山东大学学报(理学版)2025 年 11 月 第 60 卷 第 11 期
Journal of Shandong University(Natural Science), Vol.60, No.11, 2025 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2025)11-0016-04 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.312

EP 元以及双-EP 元的等价刻画

李亭亭[1],高月凤[2],柯圆圆[3*]

(1.扬州大学数学科学学院, 江苏 扬州 225002; 2.上海理工大学理学院, 上海 200093; 3.江汉大学人工智能学院, 湖北 武汉 430056)

摘要:设 R 是环,$a \in R$,当 $a \in R^{\#} \cap R^{\dagger}$ 时,利用集合$\{a, a^{\#}, (a^{\dagger})^{*}, a^{\dagger}, a^{*}, (a^{\#})^{*}\}$中元素的 Moore-Penrose 可逆性以及群可逆性刻画元素 a 的 EP 性以及双-EP 性。

关键词:Moore-Penrose 逆;群逆;EP 元;双-EP 元

中图分类号:O152 **文献标志码**:A

引用格式:李亭亭,高月凤,柯圆圆. EP 元以及双-EP 元的等价刻画[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(11):16-19,26.

Characterizations of EP elements and bi-EP elements

LI Tingting[1], GAO Yuefeng[2], KE Yuanyuan[3*]

(1. School of Mathematical Sciences, Yangzhou University, Yangzhou 225002, Jiangsu, China; 2. College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China; 3. School of Artificial Intelligence, Jianghan University, Wuhan 430056, Hubei, China)

Abstract: Let R be a ring and $a \in R$. When $a \in R^{\#} \cap R^{\dagger}$, we give some characterizations such that a is an EP element or a bi-EP element by the Moore-Penrose inverse and group inverse of elements in $\{a, a^{\#}, (a^{\dagger})^{*}, a^{\dagger}, a^{*}, (a^{\#})^{*}\}$.

Key words: Moore-Penrose inverse; group inverse; EP element; bi-EP element

0 引言

设 R 是一个环, $*$ 是 R 上的一个对合,满足

$$(a^{*})^{*}=a, \quad (a+b)^{*}=a^{*}+b^{*}, \quad (ab)^{*}=b^{*}a^{*}, \quad \forall a, b \in R,$$

元素 $a \in R$ 称为对称的,如果 $a^{*}=a$。

设 $a \in R$,若存在 $x \in R$,满足以下 4 个方程:

$$axa=a, \quad xax=x, \quad (ax)^{*}=ax, \quad (xa)^{*}=xa,$$

则称 a 是 Moore-Penrose 可逆的。如果 a 的 Moore-Penrose 逆存在,则它是唯一的,记为 $x=a^{\dagger}$。称元素 $a \in R$ 是群可逆的如果存在 $x \in R$ 满足 $axa=a$、$xax=x$ 以及 $xa=ax$。如果 a 的群逆存在,则它是唯一的,记为 $x=a^{\#}$。用 $R^{\dagger}$ 和 $R^{\#}$分别表示 R 中所有 Moore-Penrose 可逆的以及群可逆的元素之集。

元素 $a \in R$ 称为 EP 元[1-3],如果 $a \in R^{\#} \cap R^{\dagger}$ 且 $a^{\#}=a^{\dagger}$, R^{EP}表示 R 中所有 EP 元之集。易知当 $a \in R^{\dagger}$时,a 是 EP 元当且仅当 $aa^{\dagger}=a^{\dagger}a$;当 $a \in R^{\#}$时,a 是 EP 元当且仅当$(aa^{\#})^{*}=aa^{\#}$。Mosic 等[2]研究了 EP 元的等价刻画;Patrıcio 等[4]证明了当 $a \in R^{\dagger}$时,a 是 EP 元当且仅当 $aR=a^{*}R$;Rakic 等[5]研究了核可逆元素是 EP 元的充要条件。

收稿日期:2023-07-22; **网络出版时间**:2024-06-20 12:29:09

基金项目:国家自然科学基金资助项目(12101539, 12001368)

第一作者:李亭亭(1992—),女,讲师,博士,研究方向为代数学. E-mail:littnanjing@163.com

* **通信作者**:柯圆圆(1986—),女,副教授,博士,研究方向为代数学. E-mail:keyy086@126.com

Hartwig 等[6]定义了双-EP 元的概念:元素 $a\in R$ 称为双-EP 元如果 $a\in R^{\dagger}$ 且 $aa^{\dagger}a^{\dagger}a=a^{\dagger}aaa^{\dagger}$,若使用记号 $[a,b]=ab-ba$,则元素 $a\in R^{\dagger}$ 是双-EP 元当且仅当 $[aa^{\dagger},a^{\dagger}a]=0$。

本文在 $a\in R^{\#}\cap R^{\dagger}$ 时,利用集合 $\{a,a^{\#},(a^{\dagger})^{*},a^{\dagger},a^{*},(a^{\#})^{*}\}$ 中元素的 Moore-Penrose 可逆性以及群可逆性刻画元素 a 的 EP 性以及双-EP 性,丰富和完善了文献[7-9]中关于 EP 元等价刻画的研究结果。

1 主要结论

设 $a\in R^{\#}\cap R^{\dagger}$,使用记号 τ_a、γ_a 以及 χ_a 表示以下 3 个集合:

$$\tau_a=\{a,a^{\#},(a^{\dagger})^{*}\},\quad \gamma_a=\{a^{\dagger},a^{*},(a^{\#})^{*}\},\quad \chi_a=\tau_a\cup\gamma_a=\{a,a^{\#},(a^{\dagger})^{*},a^{\dagger},a^{*},(a^{\#})^{*}\}。$$

引理 1[10] 设 $a\in R^{\#}\cap R^{\dagger}$,则有以下结论:

(1) $a^{\#}\in R^{\dagger}$,且 $(a^{\#})^{\dagger}=a^{\dagger}a^{3}a^{\dagger}$;

(2) $a^{\dagger}\in R^{\#}$,且 $(a^{\dagger})^{\#}=(aa^{\#})^{*}a(aa^{\#})^{*}$。

定理 1 设 $a\in R^{\#}\cap R^{\dagger}$, $w\in\chi_a$,则有以下等式成立:

(1) $ww^{\dagger}=\begin{cases}aa^{\dagger}, & w\in\tau_a,\\ a^{\dagger}a, & w\in\gamma_a;\end{cases}$ (2) $w^{\dagger}w=\begin{cases}a^{\dagger}a, & w\in\tau_a,\\ aa^{\dagger}, & w\in\gamma_a;\end{cases}$ (3) $ww^{\#}=w^{\#}w=\begin{cases}aa^{\#}, & w\in\tau_a,\\ (aa^{\#})^{*}, & w\in\gamma_a。\end{cases}$

证明 利用 Moore-Penrose 逆、群逆的定义以及引理 1 证明这 3 个表达式。

(1) 当 $w\in\tau_a$时,分 3 种情况证明:

① 当 $w=a$ 时,$ww^{\dagger}=aa^{\dagger}$,成立。

② 当 $w=a^{\#}$时,$ww^{\dagger}=a^{\#}(a^{\#})^{\dagger}=a^{\#}a^{\dagger}a^{3}a^{\dagger}=a^{\#}a^{\#}aa^{\dagger}a^{3}a^{\dagger}=a^{\#}a^{\#}a^{3}a^{\dagger}=aa^{\dagger}$,成立。

③ 当 $w=(a^{\dagger})^{*}$时,$ww^{\dagger}=(a^{\dagger})^{*}((a^{\dagger})^{*})^{\dagger}=(a^{\dagger})^{*}a^{*}=aa^{\dagger}$,成立。

当 $w\in\gamma_a$时,分 3 种情况证明:

① 当 $w=a^{\dagger}$ 时,$ww^{\dagger}=a^{\dagger}(a^{\dagger})^{\dagger}=a^{\dagger}a$,成立。

② 当 $w=a^{*}$ 时,$ww^{\dagger}=a^{*}(a^{*})^{\dagger}=a^{*}(a^{\dagger})^{*}=a^{\dagger}a$,成立。

③ 当 $w=(a^{\#})^{*}$ 时,

$$\begin{aligned} ww^{\dagger} &=(a^{\#})^{*}((a^{\#})^{*})^{\dagger}=(a^{\#})^{*}((a^{\#})^{\dagger})^{*}=(a^{\#})^{*}(a^{\dagger}a^{3}a^{\dagger})^{*}=(a^{\dagger}a^{3}a^{\dagger}a^{\#})^{*}=(a^{\dagger}a^{3}a^{\dagger}aa^{\#}a^{\#})^{*}\\ &=(a^{\dagger}a^{3}a^{\#}a^{\#})^{*}=(a^{\dagger}a)^{*}=a^{\dagger}a,成立。\end{aligned}$$

(2) 证明类似(1),此处不再赘述。

(3) 当 $w\in\tau_a$时,分 3 种情况证明:

① 当 $w=a$ 时,$ww^{\#}=aa^{\#}$,成立。

② 当 $w=a^{\#}$时,$ww^{\#}=a^{\#}(a^{\#})^{\#}=a^{\#}a=aa^{\#}$,成立。

③ 当 $w=(a^{\dagger})^{*}$ 时,

$$\begin{aligned} ww^{\#}&=(a^{\dagger})^{*}((a^{\dagger})^{*})^{\#}=(a^{\dagger})^{*}((a^{\dagger})^{\#})^{*}=(a^{\dagger})^{*}((aa^{\#})^{*}a(aa^{\#})^{*})^{*}=(a^{\dagger}aa^{\dagger})^{*}aa^{\#}a^{*}aa^{\#}\\ &=(a^{\dagger})^{*}a^{\dagger}aaa^{\#}a^{*}aa^{\#}=(a^{\dagger})^{*}a^{\dagger}aa^{*}aa^{\#}=(aa^{\dagger}aa^{\dagger})^{*}aa^{\#}=aa^{\dagger}aa^{\#}=aa^{\#},成立。\end{aligned}$$

当 $w\in\gamma_a$时,分 3 种情况证明:

① 当 $w=a^{\dagger}$ 时,

$$\begin{aligned} ww^{\#}&=a^{\dagger}(a^{\dagger})^{\#}=a^{\dagger}(aa^{\#})^{*}a(aa^{\#})^{*}=a^{\dagger}aa^{\dagger}(aa^{\#})^{*}a(aa^{\#})^{*}=a^{\dagger}(aa^{\#}aa^{\dagger})^{*}a(aa^{\#})^{*}\\ &=a^{\dagger}(aa^{\dagger})^{*}a(aa^{\#})^{*}=a^{\dagger}a(aa^{\#})^{*}=(aa^{\#}a^{\dagger}a)^{*}=(a^{\#}a)^{*}=(aa^{\#})^{*},成立。\end{aligned}$$

② 当 $w=a^{*}$ 时,$ww^{\#}=a^{*}(a^{*})^{\#}=a^{*}(a^{\#})^{*}=(a^{\#}a)^{*}=(aa^{\#})^{*}$,成立。

③ 当 $w=(a^{\#})^{*}$ 时,$ww^{\#}=(a^{\#})^{*}((a^{\#})^{*})^{\#}=(a^{\#})^{*}((a^{\#})^{\#})^{*}=(a^{\#})^{*}a^{*}=(aa^{\#})^{*}$,成立。

推论 1 设 $a\in R^{\#}\cap R^{\dagger}$, x、$y\in\chi_a$,则有以下等式成立:

(1) $yy^{\dagger}=\begin{cases}xx^{\dagger}, & x、y\in\tau_a 或 x、y\in\gamma_a,\\ x^{\dagger}x, & x\in\tau_a,\ y\in\gamma_a 或 x\in\gamma_a,\ y\in\tau_a;\end{cases}$

(2) $y^{\dagger}y=\begin{cases}x^{\dagger}x, & x、y\in\tau_a 或 x、y\in\gamma_a,\\ xx^{\dagger}, & x\in\tau_a,\ y\in\gamma_a 或 x\in\gamma_a,\ y\in\tau_a;\end{cases}$

(3) $yy^{\#}=\begin{cases}xx^{\#}, & x、y\in\tau_a \text{或} x、y\in\gamma_a,\\ (xx^{\#})^*, & x\in\tau_a,\ y\in\gamma_a \text{或} x\in\gamma_a,\ y\in\tau_a。\end{cases}$

定理 2 设 $a\in R^{\#}\cap R^{\dagger}$, $w\in\chi_a$,则下列条件等价:

(1) a 是双-EP 元;(2) a 是 EP 元;(3) w 是双-EP 元;(4) w 是 EP 元。

证明 (1)⇒(2)因为 a 是双-EP 元,即 $aa^{\dagger}a^{\dagger}a=a^{\dagger}aaa^{\dagger}$,所以

$$aa^{\dagger}=a^{\#}a^2a^{\dagger}=a^{\#}a(a^{\dagger}aaa^{\dagger})=a^{\#}a(aa^{\dagger}a^{\dagger}a)=aa^{\dagger}a^{\dagger}a=(aa^{\dagger}a^{\dagger}a)aa^{\#}=(a^{\dagger}aaa^{\dagger})aa^{\#}=a^{\dagger}a,$$

因此 a 是 EP 元。

(2)⇒(1)显然。

(1)⇔(3)根据定理 1,可得

$$a\text{ 是双-EP 元}\Leftrightarrow aa^{\dagger}a^{\dagger}a=a^{\dagger}aaa^{\dagger}\Leftrightarrow\begin{cases}ww^{\dagger}w^{\dagger}w=w^{\dagger}www^{\dagger}, & w\in\tau_a\\ w^{\dagger}www^{\dagger}=ww^{\dagger}w^{\dagger}w, & w\in\gamma_a\end{cases}\Leftrightarrow w\text{ 是双-EP 元。}$$

(3)⇔(4)由(1)⇔(2)可知。

定理 3 设 $a\in R^{\#}\cap R^{\dagger}$, $x、y\in\tau_a$或 $x、y\in\gamma_a$,则下列条件等价:

(1) a 是双-EP 元;(2) a 是 EP 元;(3) $[xx^{\dagger},y^{\dagger}y]=0$;(4) $[x^{\dagger},yy^{\#}]=0$;(5) $[xx^*,y^{\dagger}y]=0$;

(6) $[x^*x,yy^{\dagger}]=0$。

证明 (1)⇔(2)⇒(3)、(4)、(5)、(6),由 EP 元、双-EP 元的定义以及定理 2 可得。

(3)⇒(1)。条件$[xx^{\dagger},y^{\dagger}y]=0$ 即 $xx^{\dagger}y^{\dagger}y=y^{\dagger}yxx^{\dagger}$,根据推论 1,当 $x、y\in\tau_a$或 $x、y\in\gamma_a$时,上式等价于 $xx^{\dagger}x^{\dagger}x=x^{\dagger}xxx^{\dagger}$,故 x 是双-EP 元,由定理 2 可知 a 是双-EP 元。

(4)⇒(2)。条件$[x^{\dagger},yy^{\#}]=0$ 即 $x^{\dagger}yy^{\#}=yy^{\#}x^{\dagger}$,当 $x、y\in\tau_a$或 $x、y\in\gamma_a$时,上式即 $x^{\dagger}xx^{\#}=xx^{\#}x^{\dagger}$,左乘 x 得 $xx^{\#}=xx^{\dagger}$,故 x 是 EP 元,进而 a 是 EP 元。

(5)⇒(2)。条件$[xx^*,y^{\dagger}y]=0$ 即 $xx^*y^{\dagger}y=y^{\dagger}yxx^*$,当 $x、y\in\tau_a$或 $x、y\in\gamma_a$时,上式等价于 $xx^*x^{\dagger}x=x^{\dagger}xxx^*$,由文献[10]中的定理 1.2.1(xxv),可知 x 是 EP 元,再由定理 2 可知 a 是 EP 元。

(6)⇒(2)。条件$[x^*x,yy^{\dagger}]=0$ 即 $x^*xyy^{\dagger}=yy^{\dagger}x^*x$,当 $x、y\in\tau_a$或 $x、y\in\gamma_a$时,上式等价于 $x^*xxx^{\dagger}=xx^{\dagger}x^*x$,由文献[10]中的定理 1.2.1(xxiv),可知 x 是 EP 元,再由定理 2 可知 a 是 EP 元。

定理 4 设 $a\in R^{\#}\cap R^{\dagger}$, $x\in\tau_a$, $y\in\gamma_a$或 $x\in\gamma_a$, $y\in\tau_a$,则下列条件等价:

(1) a 是双-EP 元;(2) a 是 EP 元;(3) 存在 $x\in\tau_a$, $y\in\gamma_a$或 $x\in\gamma_a$, $y\in\tau_a$,使得$[x^{\dagger}x,y^{\dagger}y]=0$;

(4) $[xx^*,yy^{\dagger}]=0$;(5) $[x^*x,y^{\dagger}y]=0$。

证明 (1)⇔(2)⇒(3)、(4)、(5)由 EP 元、双-EP 元的定义以及定理 2 可得。

(3)⇒(1)。条件$[x^{\dagger}x,y^{\dagger}y]=0$ 即 $x^{\dagger}xy^{\dagger}y=y^{\dagger}yx^{\dagger}x$,根据推论 1,当 $x\in\tau_a$, $y\in\gamma_a$或 $x\in\gamma_a$, $y\in\tau_a$时,上式等价于 $x^{\dagger}xxx^{\dagger}=xx^{\dagger}x^{\dagger}x$,故 x 是双-EP 元,从而 a 是双-EP 元。

(4)⇒(2)。条件$[xx^*,yy^{\dagger}]=0$ 即 $xx^*yy^{\dagger}=yy^{\dagger}xx^*$,当 $x\in\tau_a$, $y\in\gamma_a$或 $x\in\gamma_a$, $y\in\tau_a$时,上式等价于 $xx^*x^{\dagger}x=x^{\dagger}xxx^*$,由文献[10]中的定理 1.2.1(xxv),可知 x 是 EP 元,再由定理 2 可知 a 是 EP 元。

(6)⇒(2)。条件$[x^*x,y^{\dagger}y]=0$ 即 $x^*xy^{\dagger}y=y^{\dagger}yx^*x$,当 $x\in\tau_a$, $y\in\gamma_a$或 $x\in\gamma_a$, $y\in\tau_a$时,上式等价于 $x^*xxx^{\dagger}=xx^{\dagger}x^*x$,由文献[10]中的定理 1.2.1(xxiv),可知 x 是 EP 元,再由定理 2 可知 a 是 EP 元。

定理 5 设 $a\in R^{\#}\cap R^{\dagger}$, $x、y\in\chi_a$,则下列条件等价:

(1)a 是双-EP 元;(2) a 是 EP 元;(3) $[x,yy^{\dagger}]=0$;(4) $[x,y^{\dagger}y]=0$;(5) $[x^{\#},yy^{\dagger}]=0$;

(6) $[x^{\#},y^{\dagger}y]=0$;(7) $[x^{\dagger},yy^{\dagger}]=0$;(8) $[x^{\dagger},y^{\dagger}y]=0$;(9) $[xx^{\#},yy^{\dagger}]=0$;(10) $[xx^{\#},y^{\dagger}y]=0$。

证明 (1)⇔(2)⇒(3)、(4)、(5)、(6)、(7)、(8)、(9)、(10)由 EP 元、双-EP 元的定义以及定理 2 可得。

(3)⇒(2)。条件$[x,yy^{\dagger}]=0$ 即 $xyy^{\dagger}=yy^{\dagger}x$,根据推论 1,当 $x、y\in\tau_a$或 $x、y\in\gamma_a$时,$xyy^{\dagger}=yy^{\dagger}x$ 即 $xxx^{\dagger}=xx^{\dagger}x$,左乘 $x^{\#}$得 $xx^{\dagger}=x^{\#}x$,故 x 是 EP 元,由定理 2 可知 a 是 EP 元。

当 $x\in\tau_a$, $y\in\gamma_a$或 $x\in\gamma_a$, $y\in\tau_a$时,$xyy^{\dagger}=yy^{\dagger}x$ 即 $xx^{\dagger}x=x^{\dagger}xx$,右乘 $x^{\#}$得 $xx^{\#}=x^{\dagger}x$,故 x 是 EP 元,由定理 2 可知 a 是 EP 元。

(4)⇒(2)。条件$[x,y^{\dagger}y]=0$ 即 $xy^{\dagger}y=y^{\dagger}yx$,由推论 1 可知,当 $x、y\in\tau_a$或 $x、y\in\gamma_a$时,$xy^{\dagger}y=y^{\dagger}yx$ 即 $xx^{\dagger}x=$

$x^\dagger xx$,右乘 $x^\#$ 得 $xx^\# = x^\dagger x$,故 x 是 EP 元,进而 a 是 EP 元。

当 $x \in \tau_a$, $y \in \gamma_a$ 或 $x \in \gamma_a$, $y \in \tau_a$ 时,$xy^\dagger y = y^\dagger yx$ 即 $xxx^\dagger = xx^\dagger x$,左乘 $x^\#$ 得 $xx^\dagger = x^\# x$,故 x 是 EP 元,所以 a 是 EP 元。

(5)⇒(2)。条件$[x^\#, yy^\dagger] = 0$ 即 $x^\# yy^\dagger = yy^\dagger x^\#$,根据推论 1 可得,当 x、$y \in \tau_a$ 或 x、$y \in \gamma_a$ 时,$x^\# yy^\dagger = yy^\dagger x^\#$ 即 $x^\# xx^\dagger = xx^\dagger x^\#$,左乘 x 得 $xx^\dagger = xx^\#$,故 x 是 EP 元,进而可知 a 是 EP 元。

当 $x \in \tau_a$, $y \in \gamma_a$ 或 $x \in \gamma_a$, $y \in \tau_a$ 时,$x^\# yy^\dagger = yy^\dagger x^\#$ 即 $x^\# x^\dagger x = x^\dagger xx^\#$,右乘 x 得 $x^\# x = x^\dagger x$,故 x 是 EP 元,所以 a 是 EP 元。

(6)⇒(2)。条件$[x^\#, y^\dagger y] = 0$ 即 $x^\# y^\dagger y = y^\dagger yx^\#$,由推论 1 可知,当 x、$y \in \tau_a$ 或 x、$y \in \gamma_a$ 时,$x^\# y^\dagger y = y^\dagger yx^\#$ 即 $x^\# x^\dagger x = x^\dagger xx^\#$,右乘 x 得 $x^\# x = x^\dagger x$,故 x 是 EP 元,从而 a 是 EP 元。

当 $x \in \tau_a$, $y \in \gamma_a$ 或 $x \in \gamma_a$, $y \in \tau_a$ 时,$x^\# y^\dagger y = y^\dagger yx^\#$ 即 $x^\# xx^\dagger = xx^\dagger x^\#$,左乘 x 得 $xx^\dagger = xx^\#$,故 x 是 EP 元,进而 a 是 EP 元。

(7)⇒(1)。条件$[x^\dagger, yy^\dagger] = 0$ 即 $x^\dagger yy^\dagger = yy^\dagger x^\dagger$,根据推论 1 可得,当 x、$y \in \tau_a$ 或 x、$y \in \gamma_a$ 时,$x^\dagger yy^\dagger = yy^\dagger x^\dagger$ 即 $x^\dagger xx^\dagger = x^\dagger x^\dagger x$,左乘 x 得 $xx^\dagger = xx^\dagger x^\dagger x$,从而有

$$x^\dagger xxx^\dagger = (xx^\dagger x^\dagger x)^* = (xx^\dagger)^* = xx^\dagger = xx^\dagger x^\dagger x,$$

故 x 是双-EP 元,由定理 2 可知 a 是双-EP 元。

当 $x \in \tau_a$, $y \in \gamma_a$ 或 $x \in \gamma_a$, $y \in \tau_a$ 时,$x^\dagger yy^\dagger = yy^\dagger x^\dagger$ 即 $x^\dagger x^\dagger x = x^\dagger xx^\dagger$,左乘 x 得 $xx^\dagger x^\dagger x = xx^\dagger$,由上述证明可知 a 是双-EP 元。

(8)⇒(1)。条件$[x^\dagger, y^\dagger y] = 0$ 即 $x^\dagger y^\dagger y = y^\dagger yx^\dagger$,根据推论 1 可得,当 x、$y \in \tau_a$ 或 x、$y \in \gamma_a$ 时,$x^\dagger y^\dagger y = y^\dagger yx^\dagger$ 即 $x^\dagger x^\dagger x = x^\dagger xx^\dagger$,左乘 x 得 $xx^\dagger x^\dagger x = xx^\dagger$,由上述证明可知 a 是双-EP 元。

当 $x \in \tau_a$, $y \in \gamma_a$ 或 $x \in \gamma_a$, $y \in \tau_a$ 时,$x^\dagger y^\dagger y = y^\dagger yx^\dagger$ 即 $x^\dagger xx^\dagger = xx^\dagger x^\dagger$,右乘 x 得 $x^\dagger x = xx^\dagger x^\dagger x$,从而有

$$x^\dagger xxx^\dagger = (xx^\dagger x^\dagger x)^* = (x^\dagger x)^* = x^\dagger x = xx^\dagger x^\dagger x,$$

故 x 是双-EP 元,由定理 2 可知 a 是双-EP 元。

(9)⇒(2)。条件$[xx^\#, yy^\dagger] = 0$ 即 $xx^\# yy^\dagger = yy^\dagger xx^\#$,根据推论 1,当 x、$y \in \tau_a$ 或 x、$y \in \gamma_a$ 时,$xx^\# yy^\dagger = yy^\dagger xx^\#$ 即 $xx^\# xx^\dagger = xx^\dagger xx^\#$,化简得 $xx^\dagger = xx^\#$,故 x 是 EP 元,由定理 2 可知 a 是 EP 元。

当 $x \in \tau_a$, $y \in \gamma_a$ 或 $x \in \gamma_a$, $y \in \tau_a$ 时,$xx^\# yy^\dagger = yy^\dagger xx^\#$ 即 $xx^\# x^\dagger x = x^\dagger xxx^\#$,化简得 $x^\# x = x^\dagger x$,故 x 是 EP 元,由定理 2 可知 a 是 EP 元。

(10)⇒(2)。条件$[xx^\#, y^\dagger y] = 0$ 即 $xx^\# y^\dagger y = y^\dagger yxx^\#$,根据推论 1,当 x、$y \in \tau_a$ 或 x、$y \in \gamma_a$ 时,$xx^\# y^\dagger y = y^\dagger yxx^\#$ 即 $xx^\# x^\dagger x = x^\dagger xxx^\#$,化简得 $x^\# x = x^\dagger x$,故 x 是 EP 元,从而 a 是 EP 元。

当 $x \in \tau_a$, $y \in \gamma_a$ 或 $x \in \gamma_a$, $y \in \tau_a$ 时,$xx^\# y^\dagger y = y^\dagger yxx^\#$ 即 $xx^\# xx^\dagger = xx^\dagger xx^\#$,化简得 $xx^\dagger = xx^\#$,故 x 是 EP 元,进而可知 a 是 EP 元。

当定理 3—5 中的 x,y 取定 χ_a 中的元素后可以得到很多已有结论,因此定理 3—5 所涵盖的内容更广泛更丰富。例如:取 $x = y = a$ 时,由定理 3、5 可得如下推论,即文献[8]中的定理 1.2.1。

推论 2[8]　设 $a \in R^\# \cap R^\dagger$,则下列条件等价:

(1) a 是双-EP 元;(2) a 是 EP 元;(3) $aaa^\dagger = a$;(4) $a = a^\dagger aa$;(5) $a^\# aa^\dagger = a^\#$;(6) $a^\# = a^\dagger aa^\#$;

(7) $a^\dagger = aa^\dagger a^\dagger$;(8) $a^\dagger a^\dagger a = a^\dagger$;(9) $aa^\dagger = aa^\#$;(10) $a^\# a = a^\dagger a$;(11) $a^\dagger aa^\# = aa^\# a^\dagger$;

(12) $aa^* a^\dagger a = a^\dagger aaa^*$;(13) $a^* aaa^\dagger = aa^\dagger a^* a$。

参考文献:

[1] KOLIHA J J, PATRICIO P. Elements of rings with equal spectral idempotents[J]. Journal of the Australian Mathematical Society, 2002, 72(1):137-152.

[2] MOSIC D, DJORDJEVIC D S, KOLIHA J J. EP elements in rings[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2009, 431(5/6/7):527-535.

[3] MOSIC D, DJORDJEVIC D S. Further results on partial isometries and EP elements in rings with involution[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2011, 54(1/2):460-465.

(下转第 26 页)