

# 群的 $\mathcal{B}$ -Gorenstein 上同调维数

雷逸鸣, 梁力\*

(兰州交通大学数理学院, 甘肃 兰州 730070)

**摘要:**介绍群的  $\mathcal{B}$ -Gorenstein 上同调维数,刻画群的  $\mathcal{B}$ -Gorenstein 上同调维数的有限性。

**关键词:** $\mathcal{B}$ -Gorenstein 投射模; $\mathcal{B}$ -Gorenstein 投射维数;群环; $\mathcal{B}$ -Gorenstein 上同调维数

**中图分类号:**O154.2 **文献标志码:**A

**引用格式:**雷逸鸣,梁力.群的  $\mathcal{B}$ -Gorenstein 上同调维数[J].山东大学学报(理学版),2025,60(11):37-41.

## $\mathcal{B}$ -Gorenstein cohomological dimension for groups

LEI Yiming, LIANG Li\*

(School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, Gansu, China)

**Abstract:** The  $\mathcal{B}$ -Gorenstein cohomology dimension of groups was introduced and the finiteness of the  $\mathcal{B}$ -Gorenstein cohomology dimension of groups was characterized.

**Key words:**  $\mathcal{B}$ -Gorenstein projective module;  $\mathcal{B}$ -Gorenstein projective dimension; group ring;  $\mathcal{B}$ -Gorenstein cohomology dimension

### 1 引言及预备知识

群的上同调理论的研究源于拓扑学<sup>[1]</sup>。关于 Gorenstein 同调代数的研究起源于 20 世纪 60 年代,文献 [2-3] 中给出 Gorenstein 投射、Gorenstein 内射和 Gorenstein 平坦模的概念,用它们分别替代同调代数中投射、内射和平坦模,并得出对应的结论。文献 [4-5] 研究群环上模的投射维数,得到群的 Gorenstein 上同调维数的相关概念。文献 [6] 中推广 Gorenstein 投射模的概念,引入  $\mathcal{B}$ -Gorenstein 投射模。本文中介绍了群环  $RG$  上的模的  $\mathcal{B}$ -Gorenstein 投射维数的相关性质,并给出群的  $\mathcal{B}$ -Gorenstein 上同调维数有限性的刻画。

本文中  $G$  是群, $R$  是有单位元的交换环, $\mathcal{B}$  是包含所有投射模的  $R$ -模类, $\mathcal{B}_G$  是包含所有投射模的  $RG$ -模类且满足任意  $\mathcal{B}_G$  中的元素作为  $R$ -模在  $\mathcal{B}$  中。以下给出有关模的  $\mathcal{B}$ -Gorenstein 投射维数的准备知识。

**定义 1**<sup>[6]</sup> 称  $R$ -模  $M$  是  $\mathcal{B}$ -Gorenstein 投射模,如果存在投射  $R$ -模的正合复形

$$\mathfrak{P} = \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow P^0 \rightarrow P^1 \rightarrow \cdots$$

使得  $M \cong \text{Im}(P_0 \rightarrow P^0)$ ,且对任意的  $F \in \mathcal{B}$ ,序列  $\text{Hom}_R(\mathfrak{P}, F)$  正合,称这里的  $\mathfrak{P}$  为  $\mathcal{B}$ -完全投射分解。

**定义 2** 设  $M$  是  $R$ -模,则  $M$  的  $\mathcal{B}$ -分解是指正合列  $\cdots \rightarrow F_n \rightarrow \cdots \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ ,其中每个  $F_i \in \mathcal{B}$ ;  $M$  的  $\mathcal{B}$ -Gorenstein 投射分解指正合列  $\cdots \rightarrow X_n \rightarrow \cdots \rightarrow X_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ ,其中每个  $X_i$  是  $\mathcal{B}$ -Gorenstein 投射的。

**定义 3**  $R$ -模  $M$  的  $\mathcal{B}$ -维数  $\mathcal{B}\text{-dim}_R M$  定义为

$$\mathcal{B}\text{-dim}_R M = \inf \{ n \mid 0 \rightarrow F_n \rightarrow \cdots \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0 \text{ 是 } M \text{ 的 } \mathcal{B}\text{-分解} \},$$

若不存在这样长度有限的  $M$  的  $\mathcal{B}$ -分解,则称  $\mathcal{B}\text{-dim}_R M = \infty$ ;  $R$ -模  $M$  的  $\mathcal{B}$ -Gorenstein 投射维数  $\mathcal{B}\text{-Gpd}_R M$  定义为

$\mathcal{B}\text{-Gpd}_R M = \inf \{ n \mid 0 \rightarrow X_n \rightarrow \cdots \rightarrow X_0 \rightarrow M \rightarrow 0 \text{ 是 } M \text{ 的 } \mathcal{B}\text{-Gorenstein 投射分解} \}$ ,

若不存在这样长度有限的  $M$  的  $\mathcal{B}\text{-Gorenstein}$  投射分解, 则称  $\mathcal{B}\text{-Gpd}_R M = \infty$ 。

**引理 1** 设  $M$  是满足  $\mathcal{B}\text{-Gpd}_R M = n < \infty$  的  $R$ -模, 则存在  $R$ -模的正合列

$$0 \rightarrow K \rightarrow X \rightarrow M \rightarrow 0,$$

这里  $X$  是  $\mathcal{B}\text{-Gorenstein}$  投射的, 且  $\text{pd}_R K = n - 1$ 。

**证明** 取正合列

$$0 \rightarrow K' \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

这里  $P_0, \dots, P_{n-1}$  是投射的。因为  $\mathcal{B}\text{-Gpd}_R M = n$ , 所以  $K'$  是  $\mathcal{B}\text{-Gorenstein}$  投射的, 故有正合列

$$0 \rightarrow K' \rightarrow Q^0 \rightarrow \cdots \rightarrow Q^{n-1} \rightarrow X \rightarrow 0,$$

这里  $Q^0, \dots, Q^{n-1}$  是投射的,  $X$  是  $\mathcal{B}\text{-Gorenstein}$  投射的, 且对任意  $F \in \mathcal{B}$ , 有  $\text{Hom}_R(-, F)$  作用后仍正合。故由比较引理<sup>[7]</sup>, 有行正合的交换图

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & K' & \longrightarrow & Q^0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Q^{n-1} & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & K' & \longrightarrow & P_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

考虑映射锥

$$0 \rightarrow Q^0 \rightarrow P_{n-1} \oplus Q^1 \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \oplus Q^{n-1} \rightarrow P_0 \oplus X \xrightarrow{\varphi} M \rightarrow 0,$$

这里除了  $P_0 \oplus X$  和  $M$  外的其他项均是投射的, 且  $P_0 \oplus X$  是  $\mathcal{B}\text{-Gorenstein}$  投射的。令  $K = \text{Ker } \varphi$ , 易知  $\text{pd}_R K = n - 1$ , 故  $0 \rightarrow K \rightarrow P_0 \oplus X \rightarrow M \rightarrow 0$  是满足条件的正合列。

**引理 2** 设  $M$  是投射维数有限的  $R$ -模, 则  $\mathcal{B}\text{-Gpd}_R M = \text{pd}_R M$ 。

**证明** 设  $\text{pd}_R M = n < \infty$ 。由于投射  $R$ -模都是  $\mathcal{B}\text{-Gorenstein}$  投射的, 故有  $\mathcal{B}\text{-Gpd}_R M \leq \text{pd}_R M$ , 即  $\mathcal{B}\text{-Gpd}_R M \leq n < \infty$ 。下证  $\mathcal{B}\text{-Gpd}_R M \geq n$ 。只需证存在  $F \in \mathcal{B}$ , 使得  $\text{Ext}_R^n(M, F) \neq 0$ 。因为  $\text{pd}_R M = n$ , 所以存在模  $N$ , 使得  $\text{Ext}_R^n(M, N) \neq 0$ 。因此存在投射模  $P$ , 有正合列  $P \rightarrow N \rightarrow 0$ , 且  $\text{Ext}_R^n(M, P) \neq 0$ 。又因为  $P \in \mathcal{B}$ , 所以命题成立。

**定义 4** 群  $G$  在环  $R$  上的  $\mathcal{B}\text{-Gorenstein}$  上调维数  $\mathcal{B}\text{-Gcd}_R G$  定义为平凡  $RG$ -模  $R$  的  $\mathcal{B}\text{-Gorenstein}$  投射维数, 即  $\mathcal{B}\text{-Gcd}_R G = \mathcal{B}_G\text{-Gpd}_{RG} R$ 。

**定义 5** 所有  $\mathcal{B}$  中  $R$ -模的内射维数的上确界记作  $\text{sil}_R R$ , 即  $\text{sil}_R R = \sup \{ \text{id}_R F \mid F \in \mathcal{B} \}$ 。

以下是本文将要证明的主要结论。

**定理 A** 若  $R$  满足  $\text{sil}_R R < \infty$ , 则以下等价:

- (1)  $\mathcal{B}\text{-Gcd}_R G < \infty$ ;
- (2) 有  $R$ -可裂  $RG$ -正合序列  $0 \rightarrow R \rightarrow \Lambda$ , 这里  $\Lambda$  满足  $\text{pd}_{RG} \Lambda < \infty$ , 且作为  $R$ -模是投射的;
- (3) 任意  $RG$ -模的  $\mathcal{B}_G\text{-Gorenstein}$  投射维数有限。

**定理 B** 若  $H$  是  $G$  的指数有限的子群, 则有  $\mathcal{B}\text{-Gcd}_R H = \mathcal{B}\text{-Gcd}_R G$ 。

## 2 群的 $\mathcal{B}\text{-Gorenstein}$ 上调维数的有限性

**引理 3** 若  $\text{sil}_R R < \infty$ , 则所有的  $\mathcal{B}_G\text{-Gorenstein}$  投射  $RG$ -模是  $\mathcal{B}\text{-Gorenstein}$  投射  $R$ -模。

**证明** 设  $M$  是  $\mathcal{B}_G\text{-Gorenstein}$  投射  $RG$ -模, 则有  $RG$ -模的  $\mathcal{B}_G$ -完全投射分解

$$\mathfrak{P} = \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow P^0 \rightarrow P^1 \rightarrow \cdots$$

使得  $M \cong \text{Im}(P_0 \rightarrow P^0)$ 。因为投射  $RG$ -模都是投射  $R$ -模, 所以  $\mathfrak{P}$  可以看作投射  $R$ -模的正合复形。又因为  $\text{sil}_R R < \infty$ , 所以  $\mathfrak{P}$  是  $\mathcal{B}$ -完全投射分解, 因此,  $M$  作为  $R$ -模是  $\mathcal{B}\text{-Gorenstein}$  投射的。

对任意  $R$ -模  $M$ , 记  $\text{Ind}_{|1|}^G M = RG \otimes_R M$ 。

**引理 4** 令  $M$  是  $R$ -模, 若  $M$  是  $\mathcal{B}\text{-Gorenstein}$  的, 则  $RG$ -模  $\text{Ind}_{|1|}^G M$  是  $\mathcal{B}_G\text{-Gorenstein}$  投射的。

**证明** 由于  $M$  是  $\mathcal{B}\text{-Gorenstein}$  投射的, 故有  $\mathcal{B}$ -完全投射分解

$$\mathfrak{P} \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow P^0 \rightarrow P^1 \rightarrow \cdots$$

使得  $M \cong \text{Im}(P_0 \rightarrow P^0)$ 。考虑序列

$$\text{Ind}_{|1|}^G \mathfrak{P} = \cdots \rightarrow \text{Ind}_{|1|}^G P_1 \rightarrow \text{Ind}_{|1|}^G P_0 \rightarrow \text{Ind}_{|1|}^G P^0 \rightarrow \text{Ind}_{|1|}^G P^1 \rightarrow \cdots$$

对任意  $RG$ -模  $F \in \mathcal{L}_G$ , 由于  $F$  作为  $R$ -模在  $\mathcal{L}$  中, 故  $\text{Hom}_{RG}(\text{Ind}_{|1|}^G \mathfrak{P}, F) \cong \text{Hom}_R(\mathfrak{P}, F)$  正合, 即  $\text{Ind}_{|1|}^G \mathfrak{P}$  是  $\mathcal{L}_G$ -完全投射分解。又因为  $\text{Ind}_{|1|}^G M \cong \text{Im}(\text{Ind}_{|1|}^G P_0 \rightarrow \text{Ind}_{|1|}^G P^0)$ , 所以  $\text{Ind}_{|1|}^G M$  是  $\mathcal{L}_G$ -Gorenstein 投射的。

**引理 5** 设  $P$  是投射  $RG$ -模,  $M$  是  $\mathcal{L}$ -Gorenstein 投射  $R$ -模, 则有  $P \otimes_R M$  是  $\mathcal{L}_G$ -Gorenstein 投射  $RG$ -模。

**证明** 因为  $M$  是  $\mathcal{L}$ -Gorenstein 投射  $R$ -模, 所以存在  $R$ -模的  $\mathcal{L}$ -完全投射分解  $\mathfrak{P}$ , 使得  $M \cong \text{Im}(P_0 \rightarrow P^0)$ 。考虑复形  $P \otimes_R \mathfrak{P}$ , 因为  $P$  作为  $R$ -模投射, 所以  $P \otimes_R \mathfrak{P}$  是投射  $R$ -模的正合复形, 且对任意的  $R$ -模  $F \in \mathcal{L}$ , 有同构

$$\text{Hom}_R(P \otimes_R \mathfrak{P}, F) \cong \text{Hom}_R(P, \text{Hom}_R(\mathfrak{P}, F)),$$

由于  $\mathfrak{P}$  是  $\mathcal{L}$ -完全投射分解, 故由定义知  $\text{Hom}_R(\mathfrak{P}, F)$  正合, 即  $\text{Hom}_R(P \otimes_R \mathfrak{P}, F)$  正合。又因为

$$P \otimes_R M \cong \text{Im}(P \otimes_R P_0 \rightarrow P \otimes_R P^0),$$

所以  $P \otimes_R M$  是  $\mathcal{L}$ -Gorenstein 投射  $R$ -模。考虑同构

$$P \otimes_R \text{Ind}_{|1|}^G M \cong \text{Ind}_{|1|}^G (P \otimes_R M),$$

由引理 4 知  $\text{Ind}_{|1|}^G (P \otimes_R M)$  是  $\mathcal{L}_G$ -Gorenstein 投射  $RG$ -模, 故  $P \otimes_R \text{Ind}_{|1|}^G M$  是  $\mathcal{L}_G$ -Gorenstein 投射的。 $P \otimes_R M$  是  $P \otimes_R \text{Ind}_{|1|}^G M$  的直和项, 故  $P \otimes_R M$  是  $\mathcal{L}_G$ -Gorenstein 投射  $RG$ -模<sup>[5]</sup>。

**引理 6** 若  $R$  满足  $\text{silx } R < \infty$ , 且有  $R$ -可裂的  $RG$ -模单同态  $\iota: R \rightarrow \Lambda$ , 这里  $\Lambda$  是  $R$ -投射模且满足  $\text{pd}_{RG} \Lambda < \infty$ , 则对任意  $RG$ -模  $M$ , 有不等式  $\mathcal{L}_G\text{-Gpd}_{RG} M \leq \text{pd}_{RG} \Lambda + \mathcal{L}\text{-Gpd}_R M$ 。

**证明** 设  $\text{pd}_{RG} \Lambda = n$ , 则有  $\Lambda$  的长度为  $n$  的  $RG$ -投射分解

$$0 \rightarrow P_n \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow \Lambda \rightarrow 0,$$

由于  $\Lambda$  和  $P_i$  作为  $R$ -模投射, 故这个序列作为  $R$ -模序列可裂。当  $\mathcal{L}\text{-Gpd}_R M = \infty$  时, 结论显然成立, 故不妨设  $\mathcal{L}\text{-Gpd}_R M < \infty$ 。下对  $m$  作数学归纳。

当  $m=0$  时, 即  $M$  是  $\mathcal{L}$ -Gorenstein 投射  $R$ -模。对上面的可裂序列作用函子  $M \otimes_R -$ , 可得  $RG$ -模正合序列

$$0 \rightarrow M \otimes_R P_n \rightarrow \cdots \rightarrow M \otimes_R P_1 \rightarrow M \otimes_R P_0 \rightarrow M \otimes_R \Lambda \rightarrow 0,$$

由引理 5 可知,  $M \otimes_R P_i \cong P_i \otimes_R M$  是  $\mathcal{L}_G$ -Gorenstein 投射的, 因此  $\mathcal{L}_G\text{-Gpd}_{RG} (M \otimes_R \Lambda) \leq n$ 。考虑  $R$ -可裂的  $RG$ -模单同态  $\iota: R \rightarrow \Lambda$ , 对  $RG$ -模  $M$ , 用函子  $M \otimes_R -$  作用  $R$ -可裂序列  $0 \rightarrow R \rightarrow \Lambda$  可知,  $M$  是  $RG$ -模  $M \otimes_R \Lambda$  的直和项, 因此  $\mathcal{L}_G\text{-Gpd}_{RG} M \leq \mathcal{L}_G\text{-Gpd}_{RG} (M \otimes_R \Lambda) \leq n$ , 即  $m=0$  时结论成立。

设对任意  $R$ -模  $N$ ,  $\mathcal{L}\text{-Gpd}_R N = m-1$  时结论成立, 即  $\mathcal{L}_G\text{-Gpd}_{RG} N = n+m-1$ 。

当  $\mathcal{L}\text{-Gpd}_R M = m$  时, 考虑  $RG$ -模的正合列  $0 \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$ , 这里  $P$  是投射  $RG$ -模, 也是投射  $R$ -模, 故作为  $R$ -模, 有  $\mathcal{L}\text{-Gpd}_R K = m-1$ 。由归纳假设,  $\mathcal{L}_G\text{-Gpd}_{RG} K \leq n+m-1$ , 因此  $\mathcal{L}_G\text{-Gpd}_{RG} M \leq n+m$ , 即结论成立。

**引理 7** 若  $R$  满足  $\text{silx } R < \infty$ ,  $G$  满足  $\mathcal{L}_G\text{-Gpd}_{RG} R < \infty$ , 则有  $R$ -可裂的  $RG$ -单同态  $R \rightarrow \Lambda$ , 这里  $\Lambda$  是  $R$ -投射  $RG$ -模, 且使得  $\mathcal{L}\text{-Gcd}_R G = \text{pd}_{RG} \Lambda$ 。

**证明** 设  $\mathcal{L}\text{-Gcd}_R G = \mathcal{L}_G\text{-Gpd}_{RG} R = n < \infty$ , 则由引理 1 知, 有  $RG$ -模的正合列

$$0 \rightarrow K \rightarrow X \rightarrow R \rightarrow 0,$$

这里  $X$  是  $\mathcal{L}_G$ -Gorenstein 投射的, 且  $\text{pd}_{RG} K = n-1$ 。对于  $X$ , 存在  $RG$ -模的正合列

$$0 \rightarrow X \rightarrow P \rightarrow L \rightarrow 0,$$

这里  $P$  是投射的,  $L$  是  $\mathcal{L}_G$ -Gorenstein 投射的。考虑推出图

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & X & \longrightarrow & R \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & P & \longrightarrow & \Lambda \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & L & = & L \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & 0 & & 0, \end{array}$$

其中,  $\Lambda$  是  $X \rightarrow R$  和  $X \rightarrow P$  的推出. 由中行序列可知,  $\text{pd}_{RG}\Lambda = \text{pd}_{RG}K + 1 = n$ . 因为  $\text{silx } R < \infty$ , 所以由引理 3 可知,  $L$  作为  $R$ -模是  $\mathcal{L}$ -Gorenstein 投射的, 故  $R$ -模序列

$$0 \rightarrow R \rightarrow \Lambda \rightarrow L \rightarrow 0$$

可裂, 因此  $\Lambda = R \oplus L$  是  $\mathcal{L}$ -Gorenstein 投射  $R$ -模, 即  $\mathcal{L}\text{-Gpd}_R \Lambda = 0$ . 又因为  $\text{pd}_R \Lambda \leq \text{pd}_{RG} \Lambda = n < \infty$ , 所以由引理 2 可知  $\Lambda$  作为  $R$ -模是投射的.

上面的  $R$ -投射  $RG$ -模  $\Lambda$  称为  $G$  在  $R$  上的特征模<sup>[4]</sup>, 这个概念在对  $\mathcal{L}\text{-Gcd}_R G$  的有限性的刻画中起到了重要作用.

**定理 1** 若  $R$  满足  $\text{silx } R < \infty$ , 则以下等价:

- (1)  $\mathcal{L}\text{-Gcd}_R G < \infty$ ;
- (2) 有  $R$ -可裂的  $RG$ -单同态  $R \rightarrow \Lambda$ , 这里  $\Lambda$  满足  $\text{pd}_{RG} \Lambda < \infty$ , 且作为  $R$ -模是投射的;
- (3) 任意  $RG$ -模的  $\mathcal{L}_G$ -Gorenstein 投射维数有限.

**证明** (1)  $\Rightarrow$  (2) 可由引理 7 得到.

(2)  $\Rightarrow$  (3) 可由引理 6 得到.

(3)  $\Rightarrow$  (1) 显然成立.

### 3 群变化下的 $\mathcal{L}$ -Gorenstein 上调维数

本章中的  $H$  是群  $G$  的子群, 设  $M$  是  $RH$ -模, 则  $RG \otimes_{RH} M$  是  $RG$ -模, 记作  $\text{Ind}_H^G M$ . 令  $\mathcal{L}_H$  是包含所有投射  $RH$ -模的  $RH$ -模类且满足任意  $\mathcal{L}_G$  中的元素作为  $RH$ -模在  $\mathcal{L}_H$  中, 任意  $\mathcal{L}_H$  中的元素作为  $R$ -模在  $\mathcal{L}$  中, 且对任意的  $RH$ -模  $M \in \mathcal{L}_H$ , 都有  $\text{Ind}_H^G M \in \mathcal{L}_G$ .

**命题 1** 设  $R$  满足  $\text{silx } R < \infty$ , 则  $\mathcal{L}\text{-Gcd}_R H \leq \mathcal{L}\text{-Gcd}_R G$ .

**证明** 若  $\mathcal{L}\text{-Gcd}_R G = \infty$ , 则命题 1 显然成立, 故不妨设  $\mathcal{L}\text{-Gcd}_R G = n < \infty$ . 由引理 7 知, 有  $R$ -可裂的  $RG$ -正合序列  $0 \rightarrow R \rightarrow \Lambda$ , 这里  $\Lambda$  是  $R$ -投射  $RG$ -模且  $\text{pd}_{RG} \Lambda = n$ . 注意到这个序列可看作  $R$ -可裂的  $RH$ -正合序列, 又因为投射  $RG$ -模作为  $RH$ -模是投射的, 所以  $\text{pd}_{RH} \Lambda \leq \text{pd}_{RG} \Lambda = n$ , 故对于平凡  $RH$ -模  $R$ , 由引理 7 知  $\mathcal{L}\text{-Gcd}_R H \leq n$ , 即结论成立.

**引理 8** 设  $M$  是  $RH$ -模, 则  $\mathcal{L}_G\text{-Gpd}_{RG} \text{Ind}_H^G M \leq \mathcal{L}_H\text{-Gpd}_{RH} M$ .

**证明** 若  $\mathcal{L}_H\text{-Gpd}_{RH} M = \infty$ , 则引理 8 显然成立, 故不妨设  $\mathcal{L}_H\text{-Gpd}_{RH} M = n < \infty$ . 考虑  $KH$ -模  $M$  的长度为  $n$  的  $\mathcal{L}_H$ -Gorenstein 投射分解

$$0 \rightarrow P_n \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

因为  $RG$  作为  $RH$ -模自由, 所以序列

$$0 \rightarrow \text{Ind}_H^G P_n \rightarrow \cdots \rightarrow \text{Ind}_H^G P_1 \rightarrow \text{Ind}_H^G P_0 \rightarrow \text{Ind}_H^G M \rightarrow 0$$

正合, 且可由引理 4 可类似地证明  $\text{Ind}_H^G P_i$  是  $\mathcal{L}_G$ -Gorenstein 投射的 ( $i = 0, 1, \dots, n$ ), 故  $\mathcal{L}_G\text{-Gpd}_{RG} \text{Ind}_H^G M \leq n$  成立.

**定理 2** 若  $H$  是  $G$  的指数有限的子群, 则  $\mathcal{L}\text{-Gcd}_R H = \mathcal{L}\text{-Gcd}_R G$ .

**证明** 先证  $\mathcal{L}\text{-Gcd}_R H \leq \mathcal{L}\text{-Gcd}_R G$ , 若能证明任意  $\mathcal{L}_G$ -Gorenstein 投射  $RG$ -模是  $\mathcal{L}_H$ -Gorenstein 投射  $RH$ -模, 则结论成立. 设  $M$  是任意  $\mathcal{L}_G$ -Gorenstein 投射  $RG$ -模,  $\mathfrak{P}$  是  $RG$ -模的  $\mathcal{L}_G$ -完全投射分解且满足  $M \cong \text{Im}(P_0 \rightarrow P^0)$ , 则  $\mathfrak{P}$  也是投射  $RH$ -模的正合复形. 因为  $H$  是  $G$  的指数有限的子群, 所以由文献[1]命题 5.9 可知, 对任意  $RH$ -模  $Q \in \mathcal{L}_H$ , 都有

$$\text{Hom}_{RH}(\mathfrak{P}, Q) \cong \text{Hom}_{RG}(\mathfrak{P}, \text{Ind}_H^G Q).$$

又因为  $RH$ -模  $Q \in \mathcal{L}_H$ , 所以  $RG$ -模  $\text{Ind}_H^G Q \in \mathcal{L}_G$ , 即序列  $\text{Hom}_{RH}(\mathfrak{P}, Q) \cong \text{Hom}_{RG}(\mathfrak{P}, \text{Ind}_H^G Q)$  正合, 故投射  $RH$ -模复形  $\mathfrak{P}$  是  $RH$ -模的  $\mathcal{L}_H$ -完全投射分解, 且作为  $RH$ -模,  $M \cong \text{Im}(P_0 \rightarrow P^0)$ , 因此,  $RH$ -模  $M$  是  $\mathcal{L}_H$ -Gorenstein 投射模. 特别地, 取  $M$  是平凡  $RG$ -模  $R$ , 可得  $\mathcal{L}\text{-Gcd}_R H \leq \mathcal{L}\text{-Gcd}_R G$ .

下面验证  $\mathcal{L}\text{-Gcd}_R G \leq \mathcal{L}\text{-Gcd}_R H$ . 若  $\mathcal{L}\text{-Gcd}_R H = \infty$ , 则定理 2 显然成立, 故设  $\mathcal{L}\text{-Gcd}_R H = n < \infty$ . 考虑  $RG$ -模的正合列

$$0 \rightarrow K \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow R \rightarrow 0,$$

其中  $P_i$  是投射的。因为  $\mathcal{R}\text{-Gcd}_R H = n$ , 所以  $K$  作为  $RH$ -模是  $\mathcal{R}_H$ -Gorenstein 投射的, 下证  $K$  作为  $RG$ -模是  $\mathcal{R}_G$ -Gorenstein 投射的。

考虑任意  $RG$ -模  $F \in \mathcal{R}_G$ 。因为作为  $RH$ -模, 有  $F \in \mathcal{R}_H$ , 所以  $\text{Ext}_{RH}^i(K, F) \cong \text{Ext}_{RG}^i(K, \text{Ind}_H^G F) = 0$ , 故作为  $\text{Ext}_{RG}^i(K, \text{Ind}_H^G F)$  的直和项,  $\text{Ext}_{RG}^i(K, F) = 0$ 。这说明  $K$  的任意投射分解被函子  $\text{Hom}_{RG}(-, F)$  作用后仍正合。

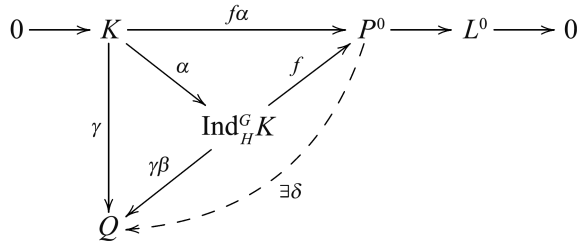
接下来构造  $K$  的  $\mathcal{R}_G$ -完全投射分解的右半部分。由引理 8 知,  $\text{Ind}_H^G K$  是  $\mathcal{R}_G$ -Gorenstein 投射  $RG$ -模, 故有  $RG$ -模的正合列

$$0 \rightarrow \text{Ind}_H^G K \xrightarrow{f} P^0 \rightarrow L \rightarrow 0, \tag{1}$$

其中,  $P^0$  是投射的,  $L$  是  $\mathcal{R}_G$ -Gorenstein 投射的。因为存在  $RH$ -模的可裂单同态  $K \xrightarrow{\alpha} \text{Ind}_H^G K$ , 所以复合可得正合列

$$0 \rightarrow K \xrightarrow{f\alpha} P^0 \rightarrow L^0 \rightarrow 0, \tag{2}$$

其中  $L^0 = \text{coker}(f\alpha)$  下证对任意的  $RG$ -模  $F \in \mathcal{R}_G$ , 函子  $\text{Hom}_{RG}(-, F)$  作用序列 (2) 仍正合。令  $\text{Ind}_H^G K \xrightarrow{\beta} K$  是  $RH$ -模同态, 且满足  $\beta\alpha = \text{Id}_K$ , 令  $Q$  是任意  $\mathcal{R}_H$  中的  $RH$ -模,  $K \xrightarrow{\gamma} Q$  是任意  $RH$ -同态。考虑图



因为序列 (1) 作为  $RH$ -序列被函子  $\text{Hom}_R(-, Q)$  作用后仍正合, 所以有正合列

$$\text{Hom}_{RH}(P^0, Q) \rightarrow \text{Hom}_{RH}(\text{Ind}_H^G K, Q) \rightarrow 0.$$

故存在  $\delta: P^0 \rightarrow Q$ , 使得  $\delta f = \gamma\beta$ , 又因为  $\delta f\alpha = \gamma\beta\alpha = \gamma$ , 所以有正合列

$$\text{Hom}_{RH}(P^0, Q) \rightarrow \text{Hom}_{RH}(K, Q) \rightarrow 0.$$

即  $\text{Ext}_{RH}^1(L^0, Q) = 0$  对任意  $Q \in \mathcal{R}_H$  成立。又因为任意  $F \in \mathcal{R}_G$  作为  $RH$ -模在  $\mathcal{R}_H$  中, 所以  $\text{Ext}_{RG}^1(L^0, \text{Ind}_H^G F) \cong \text{Ext}_{RH}^1(L^0, F) = 0$ , 故作为  $\text{Ext}_{RG}^1(L^0, \text{Ind}_H^G F)$  的直和项, 有  $\text{Ext}_{RG}^1(L^0, F) = 0$ , 即序列 (2) 被  $\text{Hom}_{RG}(-, F)$  作用后仍正合。

对  $L^0$  重复上述步骤可得正合列  $0 \rightarrow K \rightarrow P^0 \rightarrow P^1 \rightarrow P^2 \rightarrow \cdots$ , 其中  $P^i$  是投射  $RG$ -模, 记作  $\mathfrak{P}^-$ , 再取任意  $K$  的  $RG$ -投射分解, 记作  $\mathfrak{P}^+$ 。连接  $\mathfrak{P}^+$  和  $\mathfrak{P}^-$  得到的正合复形记作  $\mathfrak{P}$ 。易知对任意  $F \in \mathcal{R}_G$ , 有  $\text{Hom}_{RG}(\mathfrak{P}, F)$  正合, 且  $K \cong \text{Im}(P_0 \rightarrow P^0)$ , 故  $\mathfrak{P}$  是  $\mathcal{R}_G$ -完全投射分解, 即  $K$  作为  $RG$ -模是  $\mathcal{R}_G$ -Gorenstein 投射的。

参考文献:

[1] BROWN K S. Cohomology of groups[M]. New York: Springer, 2012.  
 [2] AUSLANDER M, BRIDGER M. Stable module category[M]. Providence: Memoirs of the American Mathematical Society, 1969.  
 [3] HOLM H. Gorenstein homological dimensions[J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2004, 189:167-193.  
 [4] EMMANOUIL I, TALELLI O. On the Gorenstein cohomological dimension of group extensions[J]. Journal of Algebra, 2022, 605:403-428.  
 [5] EMMANOUIL I, TALELLI O. Gorenstein dimension and group cohomology with group ring coefficients[J]. Journal of the London Mathematical Society, 2018, 97(2):306-324.  
 [6] BENNIS D, OUARGHI K.  $\mathcal{R}$ -Gorenstein projective modules[J]. International Mathematical Forum, 2010, 5(9/12):487-491.  
 [7] ROTMAN J J. An introduction to homological algebra [M]. New York: Springer, 2009.

(编辑:陈丽萍)