

与球拟 Banach 函数空间相关的广义 Morrey 空间上参数型 Littlewood-Paley 算子及高阶交换子

李雪梅,张铮,逯光辉*

(西北师范大学数学与统计学院,甘肃兰州730070)

摘要:主要讨论参数型面积积分 $\mu_{\Omega,S}^p$ 、参数型 Littlewood-Paley g_λ^* -函数 $\mu_{\Omega,\lambda}^{*,p}$ 及其分别与 BMO 函数生成的高阶交换子在球拟 Banach 函数空间相关的广义 Morrey 空间 $M_u(X)$ 上的有界性。

关键词:球拟 Banach 函数空间;参数型 Littlewood-Paley 算子;广义 Morrey 空间;交换子;有界性

中图分类号:O174.2 **文献标志码:**A

引用格式:李雪梅,张铮,逯光辉.与球拟 Banach 函数空间相关的广义 Morrey 空间上参数型 Littlewood-Paley 算子及高阶交换子[J].山东大学学报(理学版),2025,60(8):86-94.

Parametrized Littlewood-Paley operators and their higher order commutators on generalized Morrey spaces associated with ball quasi-Banach function spaces

LI Xuemei, ZHANG Zheng, LU Guanghui*

(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, Gansu, China)

Abstract: In this paper, the authors mainly discuss the boundedness of parametrized area integral $\mu_{\Omega,S}^p$ and parametrized Littlewood-Paley g_λ^* -function $\mu_{\Omega,\lambda}^{*,p}$ and their higher order commutators $[b^m, \mu_{\Omega,S}^p]$ and $[b^m, \mu_{\Omega,\lambda}^{*,p}]$ generated by $b \in \text{BMO}$ and $\mu_{\Omega,S}^p$ 、 g_λ^* -function $\mu_{\Omega,\lambda}^{*,p}$ on generalized Morrey spaces associated with ball quasi-Banach function spaces $M_u(X)$.

Key words: ball quasi-Banach function spaces; parametrized Littlewood-Paley operator; generalized Morrey space; commutator; boundedness

0 引言

Littlewood-Paley 理论是由 Littlewood、Paley 及 Marcinkiewicz 等在 20 世纪 30 年代建立的,此后, Littlewood-Paley 理论引起了诸多学者的关注^[1-5]。在 1960 年, Hörmander^[6]首次提出参数型 Littlewood-Paley 算子,并证明了其在 Lebesgue 空间上的有界性,自此参数型 Littlewood-Paley 算子在各类函数空间的映射性质被广泛研究。例如,在 2007 年,薛庆营等^[7]给出了参数型 Littlewood-Paley 算子在 Lebesgue 空间上的加权估计,在 2011 年,薛庆营等^[8]建立了多线性 Littlewood-Paley 算子的交换子在以非双倍测度为底空间的 Lebesgue 空间上的端点估;在 2019 年,贺莎和薛庆营^[9]研究了 Hardy 空间上参数型多线性 Littlewood-Paley 算子的有界性;在 2022 年,王立伟^[10]探究了参数型 Littlewood-Paley 算子及其高阶交换子在主极大 Herz 空间上的有界性。关于参数型 Littlewood-Paley 算子的进一步研究见文献[11-15]。

收稿日期:2023-10-16;网络出版时间:2024-12-17 14:59:50

基金项目:国家自然科学基金资助项目(12201500, 12361018);甘肃省青年科技基金计划项目(22JR5RA173);西北师范大学 2022 年度研究生科研资助项目(2022KYZZ-S121)

第一作者:李雪梅(1996—),女,硕士研究生,研究方向为调和分析. E-mail:18706903860@163.com

*通信作者:逯光辉(1987—),男,副教授,博士,研究方向为调和分析. E-mail:luguanghui@nwnu.edu.cn

在 1938 年, Morrey 在研究二阶椭圆偏微分方程解的局部正则性时首次引入了 Morrey 空间 $M_q^p(\mathbf{R}^n)$, 即对于任意的 $x \in \mathbf{R}^n$, $1 < q \leq p < \infty$, 有

$$M_q^p(\mathbf{R}^n) = \{f \in L_{\text{loc}}^q(\mathbf{R}^n) : \|f\|_{M_q^p(\mathbf{R}^n)} < \infty\}, \quad (1)$$

其中

$$\|f\|_{M_q^p(\mathbf{R}^n)} = \sup_Q |Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\int_Q |f(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}}.$$

此后,不同类型的 Morrey 空间得到广泛关注。例如,在 2021 年, 遯光辉^[17] 给出变指标非齐次 Morrey 空间的定义,并证明了参数型 Marcinkiewicz 积分在此空间上的性质;在 2023 年,魏明权^[18] 提到 Herz-Morrey 和 Herz-Morrey-Hardy 空间的定义,并研究了参数型 Marcinkiewicz 算子、几何极大算子和奇异积分算子在该空间上的映射性质;2023 年,芮俪等^[19] 指出广义加权变指标 Morrey 空间的定义,并讨论了双线性 θ 型 Calderón-Zygmund 算子在该空间上的有界性。

在 1988 年, Bennett 等^[20] 首次引入 Banach 函数空间。在 2017 年, Sawano 等^[21] 引入一个比 Banach 函数空间更一般的空间,即球拟 Banach 函数空间。对于任意一个拟 Banach 空间 $X \subset \mathcal{M}(\mathbf{R}^n)$, X 满足以下条件:

- (i) $\forall f \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^n)$, $\|f\|_X = 0 \Rightarrow f = 0$ a.e.;
- (ii) $\forall f, g \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^n)$, $|g| \leq |f|$ a.e. $\Rightarrow \|g\|_X \leq \|f\|_X$;
- (iii) $\forall \{f_m\}_{m \in \mathbf{N}} \subset \mathcal{M}(\mathbf{R}^n)$, $f \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^n)$, $0 \leq f_m \uparrow f$ a.e. $\Rightarrow \|f_m\|_X \uparrow \|f\|_X$;
- (iv) $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n) \Rightarrow \chi_B \in X$ 。

若对于任意的 $f, g \in X$, 有

$$\|f+g\|_X \leq \|f\|_X + \|g\|_X, \quad (2)$$

且存在 $C_{(B)} > 0$ ($C_{(B)}$ 与 f 的选取无关), 有

$$\int_B |f(x)| dx \leq C_{(B)} \|f\|_X. \quad (3)$$

则称球拟 Banach 函数空间 X 为球 Banach 函数空间。其中, $\mathcal{M}(\mathbf{R}^n)$ 表示 \mathbf{R}^n 上所有 Lebesgue 可测函数空间, $B(x, r) = \{y \in \mathbf{R}^n : |x-y| < r\}$ 表示以 $x \in \mathbf{R}^n$ 为中心, $r \in (0, \infty)$ 为半径的开球, $\mathcal{B} = \{B(x, r) : x \in \mathbf{R}^n, r > 0\}$ 表示开球族。

2020 年,王凡等^[22] 研究了 Littlewood-Paley 算子和 Calderón-Zygmund 算子在与球拟 Banach 函数空间相关的 Hardy 空间上的应用;2020 年,张阳阳等^[23] 讨论了 Calderón-Zygmund 算子在与球拟 Banach 函数空间相关的弱 Hardy 型空间上有界性;2023 年, Ho^[24] 探究了强 Calderón-Zygmund 奇异积分算子在与球拟 Banach 函数空间相关的 Hardy 空间上的映射性质。更多关于球拟 Banach 函数空间相关的研究见文献 [25-27]。

受上述结果的启发,本文主要研究了参数型面积积分 $\mu_{\Omega, S}^p$ 、参数型 Littlewood-Paley g_λ^* -函数 $\mu_{\Omega, \lambda}^{*,p}$ 以及相应的高阶交换子在与球拟 Banach 空间相关的广义 Morrey 空间 $M_u(X)$ 上的有界性。为了给出本文的主要结构,首先回顾一些基本概念和性质。

定义 1^[21] 对于任意球拟 Banach 函数空间 X , 其对偶空间 X' 满足

$$\|f\|_{X'} = \sup \left\{ \int_{\mathbf{R}^n} |f(x)g(x)| dx : g \in X, \|g\|_X \leq 1 \right\} < \infty, \quad (4)$$

若 X 是球拟 Banach 函数空间, 则 X' 也是球拟 Banach 函数空间。

接下来,给出与球拟 Banach 函数空间相关的广义 Morrey 空间的定义。

定义 2^[28] 设 X 是一球拟 Banach 函数空间, $u(x, r) : \mathbf{R}^n \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ 是一个 Lebesgue 可测函数, 则与球拟 Banach 函数空间相关的广义 Morrey 空间 $M_u(X)$ 定义为

$$M_u(X) = \{f \in L_{\text{loc}}(X) : \|f\|_{M_u(X)} < \infty\}, \quad (5)$$

其中

$$\|f\|_{M_u(X)} = \sup_{x \in X, r > 0} \frac{1}{u(x, r)} \frac{1}{\|\chi_{B(x, r)}\|_X} \|f\chi_{B(x, r)}\|_X, \quad \forall f \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^n).$$

定义 3 设 X 是一球拟 Banach 函数空间, $u(x, r) : \mathbf{R}^n \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ 是一个 Lebesgue 可测函数。对于任意的 $x \in X, r > 0$, 存在 $C > 0$ 。 \mathscr{W}_X 定义为

$$C \leq u(x, r), \quad \forall x \in \mathbf{R}^n, \quad r \geq 1, \quad (6)$$

$$\|\chi_{B(x,r)}\|_X \leq Cu(x, r), \quad \forall x \in \mathbf{R}^n, \quad r < 1, \quad (7)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{u(x, 2^{j+1}r) \|\chi_{B(x, 2^{j+1}r)}\|_X}{\|\chi_{B(x,r)}\|_X} \leq Cu(x, r). \quad (8)$$

定义 4^[28] 函数 $b \in L^1_{\text{loc}}(X)$, 若有

$$\|b\|_{\text{BMO}(X)} = \sup_B \frac{1}{|B|} \int_B |b(y) - b_B| dy < \infty, \quad (9)$$

其中 $b_B = |B|^{-1} \int_B b(y) dy$, 则称 $b \in \text{BMO}(X)$ 。

设 S^{n-1} 是 $\mathbf{R}^n (n \geq 2)$ 上的单位球面, Ω 是 \mathbf{R}^n 中局部可积的零次齐次函数, 且满足消失条件

$$\int_{S^{n-1}} \Omega(x') d\sigma(x') = 0, \quad (10)$$

其中, $d\sigma = d\sigma(x')$, $x' = \frac{x}{|x|} (x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ 。

若 $\rho > 0, \lambda \in (1, \infty)$, 则参数型面积积分 $\mu_{\Omega, S}^\rho$ 和参数型 Littlewood-Paley g_λ^* -函数 $\mu_{\Omega, \lambda}^{*, \rho}$ 定义为

$$\mu_{\Omega, S}^\rho(f)(x) = \left(\iint_{\tau(x)} \left| \frac{1}{t^\rho} \int_{|y-z| \leq t} \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-\rho}} f(z) dz \right|^2 \frac{dy dt}{t^{n+1}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (11)$$

$$\mu_{\Omega, \lambda}^{*, \rho}(f)(x) = \left(\iint_{\mathbf{R}_+^{n+1}} \left(\frac{t}{t+|x-y|} \right)^{\lambda n} \left| \frac{1}{t^\rho} \int_{|y-z| \leq t} \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-\rho}} f(z) dz \right|^2 \frac{dy dt}{t^{n+1}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (12)$$

其中, $\tau(x) = \{(y, t) \in \mathbf{R}_+^{n+1} : |x-y| < t, t > 0\}$ 。

相应地, 若 $b \in \text{BMO}(X)$, $m \in \mathbf{N}$, 则由 b 与 $\mu_{\Omega, S}^\rho$ 和 $\mu_{\Omega, \lambda}^{*, \rho}$ 分别生成的高阶交换子 $[b^m, \mu_{\Omega, S}^\rho]$ 和 $[b^m, \mu_{\Omega, \lambda}^{*, \rho}]$ 定义为

$$[b^m, \mu_{\Omega, S}^\rho](f)(x) = \left(\iint_{\tau(x)} \left| \frac{1}{t^\rho} \int_{|y-z| \leq t} \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-\rho}} [b(x) - b(z)]^m f(z) dz \right|^2 \frac{dy dt}{t^{n+1}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (13)$$

$$[b^m, \mu_{\Omega, \lambda}^{*, \rho}](f)(x) = \left(\iint_{\mathbf{R}_+^{n+1}} \left(\frac{t}{t+|x-y|} \right)^{\lambda n} \left| \frac{1}{t^\rho} \int_{|y-z| \leq t} \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-\rho}} [b(x) - b(z)]^m f(z) dz \right|^2 \frac{dy dt}{t^{n+1}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (14)$$

全文中, C 表示与主要参数无关的正常数, 其取值可根据情况而定; χ_B 表示球 B 的特征函数; $|B|$ 为一般的 Lebesgue 测度。

1 预备知识

引理 1^[29] 设 X 是一个球拟 Banach 函数空间, 对于任意的 $f \in X, g \in X'$, 有

$$\int_{\mathbf{R}^n} |f(x)g(x)| dx \leq C \|f\|_X \|g\|_{X'}. \quad (15)$$

引理 2^[30] 若 X 是一个球拟 Banach 函数空间, 则存在常数 $C > 0$, 使得

$$|B| \leq \|\chi_B\|_X \|\chi_B\|_{X'} \leq C|B|, \quad B \in \mathscr{B}. \quad (16)$$

引理 3^[31] 若 X 是一个球拟 Banach 函数空间, $b \in \text{BMO}(X)$, $m \in \mathbf{N}$, 则有

$$\|\chi_{B(x,r)}(b(\cdot) - b_{B(x,r)})^m\|_{X'} \leq C \|b\|_*^m \|\chi_{B(x,r)}\|_{X'}, \quad (17)$$

$$\|\chi_{B(x,r)}(b(\cdot) - b_{B(x, 2^{j+1}r)})^m\|_{X'} \leq C(j+1) \|b\|_*^m \|\chi_{B(x, 2^{j+1}r)}\|_{X'}. \quad (18)$$

引理 4 若 $u \in \mathscr{W}_X$, 则存在常数 $C > 0$, 使得对于任意的 $x \in \mathbf{R}^n, r > 0$, 有

$$u(x, 2r) \leq Cu(x, r). \quad (19)$$

证明 对于任意的 $x \in \mathbf{R}^n$, $r > 0$, 有

$$\|\chi_{B(x,r)}\|_X \leq C \|\chi_{B(x,2r)}\|_X,$$

进一步,得到

$$\begin{aligned} u(x,2r) &\leq C \frac{\|\chi_{B(x,r)}\|_X}{\|\chi_{B(x,2r)}\|_X} u(x,r) \\ &\leq C \frac{\|\chi_{B(x,r)}\|_X \|\chi_{B(x,2r)}\|_{X'}}{|B(x,2r)|} u(x,r) \\ &\leq C \frac{\|\chi_{B(x,2r)}\|_X \|\chi_{B(x,2r)}\|_{X'}}{|B(x,2r)|} u(x,r) \leq Cu(x,r), \end{aligned}$$

引理 4 证毕。

2 主要结果及证明

本文主要结果如下:

定理 1 设 X 是一个球拟 Banach 函数空间, $u \in \mathcal{S}'_X$, $\Omega \in L^2(S^{n-1})$ 满足式 (10), 假设 $\mu_{\Omega,S}^\rho$ 是由式 (11) 所定义的参数型面积积分满足 $\|\mu_{\Omega,S}^\rho(f)\|_X \leq C \|f\|_X$, 且有

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{|B(y,2^{j+1}r)|}{|B(y,r)|} u(y,2^{j+1}r) \leq Cu(y,r) \tag{20}$$

成立, 则存在常数 $C > 0$, 使得对于任意的 $f \in X \cap M_u(X)$, 有

$$\|\mu_{\Omega,S}^\rho(f)\|_{M_u(X)} \leq C \|f\|_{M_u(X)}.$$

定理 2 设 X 是一个球拟 Banach 函数空间, $u \in \mathcal{S}'_X$, 假设 $\Omega \in L^2(S^{n-1})$ 满足式 (9)。 $\mu_{\Omega,\lambda}^{*,\rho}$ 是由式 (12) 所定义的参数型 Littlewood–Paley g_λ^* -函数, 若 $\|\mu_{\Omega,\lambda}^{*,\rho}(f)\|_X \leq C \|f\|_X$ 成立, 且满足式 (20), 则存在常数 $C > 0$, 使得对于任意的 $f \in X \cap M_u(X)$, 有

$$\|\mu_{\Omega,\lambda}^{*,\rho}(f)\|_{M_u(X)} \leq C \|f\|_{M_u(X)}.$$

定理 3 设 X 是一个球拟 Banach 函数空间, $u \in \mathcal{S}'_X$, 假设 $\Omega \in L^2(S^{n-1})$ 满足式 (12), $[b^m, \mu_{\Omega,S}^\rho]$ 是由式 (13) 所定义的高阶交换子, 若 $\|[b^m, \mu_{\Omega,S}^\rho(f)]\|_X \leq C \|b\|_*^m \|f\|_X$ 成立, 且满足

$$\sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \frac{|B(y,2^{j+1}r)|}{|B(y,r)|} u(y,2^{j+1}r) \leq Cu(y,r), \tag{21}$$

则存在常数 $C > 0$, 使得对于任意的 $f \in X \cap M_u(X)$, 有

$$\|[b^m, \mu_{\Omega,S}^\rho(f)]\|_{M_u(X)} \leq C \|b\|_*^m \|f\|_{M_u(X)}.$$

定理 4 设 X 是一个球拟 Banach 函数空间, $u \in \mathcal{S}'_X$, 假设 $\Omega \in L^2(S^{n-1})$ 满足式 (10), $[b^m, \mu_{\Omega,\lambda}^{*,\rho}]$ 由式 (14) 所定义的高阶交换子, 若 $\|[b^m, \mu_{\Omega,\lambda}^{*,\rho}(f)]\|_X \leq C \|b\|_*^m \|f\|_X$ 成立, 且满足式 (18), 则存在常数 $C > 0$, 使得对于任意的 $f \in X \cap M_u(X)$, 有

$$\|[b^m, \mu_{\Omega,\lambda}^{*,\rho}(f)]\|_{M_u(X)} \leq C \|b\|_*^m \|f\|_{M_u(X)}.$$

注 1^[32] 对于 $\forall x \in \mathbf{R}^n$, $m \in \mathbf{N}$, 有

$$\begin{aligned} \mu_{\Omega,S}^\rho(f)(x) &\leq 2^{\lambda n} \mu_{\Omega,\lambda}^{*,\rho}(f)(x), \\ [b^m, \mu_{\Omega,S}^\rho(f)](x) &\leq 2^{\lambda n} [b^m, \mu_{\Omega,\lambda}^{*,\rho}](f)(x). \end{aligned}$$

因此, 只需证明定理 2 和定理 4。

定理 2 的证明 设 $x \in B(y,r) \in \mathcal{B}(y,r)$ 对 f 进行如下分解, $f = f_1 + f_2 = f\chi_{2B} + f\chi_{X \setminus 2B}$, 则

$$\begin{aligned} \|\mu_{\Omega,\lambda}^{*,\rho}(f)\|_{M_u(X)} &\leq \|\mu_{\Omega,\lambda}^{*,\rho}(f_1)\|_{M_u(X)} + \|\mu_{\Omega,\lambda}^{*,\rho}(f_2)\|_{M_u(X)} \\ &= F_1 + F_2. \end{aligned}$$

先来估计 F_1 , 由 $\|\mu_{\Omega,\lambda}^{*,\rho}(f)\|_X \leq C \|f\|_X$, 式 (5)、(20), 得到

$$F_1 \leq C \sup_{y \in X, r > 0} \frac{1}{u(y,r)} \frac{1}{\|\chi_{B(y,r)}\|_X} \|f\chi_{B(y,2r)}\|_X$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \sup_{y \in X, r > 0} \frac{1}{u(y, r)} \frac{1}{\|\chi_{B(y, r)}\|_X} u(y, 2r) \|\chi_{B(y, 2r)}\|_X \\
&\quad \times \frac{1}{u(y, 2r)} \frac{1}{\|\chi_{B(y, 2r)}\|_X} \|f\chi_{B(y, 2r)}\|_X \\
&\leq C \|f\|_{M_u(X)} \frac{u(y, 2r)}{u(y, r)} \frac{\|\chi_{B(y, 2r)}\|_X}{\|\chi_{B(y, r)}\|_X} \\
&\leq C \|f\|_{M_u(X)} \frac{u(y, 2r)}{u(y, r)} \frac{\|\chi_{B(y, 2r)}\|_X}{\|\chi_{B(y, r)}\|_X} \frac{\|\chi_{B(y, 2r)}\|_{X'}}{\|\chi_{B(y, 2r)}\|_X} \\
&\leq C \|f\|_{M_u(X)} \frac{u(y, r)}{u(y, r)} \frac{\|\chi_{B(y, r)}\|_X}{\|\chi_{B(y, r)}\|_X} \frac{\|\chi_{B(y, 2r)}\|_{X'}}{\|\chi_{B(y, 2r)}\|_X} \\
&\leq C \|f\|_{M_u(X)} \frac{|B(y, r)|}{\|\chi_{B(y, r)}\|_X} \frac{\|\chi_{B(y, 2r)}\|_X}{|B(y, 2r)|} \\
&\leq C \|f\|_{M_u(X)} \frac{\|\chi_{B(y, 2r)}\|_X}{\|\chi_{B(y, r)}\|_X} \\
&\leq C \|f\|_{M_u(X)}.
\end{aligned}$$

再来估计 F_2 , 首先估计 $|\mu_{\Omega, \lambda}^{*, \rho}(f_2)(x)|$, 由 Minkowski 不等式, 得到

$$\begin{aligned}
|\mu_{\Omega, \lambda}^{*, \rho}(f_2)(x)| &\leq \int_{X \setminus 2B} |f(z)| \left[\int_0^\infty \int_{|y-z| \leq t} \left(\frac{t}{t+|x-y|} \right)^{\lambda n} \frac{|\Omega(y-z)|^2}{|y-z|^{2n-2\rho}} \frac{dy dt}{t^{n+1+2\rho}} \right]^{\frac{1}{2}} dz \\
&\leq \int_{X \setminus 2B} |f(z)| \left[\int_0^{|x|} \int_{|y-z| \leq t} \left(\frac{t}{t+|x-y|} \right)^{\lambda n} \frac{|\Omega(y-z)|^2}{|y-z|^{2n-2\rho}} \frac{dy dt}{t^{n+1+2\rho}} \right]^{\frac{1}{2}} dz \\
&\quad + \int_{X \setminus 2B} |f(z)| \left[\int_{|x|}^\infty \int_{|y-z| \leq t} \left(\frac{t}{t+|x-y|} \right)^{\lambda n} \frac{|\Omega(y-z)|^2}{|y-z|^{2n-2\rho}} \frac{dy dt}{t^{n+1+2\rho}} \right]^{\frac{1}{2}} dz \\
&= F_2^1 + F_2^2.
\end{aligned}$$

若 $x \in B(y, r)$, $z \in X \setminus 2B$, $\Omega \in L^2(S^{n-1})$, 根据 Hölder 不等式、式(5)及引理 2, 有

$$\begin{aligned}
F_2^1 &\leq \int_{X \setminus 2B} |f(z)| \left(\int_0^{|x|} \int_{S^{n-1}} \int_0^t \frac{|\Omega(y')|^2}{|\vartheta|^{2n-2\rho}} \vartheta^{n-1} d\vartheta d\sigma(y') \frac{dt}{t^{n+1+2\rho}} \right)^{\frac{1}{2}} dz \\
&\leq \|\Omega\|_{L^2(S^{n-1})} \int_{X \setminus 2B} |f(z)| \left(\int_0^{|x|} \int_0^t \frac{1}{|\vartheta|^{n+1-2\rho}} d\vartheta \frac{dt}{t^{n+1+2\rho}} \right)^{\frac{1}{2}} dz \\
&\leq Cr^{-n} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{B(y, 2^{j+1}r)} |f(z)| dz \\
&\leq Cr^{-n} \sum_{j=0}^{\infty} \|f\chi_{B(y, 2^{j+1}r)}\|_X \|\chi_{B(y, 2^{j+1}r)}\|_{X'} \\
&\leq Cr^{-n} \sum_{j=0}^{\infty} |B(y, 2^{j+1}r)| \|\chi_{B(y, 2^{j+1}r)}\|_X^{-1} u(y, 2^{j+1}r) \|\chi_{B(y, 2^{j+1}r)}\|_X \\
&\quad \times \frac{1}{u(y, 2^{j+1}r)} \frac{1}{\|\chi_{B(y, 2^{j+1}r)}\|_X} \|f\chi_{B(y, 2^{j+1}r)}\|_X \\
&\leq C \|f\|_{M_u(X)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|B(y, 2^{j+1}r)|}{|B(y, r)|} u(y, 2^{j+1}r),
\end{aligned}$$

类似地, 有

$$\begin{aligned}
F_2^2 &\leq \int_{X \setminus 2B} |f(z)| \left(\int_{|x|}^\infty \int_{S^{n-1}} \int_0^t \frac{|\Omega(y')|^2}{|\vartheta|^{2n-2\rho}} \vartheta^{n-1} d\vartheta d\sigma(y') \frac{dt}{t^{n+1+2\rho}} \right)^{\frac{1}{2}} dz \\
&\leq \|\Omega\|_{L^2(S^{n-1})} \int_{X \setminus 2B} |f(z)| \left(\int_{|x|}^\infty \int_0^t \frac{1}{|\vartheta|^{n+1-2\rho}} d\vartheta \frac{dt}{t^{n+1+2\rho}} \right)^{\frac{1}{2}} dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \| \Omega \|_{L^2(S^{n-1})} \int_{X \setminus 2B} |f(z)| \left(\int_{|x|}^{\infty} \frac{dt}{t^{2n+1}} \right)^{\frac{1}{2}} dz \\
 &\leq Cr^{-n} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{B(y, 2^{j+1}r)} |f(z)| dz \\
 &\leq Cr^{-n} \sum_{j=0}^{\infty} \| f \chi_{B(y, 2^{j+1}r)} \|_X \| \chi_{B(y, 2^{j+1}r)} \|_X \\
 &\leq Cr^{-n} \sum_{j=0}^{\infty} |B(y, 2^{j+1}r)| \| \chi_{B(y, 2^{j+1}r)} \|_X^{-1} u(y, 2^{j+1}r) \| \chi_{B(y, 2^{j+1}r)} \|_X \\
 &\quad \times \frac{1}{u(y, 2^{j+1}r)} \frac{1}{\| \chi_{B(y, 2^{j+1}r)} \|_X} \| f \chi_{B(y, 2^{j+1}r)} \|_X \\
 &\leq C \| f \|_{M_u(X)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|B(y, 2^{j+1}r)|}{|B(y, r)|} u(y, 2^{j+1}r) \circ
 \end{aligned}$$

进一步,由式(1)和式(20),得到

$$\begin{aligned}
 F_2 &= \| \mu_{\Omega, \lambda}^{*, \rho}(f_2) \|_{M_u(X)} = \sup_{y \in X, r > 0} \frac{1}{u(y, r)} \frac{1}{\| \chi_{B(y, r)} \|_X} \| \mu_{\Omega, \lambda}^{*, \rho}(f_2) \chi_{B(y, r)} \|_X \\
 &\leq C \sup_{y \in X, r > 0} \| f \|_{M_u(X)} \frac{1}{u(y, r)} \frac{\| \chi_{B(y, r)} \|_X}{\| \chi_{B(y, r)} \|_X} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|B(y, 2^{j+1}r)|}{|B(y, r)|} u(y, 2^{j+1}r) \\
 &\leq C \| f \|_{M_u(X)} \circ
 \end{aligned}$$

结合上述 F_1, F_2 的估计,定理 2 证毕。

定理 4 的证明 设 $x \in B(y, r) \in \mathcal{B}(y, r)$, 对 f 进行如下分解 $f=f_1+f_2=f\chi_{2B}+f\chi_{X \setminus 2B}$, 则

$$\begin{aligned}
 \| [b^m, \mu_{\Omega, \lambda}^{*, \rho}](f) \|_{M_u(X)} &\leq \| [b^m, \mu_{\Omega, \lambda}^{*, \rho}](f_1) \|_{M_u(X)} + \| [b^m, \mu_{\Omega, \lambda}^{*, \rho}](f_2) \|_{M_u(X)} \\
 &= G_1 + G_2 \circ
 \end{aligned}$$

先估计 G_1 , 由 $\| [b^m, \mu_{\Omega, \lambda}^{*, \rho}](f) \|_X \leq C \| b \|_*^m \| f \|_X$, 式(5)和式(20), 得到

$$\begin{aligned}
 G_1 &\leq \sup_{y \in X, r > 0} \frac{1}{u(y, r)} \frac{1}{\| \chi_{B(y, r)} \|_X} \| b \|_*^m \| f \chi_{B(y, 2r)} \|_X \\
 &\leq C \| b \|_*^m \sup_{y \in X, r > 0} \frac{1}{u(y, r)} \frac{1}{\| \chi_{B(y, r)} \|_X} u(y, 2r) \| \chi_{B(y, 2r)} \|_X \\
 &\quad \times \frac{1}{u(y, 2r)} \frac{1}{\| \chi_{B(y, 2r)} \|_X} \| f \chi_{B(y, 2r)} \|_X \\
 &\leq C \| b \|_*^m \| f \|_{M_u(X)} \frac{u(y, 2r)}{u(y, r)} \frac{\| \chi_{B(y, 2r)} \|_X}{\| \chi_{B(y, r)} \|_X} \\
 &\leq C \| b \|_*^m \| f \|_{M_u(X)} \frac{u(y, 2r)}{u(y, r)} \frac{\| \chi_{B(y, 2r)} \|_X}{\| \chi_{B(y, r)} \|_X} \frac{\| \chi_{B(y, 2r)} \|_{X'}}{\| \chi_{B(y, 2r)} \|_{X'}} \\
 &\leq C \| b \|_*^m \| f \|_{M_u(X)} \frac{u(y, r)}{u(y, r)} \frac{\| \chi_{B(y, r)} \|_X}{\| \chi_{B(y, r)} \|_X} \frac{\| \chi_{B(y, r)} \|_{X'}}{\| \chi_{B(y, 2r)} \|_{X'}} \\
 &\leq C \| b \|_*^m \| f \|_{M_u(X)} \frac{|B(y, r)|}{\| \chi_{B(y, r)} \|_X} \frac{\| \chi_{B(y, 2r)} \|_X}{|B(y, 2r)|} \\
 &\leq C \| b \|_*^m \| f \|_{M_u(X)} \frac{\| \chi_{B(y, 2r)} \|_X}{\| \chi_{B(y, r)} \|_X} \\
 &\leq C \| b \|_*^m \| f \|_{M_u(X)} \circ
 \end{aligned}$$

为了估计 G_2 , 首先考虑 $\| [b^m, \mu_{\Omega, \lambda}^{*, \rho}](f_2)(x) \|$, 由 Minkowski 不等式, 得到

$$\begin{aligned}
 \| [b^m, \mu_{\Omega, \lambda}^{*, \rho}](f_2)(x) \| &\leq \int_{X \setminus 2B} |b(x) - b(z)|^m |f(z)| \left[\left(\frac{t}{t+|x-y|} \right)^{\lambda n} \frac{|\Omega(y-z)|^2}{|y-z|^{2n-2\rho}} \frac{dy dt}{t^{n+1+2\rho}} \right]^{\frac{1}{2}} dz \\
 &\leq \int_{X \setminus 2B} |b(x) - b(z)|^m |f(z)| \left[\int_0^{|x|} \int_{|y-z| \leq t} \frac{|\Omega(y-z)|^2}{|y-z|^{2n-2\rho}} \frac{dy dt}{t^{n+1+2\rho}} \right]^{\frac{1}{2}} dz
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{X \setminus 2B} |b(x) - b(z)|^m |f(z)| \left[\int_{|x|}^{\infty} \int_{|y-z| \leq t} \frac{|\Omega(y-z)|^2}{|y-z|^{2n-2\rho}} \frac{dy dt}{t^{n+1+2\rho}} \right]^{\frac{1}{2}} dz \\
& = G_2^1 + G_2^2.
\end{aligned}$$

对于 G_2^1 , 由式(5)、(16)、(18)和 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned}
G_2^1 & \leq \int_{X \setminus 2B} |b(x) - b(z)|^m |f(z)| \left[\int_0^{|x|} \int_{S^{n-1}} \int_0^t \frac{|\Omega(y')|^2}{|\vartheta|^{2n-2\rho}} \vartheta^{n-1} d\vartheta d\sigma(y') \frac{dt}{t^{n+1+2\rho}} \right]^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \|\Omega\|_{L^2(S^{n-1})} \frac{1}{|x|^n} \int_{X \setminus 2B} |b(x) - b(z)|^m |f(z)| dz \\
& \leq Cr^{-n} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{B(y, 2^{j+1}r)} |b(x) - b(z)|^m |f(z)| dz \\
& \leq Cr^{-n} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\int_{B(y, 2^{j+1}r)} |b(x) - (b)_{B(y, 2r)}|^m |f(z)| dz \right. \\
& \quad \left. + \int_{B(y, 2^{j+1}r)} |b(z) - (b)_{B(y, 2r)}|^m |f(z)| dz \right) \\
& \leq Cr^{-n} \sum_{j=0}^{\infty} \left(|b(x) - (b)_{B(y, 2r)}|^m \int_{B(y, 2^{j+1}r)} |f(z)| dz \right. \\
& \quad \left. + \|f\chi_{B(y, 2^{j+1}r)}\|_X \|\chi_{B(y, 2^{j+1}r)}(b(\cdot) - (b)_{B(y, 2r)})^m\|_{X'} \right) \\
& \leq Cr^{-n} \sum_{j=0}^{\infty} (|b(x) - (b)_{B(y, 2r)}|^m \|f\chi_{B(y, 2^{j+1}r)}\|_X \|\chi_{B(y, 2^{j+1}r)}\|_{X'} \\
& \quad + \|f\chi_{B(y, 2^{j+1}r)}\|_X (j+1) \|b\|_*^m \|\chi_{B(y, 2^{j+1}r)}\|_{X'}) \\
& \leq Cr^{-n} \sum_{j=0}^{\infty} (|b(x) - (b)_{B(y, 2r)}|^m \|f\chi_{B(y, 2^{j+1}r)}\|_X |B(y, 2^{j+1}r)| \|\chi_{B(y, 2^{j+1}r)}\|_X^{-1} \\
& \quad + (j+1) \|b\|_*^m \|f\chi_{B(y, 2^{j+1}r)}\|_X |B(y, 2^{j+1}r)| \|\chi_{B(y, 2^{j+1}r)}\|_X^{-1}) \\
& \leq C \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \frac{|B(y, 2^{j+1}r)|}{|B(y, r)|} \|\chi_{B(y, 2^{j+1}r)}\|_X^{-1} \|f\chi_{B(y, 2^{j+1}r)}\|_X (\|b\|_*^m + |b(x) - (b)_{B(y, 2r)}|^m) \\
& = C \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \frac{|B(y, 2^{j+1}r)|}{|B(y, r)|} \|\chi_{B(y, 2^{j+1}r)}\|_X^{-1} u(y, 2^{j+1}r) \|\chi_{B(y, 2^{j+1}r)}\|_X \\
& \quad \times \frac{1}{u(y, 2^{j+1}r)} \frac{1}{\|\chi_{B(y, 2^{j+1}r)}\|_X} \|f\chi_{B(y, 2^{j+1}r)}\|_X (\|b\|_*^m + |b(x) - (b)_{B(y, 2r)}|^m) \\
& \leq C \|f\|_{M_u(X)} \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \frac{|B(y, 2^{j+1}r)|}{|B(y, r)|} u(y, 2^{j+1}r) (\|b\|_*^m + |b(x) - (b)_{B(y, 2r)}|^m).
\end{aligned}$$

同理可得

$$G_2^2 \leq C \|f\|_{M_u(X)} \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \frac{|B(y, 2^{j+1}r)|}{|B(y, r)|} u(y, 2^{j+1}r) (\|b\|_*^m + |b(x) - (b)_{B(y, 2r)}|^m).$$

进一步, 由式(5)、(21), 可以得到

$$\begin{aligned}
G_2 & = \sup_{y \in X, r > 0} \frac{1}{u(y, r)} \frac{1}{\|\chi_{B(y, r)}\|_X} \| [b^m, \mu_{\Omega, \lambda}^{*, \rho}](f_2) \chi_{B(y, r)} \|_X \\
& \leq C \sup_{y \in X, r > 0} \|b\|_*^m \|f\|_{M_u(X)} \frac{1}{u(y, r)} \frac{\|\chi_{B(y, r)}\|_X}{\|\chi_{B(y, r)}\|_X} \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \frac{|B(y, 2^{j+1}r)|}{|B(y, r)|} u(y, 2^{j+1}r) \\
& \quad + C \sup_{y \in X, r > 0} \| |b(x) - (b)_{B(y, 2r)}|^m \chi_{B(y, r)} \|_X \|f\|_{M_u(X)} \frac{1}{u(y, r)} \frac{1}{\|\chi_{B(y, r)}\|_X} \\
& \quad \times \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \frac{|B(y, 2^{j+1}r)|}{|B(y, r)|} u(y, 2^{j+1}r) \\
& \leq C \|b\|_*^m \|f\|_{M_u(X)}.
\end{aligned}$$

结合上述 G_1, G_2 的估计, 定理4证毕。

参考文献:

- [1] JIA H C, YANG D C, YUAN W, et al. Estimates for Littlewood–Paley operators on ball campanato-type function spaces[J]. *Results in Mathematics*, 2022, 78(1):37.
- [2] YAN X J, HE Z Y, YANG D C, et al. Hardy spaces associated with ball quasi-Banach function spaces on spaces of homogeneous type: Littlewood–Paley characterizations with applications to boundedness of Calderón–Zygmund operators[J]. *Acta Math Sin*, 2022, 38(7):1133-1184.
- [3] YAREMENKO M. Application of the Littlewood–Paley method to Calderón–Zygmund operators[J]. *Surv Math Appl*, 2022, 17(1):431-445.
- [4] WANG M M, MA S X, LU G H. Littlewood–Paley $g_{\lambda,\mu}^*$ -function and its commutator on non-homogeneous generalized Morrey spaces[J]. *Tokyo J Math*, 2018, 41(2):617-626.
- [5] LI Z Y, XUE Q Y. Boundedness of bi-parameter Littlewood–Paley operators on product Hardy space[J]. *Rev Mat Comput*, 2018, 31:713-745.
- [6] HÖRMANDER L. Estimates for translation invariant operators L^p spaces[J]. *Acta Math*, 1960, 104(1):93-140.
- [7] XUE Q Y, DING Y. Weighted L^p boundedness for parametrized Littlewood–Paley operators[J]. *Taiwanese J Math*, 2007, 11(4):1143-1165.
- [8] 薛庆营,张钜场,李文娟. 具有非倍测度的 Littlewood–Paley g_{λ}^* 函数的多线性交换子的端点估计[J]. *数学学报*, 2011, 54(3):353-372.
XUE Qingying, ZHANG Juyang, LI Wenjuan. Endpoint estimates for the multilinear commutators of Littlewood–Paley g_{λ}^* function with non-doubling measure[J]. *Acta Mathematica Sinica*, 2011, 54(3):353-372.
- [9] HE S, XUE Q Y. Parametrized multilinear Littlewood–Paley operators on Hardy spaces[J]. *Taiwanese J Math*, 2019, 23(1):87-101.
- [10] WANG L W. Parametrized Littlewood–Paley operators on grand variable Herz spaces[J]. *Ann Funct Anal*, 2022, 13(4):1-26.
- [11] LU G H. Some estimates for commutators of Littlewood–Paley g -functions[J]. *Open Math*, 2021, 19(1):888-897.
- [12] LU G H, TAO S P. Generalized homogeneous Littlewood–Paley g -function on some function spaces[J]. *Bull Malays Math Sci Soc*, 2020, 44:17-34.
- [13] 史鹏伟,陶双平. 极大变指标 Herz 空间上的参数型粗糙核 Littlewood–Paley 算子[J]. *山东大学学报(理学版)*, 2022, 57(12):45-54.
SHI Pengwei, TAO Shuangping. Parameterized Littlewood–Paley operators with rough kernel on grand variable Herz spaces [J]. *Journal of Shandong University (Natural Science)*, 2022, 57(12):45-54.
- [14] WANG H B, WU Y H. Higher-order commutators of parametrized Littlewood–Paley operators on Herz spaces with variable exponent[J]. *Transactions of A Razmadze Mathematical Institute*, 2017, 171:238-251.
- [15] LIU X, YANG S B, WANG X X, et al. Parametrized Littlewood–Paley operators on Herz-type Hardy spaces with variable exponent[J]. *Bull Malays Math Sci Soc*, 2020, 43(6):4143-4169.
- [16] MORREY C. On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations[J]. *Trans Am Math Soc*, 1938, 43(1):126-166.
- [17] LU G H. Parameter Marcinkiewicz integral on non-homogeneous Morrey space with variable exponent[J]. *Politehn Univ Bucharest Sci Bull Ser A Appl Math Phys*, 2021, 83(1):89-98.
- [18] WEI M Q. Mapping properties for operators on Herz-Morrey-Hardy spaces[J]. *J Pseudo-Differ Oper Appl*, 2023, 14(1):1-27.
- [19] 芮俐,逯光辉,李雪梅. 广义加权变指标 Morrey 空间上双线性 θ -型 Calderón–Zygmund 算子[J]. *山东大学学报(理学版)*, 2024, 59(4):62-72.
RUI Li, LU Guanghui, LI Xuemei. Bilinear θ -type Calderón–Zygmund operators on generalized weighted variable exponent Morrey spaces[J]. *Journal of Shandong University (Natural Science)*, 2024, 59(4):62-72.
- [20] BENNETT C, SHARPLEY R. Interpolation of operators[M]. *Pure Appl Math*, 1988:1-469.
- [21] SAWANO Y, HO K, YANG D C, et al. Hardy spaces for ball quasi-Banach function spaces[J]. *Dissertationes Mathematicae*, 2017, 525:1-102.
- [22] WANG F, YANG D C, YANG S B. Applications of Hardy spaces associated with ball quasi-Banach function spaces[J].

Results in Mathematics, 2020, 75(1):26.

- [23] ZHANG Y Y, YANG D C, YUAN W, et al. Weak Hardy-type spaces associated with ball quasi-Banach function spaces I: decompositions with applications to boundedness of Calderón-Zygmund operators[J]. Science China Mathematics, 2021, 64(9):2007-2064.
- [24] HO K P. Strongly singular Calderón-Zygmund operators on Hardy spaces associated with ball quasi-Banach function spaces [J]. Analysis and Mathematical Physics, 2023, 13(5):67.
- [25] SUN J S, YANG D C, YUAN W. Weak Hardy spaces associated with ball quasi-Banach function spaces on spaces of homogeneous type: decompositions, real interpolation, and Calderón-Zygmund operators[J]. The Journal of Geometric Analysis, 2022, 32(7):191.
- [26] SUN J S, YANG D C, YUAN W. Molecular characterization of weak Hardy spaces associated with ball quasi-Banach function spaces on spaces of homogeneous type with its applications to Littlewood-Paley function characterizations[J]. Forum Math, 2022, 34(6):1539-1589.
- [27] CHEN Y Q, JIA H C, YANG D C. Boundedness of fractional integrals on ball Campanato-type function spaces[J]. Bull Sci Math, 2023, 182(1):1-59.
- [28] WEI M Q. Linear operators and their commutators generated by Calderón-Zygmund operators on generalized Morrey spaces associated with ball Banach function spaces[J]. Positivity, 2022, 26(5):84.
- [29] SOBOLEV S L. On a theorem in functional analysis[J]. Mat Sbo, 1938, 4:471-479.
- [30] HO K P. Atomic decomposition of Hardy spaces and characterization of BMO via Banach function spaces[J]. Analysis Mathematica, 2012, 38(3):173-185.
- [31] HO K P. Definability of singular integral operators on Morrey-Banach spaces[J]. Journal of the Mathematical Society of Japan, 2020, 72(1):155-170.
- [32] SAKAMOTO M, YABUTA K. Boundedness of Marcinkiewicz functions[J]. Studia Mathematica, 1999, 135(2):103-142.

(编辑:胡春燕)

山东大学学报(理学版)微信公众号

山东大学学报(理学版)微信公众服务号“山东大学学报理学版”(微信号:sdxbllxb)以新媒体的视角和风格,及时报道行业热点,向广大作者、读者及审稿人提供学报最新资讯与动态。

关注方式:

- 1.可以通过搜索公众服务号名称“山东大学学报理学版”,添加关注。
- 2.可以通过搜索微信号 sdxbllxb,添加关注。
- 3.可以通过扫描下列二维码的方式添加关注。



扫一扫 加关注