算法设计了一种启发式搜索算法,可以判断有限点内随机图是否存在 AVRTL。通过对实验结果分析,总结了若干联图的定理并给出证明。最后根据已得到的定理得出如下结论:如果子图 G_1 和 G_2 是 AVRTL 图,则图运算 \uparrow_{ab} 具有封闭性,即联图 $G_1 \uparrow_{ab} G_2$ 亦为 AVRTL 图。

1 预备知识

定义 1 设 $G(V, E)$ 是一个简单图,若存在一个单映射 $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |V| + |E|\}$, $uv \in E(G)$ 且 $d(u) = d(v)$, 有 $S(u) = S(v)$, 其中 $S(u) = f(u) + \sum_{uz \in E(G)} f(uz)$, $d(u)$ 表示点 u 的度,则称 f 为 G 的邻点可约全标号。称 G 为 AVRTL 图,否则称 G 为 N-AVRTL 图。

定义 2 设图 $G_1 \uparrow_{ab} G_2$ 为一个联图,其中 G_1, G_2 可为路图 P_n 、圈图 C_n 、星图 S_n 、扇图 F_n 、轮图 W_n 之一, a 表示星、扇、轮图的中心点、路图的 1 度点、圈图的任意一点。 b 表示星图和轮图的非中心点、扇图的 2 度点、路图的 2 度点,图 $G_1 \uparrow_{ab} G_2$ 为 G_1 的 a 节点连接到 G_2 的 b 节点得到的图。

2 AVRTL 算法

2.1 AVRTL 算法基本原理

AVRTL 算法的思想是结合遗传算法和粒子群算法,首先根据图 G 的邻接矩阵得到初始标号矩阵,初始化一个候选解种群,通过启发式搜索算法进行搜索。在搜索过程中若出现满足收敛判断的矩阵,即为最终矩阵,进行输出。若收敛判断结束后图 G 的解仍然没有满足收敛判断函数,则说明图 G 不是 AVRTL 图,算法结束。

(1) 预处理函数 Pretreatment。将图集以初始化邻接矩阵的形式输出到文件中,计算得到图 G 的点数、边数、每个点的度数、度序列、相邻同度点集合等信息。

(2) 优解搜索函数 UXOSearch。根据粒子群算法的原理,每个候选解根据个体最佳位置和群体最佳位置来更新其速度和位置,然后通过选择、交叉、变异等操作搜寻最优解。

(3) 收敛判断函数 ASjudgment。条件一:判断搜索过程中是否满足邻点可约全标号约束条件,若满足邻点可约全标号约束的解,记为存储矩阵 StorageMatrix。条件二: $|V| + |E| - 1$, 即最终搜索结果的最大标号值不等于 $|V| + |E|$ 时,赋值为 $|V| + |E| - 1$,判定不满足邻点可约全标号。

(4) 输出函数 Output。若有满足邻点可约全标号的图集,将最终结果以标号矩阵的形式进行输出。若收敛判断结束后图 G 的解仍然没有满足收敛判断函数,则输出图 G 为非 AVRTL 图。

2.2 AVRTL 伪代码

(1) AVRTL 算法伪代码

Input 图 $G(p, q)$ 的邻接矩阵

Output 非 AVRTL 图或满足 AVRTL 的矩阵

begin

1 读取图的邻接矩阵得到初始收敛矩阵 AS0

2 计算得到图 G 的点数、边数、度序列 Degree List、相邻同度点集合 Same List 等信息

3 get G -AdjustMatrix, StorageMatrix \leftarrow AS0

4 is Continue = true, is Success = false

5 while (is Continue)

6 Permutation (p, q)

7 G -AdjustMatrix.UXOSearch #优解搜索初始化

8 G -AdjustMatrix.particle #更新每个候选解的个体最佳位置和适应度

```

9  G-AdjustMatrix. Individual #执行交叉、变异等操作
10 if (G-AdjustMatrix.ASjudgment) #收敛判断
11   StorageMatrix←G-AdjustMatrix
12   is Success=true
13   break
14 end if
15 end while
16 if(! G-AdjustMatrix.equalWith( AS0) && is Success)
17   Output G is not a AVRTL Graph
18 end if
19 else
20 Output G is a AVRTL Graph
21 Output StorageMatrix
22 end else
23 end

```

(2) 部分邻点可约全标号示例如图 1 和图 2 所示。

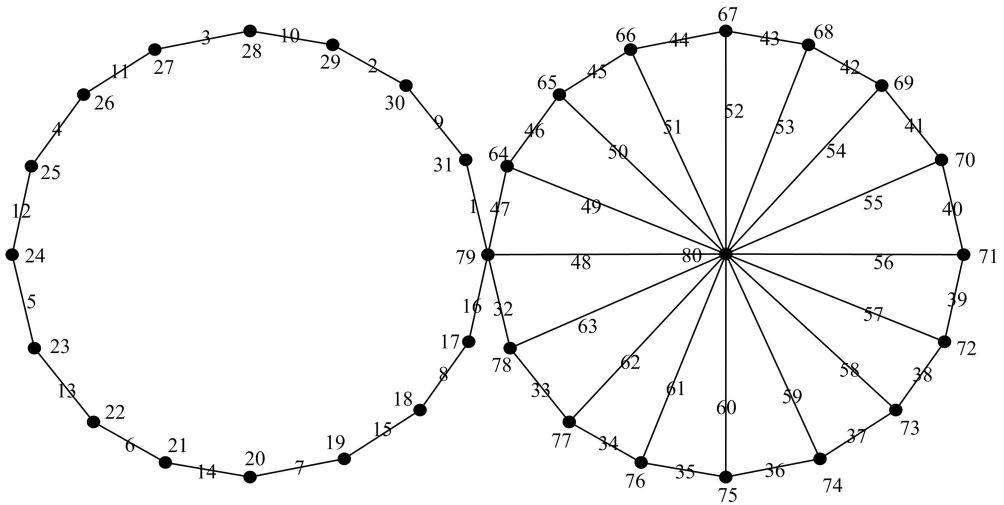


图 1 $C_{16} \uparrow_{ab} W_{16}$ 标号结果
Fig.1 $C_{16} \uparrow_{ab} W_{16}$ graph labeling results

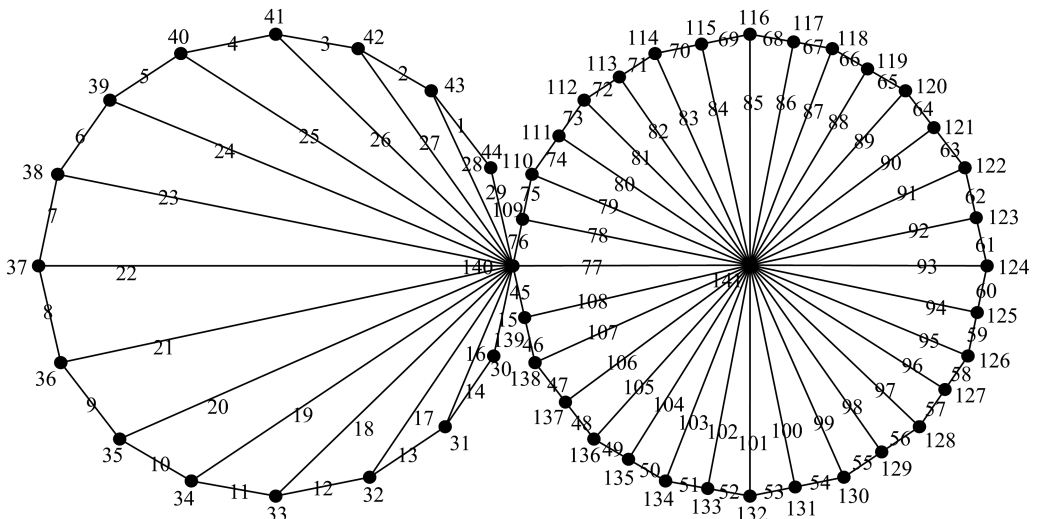


图 2 $F_{16} \uparrow_{ab} W_{32}$ 标号结果
Fig.2 $F_{16} \uparrow_{ab} W_{32}$ graph labeling results

3 定理及证明

定理 1 对于联图 $P_n \uparrow_{ab} F_m$, 当 $n \geq 3, m > 3$ 时是 AVRTL 图。

证明 设联图 $P_n \uparrow_{ab} F_m$ 顶点集为 $V(P_n \uparrow_{ab} F_m) = \{v_1, v_2, \dots, v_n, u_0, u_1, \dots, u_m\}$, 边集为 $E(P_n \uparrow_{ab} F_m) = \{v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_0 u_i | 1 \leq i \leq m\} \cup \{u_i u_{i+1} | 1 \leq i \leq m-1\}$ 。

情形 1 当 $n \geq 3, m > 3, n \equiv 0 \pmod{2}$ 时, $P_n \uparrow_{ab} F_m$ 的邻点可约全标号为

$$\begin{aligned} f(v_i) &= i-1, \quad 2 \leq i \leq n, \\ f(v_i v_{i+1}) &= \begin{cases} \frac{3n-i}{2} - 1, & i \equiv 0 \pmod{2} \text{ 且 } 2 \leq i < n, \\ 2n - \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor - 1, & i \equiv 1 \pmod{2} \text{ 且 } 1 \leq i < n, \end{cases} \\ f(u_0) &= 2n+3m-2, \\ f(u_i) &= 2n+3m-2-i, \quad 1 \leq i \leq m, \\ f(u_i u_{i+1}) &= 2n-2+i, \quad 1 \leq i < m, \\ f(u_0 u_i) &= 2(n+m-1)-i, \quad 1 \leq i \leq m. \end{aligned}$$

此时, $P_n \uparrow_{ab} F_m$ 的顶点标号集合

$$\begin{aligned} f(V) &= \{f(v_i) | 1 \leq i \leq n\} \cup \{f(u_j) | 0 \leq j \leq m\} \\ &= \{1, 2, \dots, n-1\} \cup \{2n+2m-2, 2n+2m-1, \dots, 2n+3m-2\}, \end{aligned}$$

边标号集合为

$$\begin{aligned} f(E) &= \{f(v_i v_{i+1}) | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{f(u_0 u_j) | 1 \leq j \leq m\} \cup \{f(u_i u_{j+1}) | 1 \leq j \leq m-1\} \\ &= \{n, n+1, \dots, 2n+2m-3\}. \end{aligned}$$

根据 AVRTL 定义, $f(V) \cup f(E) \rightarrow [1, 2n+3m-2]$, 并且联图 $P_n \uparrow_{ab} F_m$ 存在 1 度顶点 v_n , 2 度顶点 $v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, u_m$, 3 度顶点 $u_1/v_1, u_2, u_3, \dots, u_{m-1}$ 和 m 度顶点 u_0 , 只需要保证联图 $P_n \uparrow_{ab} F_m$ 相邻的 2 度顶点及 3 度顶点标号和相等即可。

联图 $P_n \uparrow_{ab} F_m$ 相邻的 2 度点 v_2, v_3, \dots, v_{n-1} 各顶点标号和为

$$\begin{aligned} & \text{Sum}(v_i | 2 \leq i \leq n-1) \\ &= f(v_i) + \sum_{ve \in E(v_i)} f(ve) | 2 \leq i \leq n-1 \\ &= f(v_i) + f(v_{i-1} v_i) + f(v_i v_{i+1}) | 2 \leq i \leq n-1 \\ &= f(v_2) + f(v_1 v_2) + f(v_2 v_3) \parallel \dots \parallel f(v_{n-1}) + f(v_{n-2} v_{n-1}) + f(v_{n-1} v_n) \\ &= 4n - \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - 3 \parallel \dots \parallel 4n - \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - 3 = 4n - \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - 3; \end{aligned}$$

联图 $P_n \uparrow_{ab} F_m$ 相邻的 3 度点 u_1, u_2, \dots, u_{m-1} 各顶点标号和为

$$\begin{aligned} & \text{Sum}(u_j | 1 \leq j \leq m-1) \\ &= f(u_j) + \sum_{ue \in E(u_j)} f(ue) | 1 \leq j \leq m-1 \\ &= f(u_1) + f(u_1 u_2) + f(v_2 u_1) + f(u_0 u_1) \parallel f(u_j) + f(u_{j-1} u_j) + f(u_j u_{j+1}) + f(u_0 u_j) | 2 \leq j \leq m-1 \\ &= f(u_1) + f(u_1 u_2) + f(v_2 u_1) + f(u_0 u_1) \parallel f(u_2) + f(u_1 u_2) + f(u_2 u_3) + f(u_0 u_2) \parallel \dots \parallel \\ & \quad f(u_{m-1}) + f(u_{m-2} u_{m-1}) + f(u_{m-1} u_m) + f(u_0 u_{m-1}) \\ &= 8n+5m-9 \parallel \dots \parallel 8n+5m-9 = 8n+5m-9. \end{aligned}$$

由此得证: 当 $n \geq 3, m > 3, n \equiv 0 \pmod{2}$ 时, $P_n \uparrow_{ab} F_m$ 为 AVRTL 图。

情形 2 当 $n \geq 3, m > 3, n \equiv 1 \pmod{2}$ 时, $P_n \uparrow_{ab} F_m$ 的邻点可约全标号为

$$f(v_i) = i-1, \quad 2 \leq i \leq n,$$

$$f(v_i v_{i+1}) = \begin{cases} \frac{3n-i-1}{2}, & i \equiv 0 \pmod{2} \text{ and } 2 \leq i < n, \\ 2n - \lfloor \frac{i}{2} \rfloor - 1, & i \equiv 1 \pmod{2} \text{ and } 1 \leq i < n, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(u_0) &= 2n+3m-2, \\ f(u_i) &= 2n+3m-2-i, \quad 1 \leq i \leq m, \\ f(u_i u_{i+1}) &= 2n-2+i, \quad 1 \leq i < m, \\ f(u_0 u_i) &= 2(n+m-1)-i, \quad 1 \leq i \leq m. \end{aligned}$$

此时, $P_n \uparrow_{ab} F_m$ 的顶点标号集合

$$\begin{aligned} f(V) &= \{f(v_i) \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{f(u_j) \mid 0 \leq j \leq m\} \\ &= \{1, 2, \dots, n-1\} \cup \{2n+2m-2, 2n+2m-1, \dots, 2n+3m-2\}; \end{aligned}$$

边标号集合为

$$\begin{aligned} f(E) &= \{f(v_i v_{i+1}) \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{f(u_0 u_j) \mid 1 \leq j \leq m\} \cup \{f(u_j u_{j+1}) \mid 1 \leq j \leq m-1\} \\ &= \{n, n+1, \dots, 2n+2m-3\}. \end{aligned}$$

根据 AVRTL 定义, $f(V) \cup f(E) \rightarrow [1, 2n+3m-2]$, 并且联图 $P_n \uparrow_{ab} F_m$ 存在 1 度顶点 v_n , 2 度顶点 $v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, u_m$, 3 度顶点 $u_1/v_1, u_2, u_3, \dots, u_{m-1}$ 和 m 度顶点 u_0 , 只需要保证联图 $P_n \uparrow_{ab} F_m$ 相邻的 2 度顶点及 3 度顶点标号和相等即可。

联图 $P_n \uparrow_{ab} F_m$ 相邻的 2 度点 v_2, v_3, \dots, v_{n-1} 各顶点标号和为

$$\begin{aligned} \text{Sum}(v_i \mid 2 \leq i \leq n-1) &= f(v_i) + \sum_{ve \in E(v_i)} f(ve) \mid 2 \leq i \leq n-1 \\ &= f(v_i) + f(v_{i-1} v_i) + f(v_i v_{i+1}) \mid 2 \leq i \leq n-1 \\ &= f(v_2) + f(v_1 v_2) + f(v_2 v_3) \parallel \dots \parallel f(v_{n-1}) + f(v_{n-2} v_{n-1}) + f(v_{n-1} v_n) \\ &= 4n - \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor - 3 \parallel \dots \parallel 4n - \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor - 3 = 4n - \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor - 3; \end{aligned}$$

联图 $P_n \uparrow_{ab} F_m$ 相邻的 3 度点 u_1, u_2, \dots, u_{m-1} 各顶点标号和为

$$\begin{aligned} \text{Sum}(u_j \mid 1 \leq j \leq m-1) &= f(u_j) + \sum_{ue \in E(u_j)} f(ue) \mid 1 \leq j \leq m-1 \\ &= f(u_1) + f(u_1 u_2) + f(v_2 u_1) + f(u_0 u_1) \parallel f(u_j) + f(u_{j-1} u_j) + f(u_j u_{j+1}) + f(u_0 u_j) \mid 2 \leq j \leq m-1 \\ &= f(u_1) + f(u_1 u_2) + f(v_2 u_1) + f(u_0 u_1) \parallel f(u_2) + f(u_1 u_2) + f(u_2 u_3) + f(u_0 u_2) \parallel \dots \parallel \\ &\quad f(u_{m-1}) + f(u_{m-2} u_{m-1}) + f(u_{m-1} u_m) + f(u_0 u_{m-1}) \\ &= 8n+5m-9 \parallel \dots \parallel 8n+5m-9 = 8n+5m-9. \end{aligned}$$

由此得证: 当 $n \geq 3, m > 3, n \equiv 1 \pmod{2}$ 时, $P_n \uparrow_{ab} F_m$ 为 AVRTL 图。

综上所述, 对于联图 $P_n \uparrow_{ab} F_m$, 当 $n \geq 3, m > 3$ 时是 AVRTL 图。

部分联图 $P_n \uparrow_{ab} F_m$ 标号结果如图 3 所示。

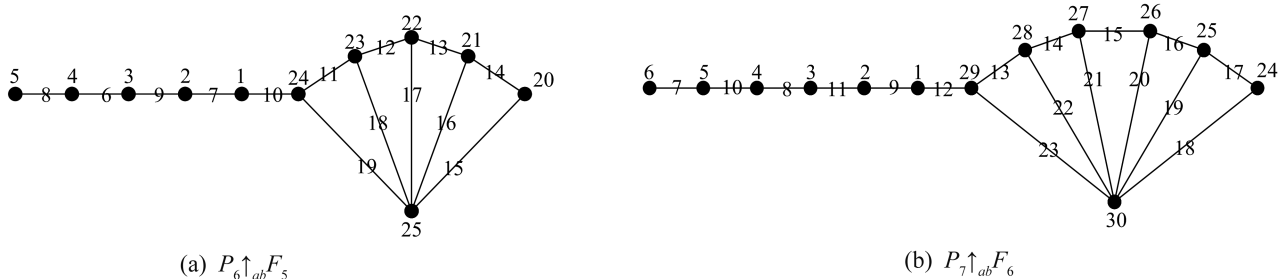


图 3 $P_6 \uparrow_{ab} F_5$ 和 $P_7 \uparrow_{ab} F_6$ 标号结果
Fig.3 $P_6 \uparrow_{ab} F_5$ and $P_7 \uparrow_{ab} F_6$ graph labeling results

定理 2 对于联图 $C_n \uparrow_{ab} F_m$, 当 $n \geq 3, m > 4$ 时是 AVRTL 图。

证明 设联图 $C_n \uparrow_{ab} F_m$ 顶点集为 $V(C_n \uparrow_{ab} F_m) = \{v_1, v_2, \dots, v_n, u_0, u_1, \dots, u_m\}$, 边集为 $E(C_n \uparrow_{ab} F_m) = \{v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{v_n v_1\} \cup \{u_0 u_i | 1 \leq i \leq m\} \cup \{u_i u_{i+1} | 1 \leq i \leq m-1\}$ 。

情形 1 当 $n \geq 3, m > 4, n \equiv 0 \pmod{2}$ 时, $C_n \uparrow_{ab} F_m$ 的邻点可约全标号为

$$f(v_i) = 2n+1-i, \quad 2 \leq i \leq n,$$

$$f(v_n v_1) = n,$$

$$f(v_i v_{i+1}) = \begin{cases} \frac{n}{2} + \frac{i}{2}, & i \equiv 0 \pmod{2} \text{ 且 } 2 \leq i < n, \\ i - \lfloor \frac{i}{2} \rfloor, & i \equiv 1 \pmod{2} \text{ 且 } 1 \leq i < n, \end{cases}$$

$$f(u_0) = 2n+3m-1,$$

$$f(u_i) = 2n+3m-1-i, \quad 1 \leq i \leq m,$$

$$f(u_i u_{i+1}) = 2n-1+i, \quad 1 \leq i < m,$$

$$f(u_0 u_i) = 2(n+m)-1-i, \quad 1 \leq i \leq m。$$

此时, $C_n \uparrow_{ab} F_m$ 的顶点标号集合为

$$\begin{aligned} f(V) &= \{f(v_i) | 1 \leq i \leq n\} \cup \{f(u_j) | 0 \leq j \leq m\} \\ &= \{n+1, n+2, \dots, 2n-1\} \cup \{2n+2m-1, 2n+2m-2, \dots, 2n+3m-1\}, \end{aligned}$$

边标号集合为

$$\begin{aligned} f(E) &= \{f(v_i v_{i+1}) | 1 \leq i \leq n-1\} \cup f(v_n v_1) \cup \{f(u_0 u_j) | 1 \leq j \leq m\} \cup \{f(u_j u_{j+1}) | 1 \leq j \leq m-1\} \\ &= \{1, 2, \dots, n\} \cup \{2n, 2n+1, \dots, 2n+2m-2\}。 \end{aligned}$$

根据 AVRTL 定义, $f(V) \cup f(E) \rightarrow [1, 2n+3m-1]$, 并且联图 $C_n \uparrow_{ab} F_m$ 存在 2 度顶点 $v_2, v_3, \dots, v_n, u_m$, 3 度顶点 u_2, u_3, \dots, u_{m-1} , 4 度顶点 v_1/u_1 和 m 度顶点 u_0 , 只需要保证联图 $C_n \uparrow_{ab} F_m$ 相邻的 2 度顶点及 3 度顶点标号和相等即可。

联图 $C_n \uparrow_{ab} F_m$ 相邻的 2 度点 v_2, v_3, \dots, v_n 各顶点标号和为

$$\begin{aligned} &\text{Sum}(v_i | 2 \leq i \leq n) \\ &= f(v_i) + \sum_{ve \in E(v_i)} f(ve) | 2 \leq i \leq n \\ &= f(v_i) + f(v_{i-1} v_i) + f(v_i v_{i+1}) | 2 \leq i \leq n-1 \parallel f(v_n) + f(v_{n-1} v_n) + f(v_n v_1) \\ &= f(v_2) + f(v_1 v_2) + f(v_2 v_3) \parallel \dots \parallel f(v_{n-1}) + f(v_{n-2} v_{n-1}) + f(v_{n-1} v_n) \parallel f(v_n) + f(v_{n-1} v_n) + f(v_n v_1) \\ &= 3n - \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \parallel \dots \parallel 3n - \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = 3n - \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor; \end{aligned}$$

联图 $C_n \uparrow_{ab} F_m$ 相邻的 3 度点 u_2, u_3, \dots, u_{m-1} 各顶点标号和为

$$\begin{aligned} &\text{Sum}(u_j | 2 \leq j \leq m-1) \\ &= f(u_j) + \sum_{ue \in E(u_j)} f(ue) | 2 \leq j \leq m-1 \\ &= f(u_j) + f(u_{j-1} u_j) + f(u_j u_{j+1}) + f(u_0 u_j) | 2 \leq j \leq m-1 \\ &= f(u_2) + f(u_1 u_2) + f(u_2 u_3) + f(u_0 u_2) \parallel \dots \parallel f(u_{m-1}) + f(u_{m-2} u_{m-1}) + f(u_{m-1} u_m) + f(u_0 u_{m-1}) \\ &= 8n+5m-5 \parallel \dots \parallel 8n+5m-5 = 8n+5m-5。 \end{aligned}$$

由此得证: 当 $n \geq 3, m > 4, n \equiv 0 \pmod{2}$ 时, $C_n \uparrow_{ab} F_m$ 为 AVRTL 图。

情形 2 当 $n \geq 3, m > 4, n \equiv 1 \pmod{2}$ 时, $C_n \uparrow_{ab} F_m$ 的邻点可约全标号为

$$f(v_i) = 2n+1-i, \quad 2 \leq i \leq n,$$

$$f(v_n v_1) = n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor,$$

$$f(v_i v_{i+1}) = \begin{cases} \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \frac{i}{2}, & i \equiv 0 \pmod{2} \text{ 且 } 2 \leq i < n, \\ i - \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor, & i \equiv 1 \pmod{2} \text{ 且 } 1 \leq i < n, \end{cases}$$

$$f(u_0) = 2n + 3m - 1,$$

$$f(u_i) = 2n + 3m - 1 - i, \quad 1 \leq i \leq m,$$

$$f(u_i u_{i+1}) = 2n - 1 + i, \quad 1 \leq i < m,$$

$$f(u_0 u_i) = 2(n + m) - 1 - i, \quad 1 \leq i \leq m.$$

此时, $C_n \uparrow_{ab} F_m$ 的顶点标号集合为

$$f(V) = \{f(v_i) \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{f(u_j) \mid 0 \leq j \leq m\}$$

$$= \{n + 1, n + 2, \dots, 2n - 1\} \cup \{2n + 2m - 1, 2n + 2m - 2, \dots, 2n + 3m - 1\};$$

边标号集合为

$$f(E) = \{f(v_i v_{i+1}) \mid 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{f(v_n v_1)\} \cup \{f(u_0 u_j) \mid 1 \leq j \leq m\} \cup \{f(u_j u_{j+1}) \mid 1 \leq j \leq m - 1\}$$

$$= \{1, 2, \dots, n\} \cup \{2n, 2n + 1, \dots, 2n + 2m - 2\}.$$

根据 AVRTL 定义, $f(V) \cup f(E) \rightarrow [1, 2n + 3m - 1]$, 并且联图 $C_n \uparrow_{ab} F_m$ 存在 2 度顶点 $v_2, v_3, \dots, v_n, u_m$, 3 度顶点 u_2, u_3, \dots, u_{m-1} , 4 度顶点 v_1/u_1 和 m 度顶点 u_0 , 只需要保证联图 $C_n \uparrow_{ab} F_m$ 相邻的 2 度顶点及 3 度顶点标号和相等即可。

联图 $C_n \uparrow_{ab} F_m$ 相邻的 2 度点 v_2, v_3, \dots, v_n 各顶点标号和为

$$\text{Sum}(v_i \mid 2 \leq i \leq n)$$

$$= f(v_i) + \sum_{ve \in E(v_i)} f(ve) \mid 2 \leq i \leq n$$

$$= f(v_i) + f(v_{i-1} v_i) + f(v_i v_{i+1}) \mid 2 \leq i \leq n - 1 \parallel f(v_n) + f(v_{n-1} v_n) + f(v_n v_1)$$

$$= f(v_2) + f(v_1 v_2) + f(v_2 v_3) \parallel \dots \parallel f(v_{n-1}) + f(v_{n-2} v_{n-1}) + f(v_{n-1} v_n) \parallel f(v_n) + f(v_{n-1} v_n) + f(v_n v_1)$$

$$= 3n - \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \frac{n-1}{2} \parallel \dots \parallel 3n - \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \frac{n-1}{2} = 3n - \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \frac{n-1}{2};$$

联图 $C_n \uparrow_{ab} F_m$ 相邻的 3 度点 u_2, u_3, \dots, u_{m-1} 各顶点标号和为

$$\text{Sum}(u_i \mid 2 \leq i \leq m - 1)$$

$$= f(u_j) + \sum_{ue \in E(u_j)} f(ue) \mid 2 \leq j \leq m - 1$$

$$= f(u_j) + f(u_{j-1} u_j) + f(u_j u_{j+1}) + f(u_0 u_j) \mid 2 \leq j \leq m - 1$$

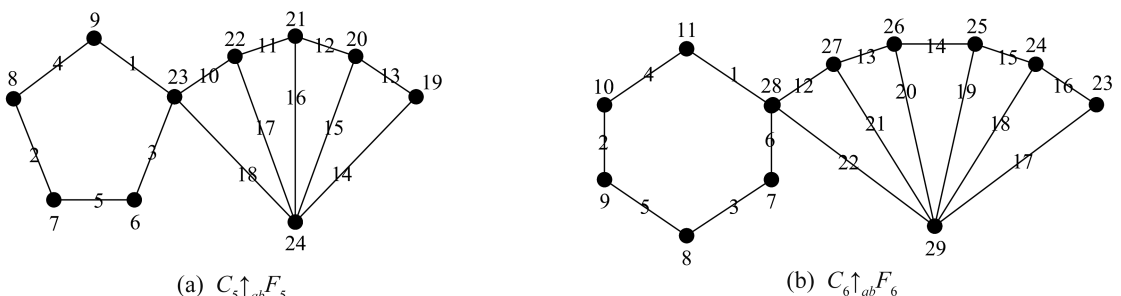
$$= f(u_2) + f(u_1 u_2) + f(u_2 u_3) + f(u_0 u_2) \parallel \dots \parallel f(u_{m-1}) + f(u_{m-2} u_{m-1}) + f(u_{m-1} u_m) + f(u_0 u_{m-1})$$

$$= 8n + 5m - 5 \parallel \dots \parallel 8n + 5m - 5 = 8n + 5m - 5.$$

由此得证: 当 $n \geq 3, m > 4, n \equiv 1 \pmod{2}$ 时, $C_n \uparrow_{ab} F_m$ 为 AVRTL 图。

综上所述, 对于联图 $C_n \uparrow_{ab} F_m$, 当 $n \geq 3, m > 4$ 时是 AVRTL 图。

部分联图 $C_n \uparrow_{ab} F_m$ 标号结果如图 4 所示。



(a) $C_5 \uparrow_{ab} F_5$ (b) $C_6 \uparrow_{ab} F_6$

图 4 $C_5 \uparrow_{ab} F_5$ 和 $C_6 \uparrow_{ab} F_6$ 标号结果
Fig.4 $C_5 \uparrow_{ab} F_5$ and $C_6 \uparrow_{ab} F_6$ graph labeling results

定理 3 对于联图 $F_n \uparrow_{ab} F_m$, 当 $n > 3, m > 3, m \neq n + 2$ 时是 AVRTL 图。

证明 设联图 $F_n \uparrow_{ab} F_m$ 顶点集为 $V(F_n \uparrow_{ab} F_m) = \{v_0, v_1, \dots, v_n, u_0, u_1, \dots, u_m\}$, 边集为 $E(F_n \uparrow_{ab} F_m) = \{v_0 v_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_0 u_i | 1 \leq i \leq m\} \cup \{u_i u_{i+1} | 1 \leq i \leq m-1\}$ 。

当 $n > 3, m > 3, m \neq n + 2$ 时, $F_n \uparrow_{ab} F_m$ 的邻点可约全标号为

$$\begin{aligned} f(v_i) &= 3n - i, \quad 1 \leq i \leq n, \\ f(v_i v_{i+1}) &= i, \quad 1 \leq i < n, \\ f(v_0 v_i) &= 2n - i, \quad 1 \leq i \leq n, \\ f(u_0) &= 3n + 3m - 1, \\ f(u_i) &= 3n + 3m - 1 - i, \quad 1 \leq i \leq m, \\ f(u_i u_{i+1}) &= 3n - 1 + i, \quad 1 \leq i < m, \\ f(u_0 u_i) &= 3n + 2m - 1 - i, \quad 1 \leq i \leq m. \end{aligned}$$

此时, $F_n \uparrow_{ab} F_m$ 的顶点标号集合为

$$\begin{aligned} f(V) &= \{f(v_i) | 0 \leq i \leq n\} \cup \{f(u_j) | 0 \leq j \leq m\} \\ &= \{2n, 2n+1, \dots, 3n-1\} \cup \{3n+2m-1, 3n+2m, \dots, 3n+3m-1\}; \end{aligned}$$

边标号集合为

$$\begin{aligned} f(E) &= \{f(v_0 v_i) | 1 \leq i \leq n\} \cup \{f(v_i v_{i+1}) | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{f(u_0 u_j) | 1 \leq j \leq m\} \cup \{f(u_j u_{j+1}) | 1 \leq j \leq m-1\} \\ &= \{1, 2, \dots, 2n-1\} \cup \{3n, 3n+1, \dots, 3n+2m-2\}. \end{aligned}$$

根据 AVRTL 定义, $f(V) \cup f(E) \rightarrow [1, 3n+3m-1]$, 并且联图 $F_n \uparrow_{ab} F_m$ 存在 2 度顶点 v_1, v_n, u_m , 3 度顶点 $v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, u_2, u_3, \dots, u_{m-1}$, $n+2$ 度顶点 v_0/u_1 和 m 度顶点 u_0 , 只需要保证联图 $F_n \uparrow_{ab} F_m$ 相邻的 3 度顶点标号和相等即可。

联图 $F_n \uparrow_{ab} F_m$ 相邻的 3 度点 v_2, v_3, \dots, v_{n-1} 各顶点标号和为

$$\begin{aligned} & \text{Sum}(v_i | 2 \leq i \leq n-1) \\ &= f(v_i) + \sum_{ve \in E(v_i)} f(ve) | 2 \leq i \leq n-1 = f(v_i) + f(v_{i-1} v_i) + f(v_i v_{i+1}) + f(v_0 v_i) | 2 \leq i \leq n-1 \\ &= f(v_2) + f(v_1 v_2) + f(v_2 v_3) + f(v_0 v_2) \parallel \dots \parallel f(v_{n-1}) + f(v_{n-2} v_{n-1}) + f(v_{n-1} v_n) + f(v_0 v_{n-1}) \\ &= 5n-1 \parallel \dots \parallel 5n-1 = 5n-1; \end{aligned}$$

联图 $F_n \uparrow_{ab} F_m$ 相邻的 3 度点 u_2, u_3, \dots, u_{m-1} 各顶点标号和为

$$\begin{aligned} & \text{Sum}(u_j | 2 \leq j \leq m-1) \\ &= f(u_j) + \sum_{ue \in E(u_j)} f(ue) | 2 \leq j \leq m-1 \\ &= f(u_j) + f(u_{j-1} u_j) + f(u_j u_{j+1}) + f(u_0 u_j) | 2 \leq j \leq m-1 \\ &= f(u_2) + f(u_1 u_2) + f(u_2 u_3) + f(u_0 u_2) \parallel \dots \parallel f(u_{m-1}) + f(u_{m-2} u_{m-1}) + f(u_{m-1} u_m) + f(u_0 u_{m-1}) \\ &= 12n+5m-5 \parallel \dots \parallel 12n+5m-5 = 12n+5m-5. \end{aligned}$$

由此得证: 当 $n > 3, m > 3, m \neq n + 2$ 时, $F_n \uparrow_{ab} F_m$ 为 AVRTL 图。

部分联图 $F_n \uparrow_{ab} F_m$ 标号结果如图 5 所示。

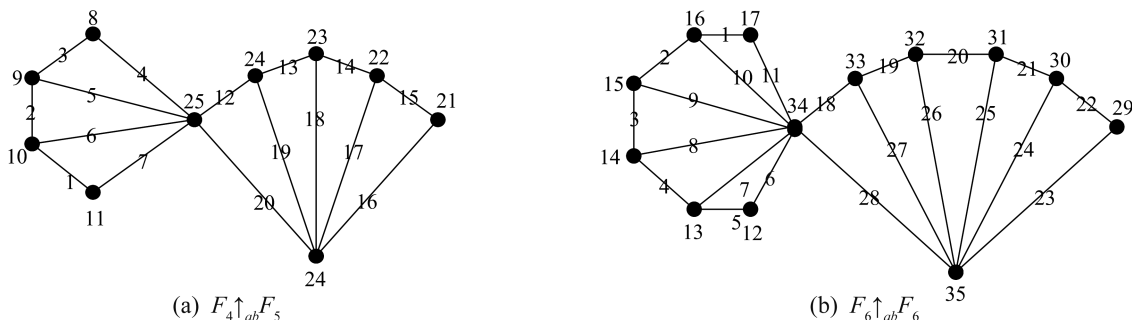


图 5 $F_4 \uparrow_{ab} F_5$ 和 $F_6 \uparrow_{ab} F_6$ 标号结果

Fig.5 $F_4 \uparrow_{ab} F_5$ and $F_6 \uparrow_{ab} F_6$ graph labeling results

定理 4 对于联图 $W_n \uparrow_{ab} F_m$, 当 $n > 3, m > 3, m \neq n+2$ 时是 AVRTL 图。

证明 设联图 $W_n \uparrow_{ab} F_m$ 顶点集为 $V(W_n \uparrow_{ab} F_m) = \{v_0, v_1, \dots, v_n, u_0, u_1, \dots, u_m\}$, 边集为 $E(W_n \uparrow_{ab} F_m) = \{v_0 v_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{v_n v_1\} \cup \{u_0 u_i | 1 \leq i \leq m\} \cup \{u_i u_{i+1} | 1 \leq i \leq m-1\}$ 。

当 $n > 3, m > 3, m \neq n+2$ 时, $W_n \uparrow_{ab} F_m$ 的邻点可约全标号为

$$\begin{aligned} f(v_i) &= 3n+1-i, \quad 1 \leq i \leq n, \\ f(v_i v_{i+1}) &= i, \quad 1 \leq i < n, \\ f(v_n v_1) &= n, \\ f(v_0 v_1) &= n+1, \\ f(v_0 v_i) &= 2n-i+2, \quad 2 \leq i \leq n, \\ f(u_0) &= 3(n+m), \\ f(u_i) &= 3(n+m)-i, \quad 1 \leq i \leq m, \\ f(u_i u_{i+1}) &= 3n+i, \quad 1 \leq i < m, \\ f(u_0 u_i) &= 3n+2m-i, \quad 1 \leq i \leq m. \end{aligned}$$

此时, $W_n \uparrow_{ab} F_m$ 的顶点标号集合为

$$\begin{aligned} f(V) &= \{f(v_i) | 0 \leq i \leq n\} \cup \{f(u_j) | 0 \leq j \leq m\} \\ &= \{2n+1, 2n+2, \dots, 3n\} \cup \{3n+2m, 3n+2m+1, \dots, 3n+3m\}; \end{aligned}$$

边标号集合为

$$\begin{aligned} f(E) &= \{f(v_0 v_i) | 1 \leq i \leq n\} \cup \{f(v_i v_{i+1}) | 1 \leq i \leq n-1\} \cup f(v_n v_1) \\ &\quad \cup \{f(u_0 u_j) | 1 \leq j \leq m\} \cup \{f(u_j u_{j+1}) | 1 \leq j \leq m-1\} \\ &= \{1, 2, \dots, 2n\} \cup \{3n+1, 3n+2, \dots, 3n+2m-1\}. \end{aligned}$$

根据 AVRTL 定义, $f(V) \cup f(E) \rightarrow [1, 3n+3m]$, 并且联图 $W_n \uparrow_{ab} F_m$ 存在 2 度顶点 $u_m, 3$ 度顶点 $v_1, v_2, \dots, v_n, u_2, u_3, \dots, u_{m-1}, n+2$ 度顶点 v_1/u_1 和 m 度顶点 u_0 , 只需要保证联图 $W_n \uparrow_{ab} F_m$ 相邻的 3 度顶点标号和相等即可。

联图 $W_n \uparrow_{ab} F_m$ 相邻的 3 度点 v_1, v_2, \dots, v_n 各顶点标号和为

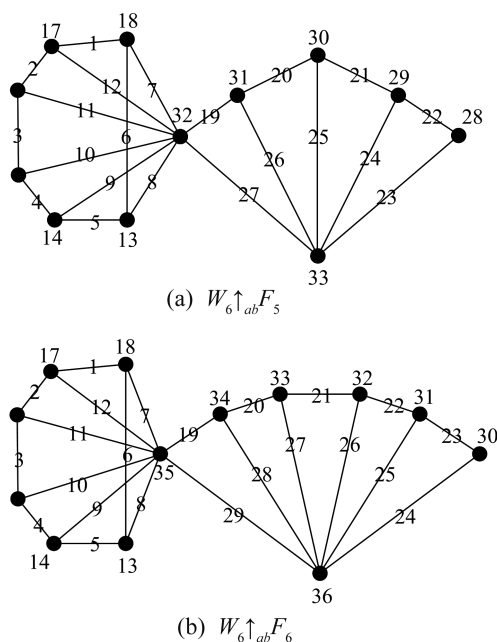
$$\begin{aligned} &\text{Sum}(v_i | 1 \leq i \leq n) \\ &= f(v_i) + \sum_{ve \in E(v_i)} f(ve) | 1 \leq i \leq n \\ &= f(v_1) + f(v_n v_1) + f(v_1 v_2) + f(v_0 v_1) \parallel f(v_i) + f(v_{i-1} v_i) + f(v_i v_{i+1}) + f(v_0 v_i) | 2 \leq i \leq n-1 \parallel \\ &\quad f(v_n) + f(v_{n-1} v_n) + f(v_n v_1) + f(v_0 v_n) \\ &= f(v_1) + f(v_n v_1) + f(v_1 v_2) + f(v_0 v_1) \parallel f(v_2) + f(v_1 v_2) + f(v_2 v_3) + f(v_0 v_2) \parallel \dots \parallel \\ &\quad f(v_{n-1}) + f(v_{n-2} v_{n-1}) + f(v_{n-1} v_n) + f(v_0 v_{n-1}) \parallel f(v_n) + f(v_{n-1} v_n) + f(v_n v_1) + f(v_0 v_n) \\ &= 5n+2 \parallel \dots \parallel 5n+2 = 5n+2; \end{aligned}$$

联图 $W_n \uparrow_{ab} F_m$ 相邻的 3 度点 u_2, u_3, \dots, u_{m-1} 各顶点标号和为

$$\begin{aligned} &\text{Sum}(u_j | 2 \leq j \leq m-1) \\ &= f(u_j) + \sum_{ue \in E(u_j)} f(ue) | 2 \leq j \leq m-1 \\ &= f(u_j) + f(u_{j-1} u_j) + f(u_j u_{j+1}) + f(u_0 u_j) | 2 \leq j \leq m-1 \\ &= f(u_2) + f(u_1 u_2) + f(u_2 u_3) + f(u_0 u_2) \parallel \dots \parallel f(u_{m-1}) + f(u_{m-2} u_{m-1}) + f(u_{m-1} u_m) + f(u_0 u_{m-1}) \\ &= 12n+5m-1 \parallel \dots \parallel 12n+5m-1 = 12n+5m-1. \end{aligned}$$

由此得证: 当 $n > 3, m > 3, m \neq n+2$ 时, $W_n \uparrow_{ab} F_m$ 为 AVRTL 图。

部分联图 $W_n \uparrow_{ab} F_m$ 标号结果如图 6 所示。

图6 $W_6 \uparrow_{ab} F_5$ 和 $W_6 \uparrow_{ab} F_6$ 标号结果Fig.6 $W_6 \uparrow_{ab} F_5$ and $W_6 \uparrow_{ab} F_6$ graph labeling results

对于子图集合 $\{P_n, C_n, S_n, F_n, W_n\}$, 图运算符 \uparrow_{ab} 具有封闭性, 即如果子图 G_1 和 G_2 为 AVRTL 图, 则联图 $G_1 \uparrow_{ab} G_2$ 亦为 AVRTL 图。由于篇幅所限, 本文只给出部分定理, 其它参见已发表论文。

4 结语

针对用邻点可约全标号模型来进行描述的电力网络分布现实问题, 本文结合遗传算法和粒子群算法设计了一种启发式搜索算法, 可以判断有限点内随机图是否存在 AVRTL。通过对实验结果分析, 总结了若干联图的定理并给出证明。最后根据已得到的定理得出如下结论: 如果子图 G_1 和 G_2 是 AVRTL 图, 则图运算符 \uparrow_{ab} 具有封闭性, 即联图 $G_1 \uparrow_{ab} G_2$ 亦为 AVRTL 图。

参考文献:

- [1] RINGEL G. Problem 25 in theory of graphs and its applications [J]. Porc Symposium Smolenice, 1963:171-234.
- [2] ROSA A. On certain valuations of the vertices of a graph[J]. Theory of Graphs, 1967:349-355.
- [3] 赵科, 李敬文, 魏众德. 优雅图猜想[J]. 大连理工大学学报, 2018, 58(6):641-648.
ZHAO Ke, LI Jingwen, WEI Zhongde. Conjecture of elegant graph[J]. Journal of Dalian University of Technology, 2018, 58(6):641-648.
- [4] 王笔美, 李敬文, 顾彦波, 等. 单圈图的边幻和全标号[J]. 山东大学学报(理学版), 2020, 55(9):42-50.
WANG Bimei, LI Jingwen, GU Yanbo, et al. Edge-magic total labeling of unicyclic graphs[J]. Journal of Shandong University(Natural Science), 2020, 55(9):42-50.
- [5] 孙帅, 李敬文, 袁清厚. 随机图的 $L(2,1)$ -标号混合人工蜂群算法[J]. 武汉大学学报(理学版), 2021, 67(2):158-164.
SUN Shuai, LI Jingwen, YUAN Qinghou. A hybrid artificial bee colony algorithm for $L(2,1)$ -labelling of random graph[J]. Journal of Wuhan University(Natural Science Edition), 2021, 67(2):158-164.
- [6] 张养君, 李敬文, 张树成, 等. 随机图的邻点和可约边标号算法[J]. 武汉大学学报(理学版), 2022, 68(5):479-486.
ZHANG Qiaojun, LI Jingwen, ZHANG Shucheng, et al. Adjacent vertex sum reducible edge labeling algorithm of the random graph [J]. Journal of Wuhan University (Natural Science Edition), 2022, 68(5):479-486.
- [7] 兰琳钰, 李敬文, 张树成, 等. 图的点可约全标号算法研究[J]. 山东大学学报(理学版), 2023, 58(11):135-146.
LAN Linyu, LI Jingwen, ZHANG Shucheng, et al. Vertex reducible total labeling algorithm for graph [J]. Journal of Shandong University(Natural Science), 2023, 58(11):135-146.

- [8] WANG L, LI J, SONG C, et al. Adjacent vertex reducible total labeling of corona graph[J]. Engineering Letters, 2023, 31(2):1-16.
- [9] WANG L, LI J, ZHANG L. Adjacent vertex reducible total labeling of graphs[J]. IAENG International Journal of Computer Science, 2023, 50(2):715-726.
- [10] 朱利娜,李敬文,孙帅. 几类联图的 $L(2,1)$ -边染色算法研究[J]. 山东大学学报(理学版),2023,58(8):63-72.
ZHU Lina, Li Jingwen, SUN Shuai. $L(2,1)$ -edge coloring algorithm for several kinds of composite graphs[J]. Journal of Shandong University(Natural Science), 2023, 58(8):63-72.
- [11] 李敬文,贾西贝,董威,等. 图的邻点可区别全染色算法[J]. 山东大学学报(理学版),2015,50(2):14-21.
LI Jingwen, JIA Xibei, DONG Wei, et al. The algorithm for adjacent-vertex-distinguishing total coloring of graphs[J]. Journal of Shandong University(Natural Science), 2015, 50(2):14-21.
- [12] 王丽,李敬文,杨文珠,等.单圈图的邻点可约全标号[J]. 山东大学学报(理学版),2024,59(6):44-55.
WANG Li, LI Jingwen, YANG Wenzhu, et al. Adjacent vertex reducible total labeling of unicyclic graphs[J]. Journal of Shandong University(Natural Science), 2024, 59(6):44-55.
- [13] 孙慧,姚兵. 关于圈龙图的奇优雅性[J]. 大连理工大学学报,2017,57(5):531-536.
SUN Hui, YAO Bing. On odd-elegant quality of cyclic-dragon graphs[J]. Journal of Dalian University of Technology, 2017, 57(5):531-536.
- [14] 李敬文,邵淑宏,袁清厚,等.两类联图的边幻和全标号[J]. 南开大学学报(自然科学版),2021,54(6):68-74.
LI Jingwen, SHAO Shuhong, YUAN Qinghou, et al. Edge-magic total labelling of two kinds for composite graphs [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Nankaiensis, 2021, 54(6):68-74.
- [15] 李敬文,兰琳钰,张树成,等.若干特殊图及其联图的邻点可约边标号算法[J]. 武汉大学学报(理学版),2022,68(5):463-470.
LI Jingwen, LAN Linyu, ZHANG Shucheng, et al. Algorithm for adjacent vertex reducible edge labeling of some special graphs and their associated graphs [J]. Journal of Wuhan University(Natural Science Edition), 2022, 68(5):463-470.
- [16] LI J, ZHANG S, LUO R, et al. Algorithm for adjacent vertex sum reducible edge coloring of random graphs[J]. Engineering Letters, 2022, 30(2):1-7.
- [17] 顾彦波,李敬文,火金萍等.图($p \leq 9$)的边幻和全标号[J]. 大连理工大学学报,2020,60(4):427-436.
GU Yanbo, LI Jingwen, HUO Jinping, et al. Edge magic total labeling of graphs ($p \leq 9$) [J]. Journal of Dalian University of Technology, 2020, 60(4):427-436.
- [18] 顾彦波,李敬文,邵淑宏,等.非边幻和图的若干定理及证明[J]. 武汉大学学报(理学版),2020,66(3):237-243.
GU Yanbo, LI Jingwen, SHAO Shuhong, et al. Some theorems and proofs of non-edge-magic total labeling graphs [J]. Journal of Wuhan University(Natural Science Edition), 2020, 66(3):237-243.
- [19] 王笔美,李敬文,袁清厚.图的 (a,d) -边反幻点标号[J]. 南开大学学报(自然科学版),2021,54(4):50-57.
WANG Bimei, LI Jingwen, YUAN Qinghou. (a,d) -edge-antimagic vertex labeling of graphs [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Nankaiensis, 2021, 54(4):50-57.
- [20] WANG B, LI J. Edge-magic total labeling algorithm of unicyclic graphs[J]. IAENG International Journal of Applied Mathematics, 2021, 51(4):1-10.

(编辑:祁业卿)