山东大学学报(理学版)2025 年 11 月 第 60 卷 第 11 期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.60, No.11, 2025 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2025)11-0048-06 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2023.498

FI-内射 N-复形

韩霞,卢博*
(西北民族大学数学与计算机科学学院, 甘肃 兰州 730030)

摘要:设 n 是整数,引入并研究了 FI-内射 N-复形的概念,证明了在凝聚环中 N-复形 I 是 FI-内射的当且仅当 I_n 是 FI-内射模,并且对任意 FP-内射 N-复形 G, $\mathrm{Hom}_R(G,I)$ 是 N-正合的。给出 FI-内射 N-复形的刻画,并讨论它与内射 N-复形之间的关系。

关键词:内射 N-复形;FP-内射 N-复形;FI-内射 N-复形
中图分类号:O153.3 **文献标志码**:A
引用格式:韩霞,卢博. FI-内射 N-复形[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(11):48-53.

FI-injective N-complexes

HAN Xia, LU Bo*
(College of Mathematics and Computer Science, Northwest Minzu University, Lanzhou 730030, Gansu, China)

Abstract: Let n be an integer. The notion of FI-injective N-complexes is introduced and studied. It is proven that an N-complex I is FI-injective over a coherent ring if and only if each I_n is an FI-injective module and $\mathrm{Hom}_R(G,I)$ is N-exact whenever G is an FP-injective N-complex. The characterization of FI-injective N-complexes is given, and the relationship between it and injective N-complexes is considered.

Key words: injective N-complex; FP-injective N-complex; FI-injective N-complex

1 引言与预备知识

文献[1]引入 FI-内射模的概念,证明在凝聚环中,模 M 是 FI-内射的当且仅当 M 是内射模的直和且是 FI-内射模的非零子模。在此基础上,文献[2-3]将 FI-内射模推广到复形范畴,定义 FI-内射复形,并且从层次模和覆盖的角度刻画 FI-内射复形。类似于复形范畴,N-复形范畴也是一个具有足够多内射对象和投射对象的阿贝尔范畴,因此也可以将同调理论的研究推广到 N-复形范畴。随着对 N-复形的研究,在 N-复形范畴中建立和研究 N-复形与其层次模和循环模之间的关系是一个重要的研究课题。受此启发,本文引入并研究 FI-内射 N-复形的概念,讨论 FI-内射 N-复形与其层次模之间的关系。

本文中所有环 R 均指具有单位元的环,涉及的 R-模均指左 R-模,N-复形均指左 R-模的 N-复形,并记 R-Mod 为所有左 R-模构成的范畴,$\mathscr{C}$为左 R-模的复形范畴,$\mathscr{C}_N(R)$表示左 R-模的 N-复形范畴。

称 R-模的序列

$$X=:\cdots\to X_{n+1}\xrightarrow{d_{n+1}}X_n\xrightarrow{d_n}X_{n-1}\xrightarrow{d_{n-1}}\cdots$$

为 N-复形,如果 $d^N=0$。任意 N 个连续微分的合成为 0,其中 d_i 称为 X 的第 i 次微分。若 N-复形 X 满足 $X_n=0$, $n\gg0$,则称 X 是上有界的;若 N-复形 X 满足 $X_n=0$, $n\ll0$,则称 X 是下有界的;若 N-复形 X 既是上有界的,也是下有界的,则称 X 是有界的。N-复形的链映射 $f:X\to Y$ 是指一簇 R-模的态射$(f_n)_{n\in\mathbf{Z}}$,其中$f_n:X_n\to Y_n$,并且

收稿日期:2023-11-29; **网络出版时间**:2024-06-20 13:29:59
基金项目:中央高校基本科研业务经费资助项目(31920230173); 国家自然科学基金资助项目(12061061); 甘肃省第一批陇原青年英才项目
第一作者:韩霞(1998—),女,硕士研究生,研究方向为同调代数. E-mail:y221530320@stu.xbmu.edu.cn
* **通信作者**:卢博(1985—),男,教授,硕士生导师,博士,研究方向为同调代数. E-mail:lubo55@126.com

对于任意 $n\in\mathbf{Z}$,满足 $d_n^Y f_n=f_{n-1}d_n^X$。对于给定的 R-模 M,以 N-复形 $D_n^t(M)$ 表示在 n、$n-1$、$\cdots$、$n-(t-1)$ 层次是 R-模 M,其余层次均为 0 的 N-复形,即

$$\cdots\to 0\to M\xrightarrow{\mathrm{id}}M\to\cdots\to M\to 0\to\cdots$$

对任意 N-复形 X 和 $i=1,2,\cdots,\mathbf{N}$,定义

$$Z_n^i(X)=\mathrm{Ker}(d_{n-(i-1)}\cdots d_{n-1}d_n),$$
$$B_n^i(X)=\mathrm{Im}(d_{n+1}d_{n+2}\cdots d_{n+i}),$$
$$H_n^i(X)=Z_n^i(X)/B_n^{N-i}(X)。$$

特别地,$Z_n^1(X)=\mathrm{Ker}(d_n)$, $Z_n^N(X)=X_n$ 和 $B_n^1(X)=\mathrm{Im}(d_{n+1})$, $B_n^N(X)=0$。

链映射 $f,g:X\to Y$ 称为同伦映射,对任意 n,如果存在态射 $s_n:X_n\to Y_{n+N-1}$,使得

$$g_n-f_n=d^{N-1}s_n+d^{N-2}s_{n-1}d+\cdots+s_{n-(N-1)}d^{N-1}=\sum_{i=0}^{N-1}d^{(N-1)-i}s_{n-i}d^i。$$

如果 f 和 g 是同伦的,则记为 $f\sim g$;如果 $f\sim 0$,则称链映射 f 是零伦的。特别地,记 $\mathscr{K}_N(R)$ 为 N-复形的同伦范畴。

若 X 和 Y 是 N-复形,则 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_N(R)}(X,Y)$ 表示从 X 到 Y 的态射组成的阿贝尔群。$\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{C}_N(R)}(-,-)$ 表示 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_N(R)}(-,-)$ 的第 i 个右导出函子。

设 $\mathscr{A}$ 是阿贝尔范畴,$\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{A}$ 中的一个对象类,$X\in\mathscr{A}$,则 X 的一个 $\mathscr{F}$-预覆盖是指态射 $f:F\to X$,其中 $F\in\mathscr{F}$,使得对任意 $F'\in\mathscr{F}$,态射 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(F',F)\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(F',X)$ 是满射。对偶地,可定义 $\mathscr{F}$-预包络的概念。

设 X,Y 是 R-模上的 N-复形,定义 N-复形 $\mathrm{Hom}_R(X,Y)$ 表示阿贝尔群的 N-复形,其中第 n 层次的阿贝尔群为

$$\mathrm{Hom}_R(X,Y)_n=\prod_{t\in\mathbf{Z}}\mathrm{Hom}_R(X_t,Y_{n+t}),\quad \forall n\in\mathbf{Z},$$

第 n 次微分定义为:若 $f\in\mathrm{Hom}_R(X,Y)_n$,则

$$(d_n(f))_m=d_{n+m}^Y f_m-(q)^n f_{m-1}d_m^X,$$

其中 q 是第 N 次单位根,$q^N=1$ 且 $q\neq 1$。

根据文献[4],设 $X\in\mathscr{C}_N(R)$,有态射 $\rho_n^{X_{n+N-1}}:D_{n+N-1}^N(X_{n+N-1})\to X$ 和 $\boldsymbol{\lambda}_n^{X_n}:X\to D_{n+N-1}^N(X_n)$。令 $\rho^X:\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}}D_{n+N-1}^N(X_{n+N-1})\to X$ 和 $\boldsymbol{\lambda}^X:X\to\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}}D_{n+N-1}^N(X_n)$,则存在正合序列

$$0\to\mathrm{Ker}\,\rho^X\xrightarrow{\varepsilon^X}\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}}D_n^N(X_n)\xrightarrow{\rho^X}X\to 0$$

和

$$0\to X\xrightarrow{\boldsymbol{\lambda}^X}\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}}D_{n+N-1}^N(X_n)\xrightarrow{\boldsymbol{\eta}^X}\mathrm{Coker}\,\boldsymbol{\lambda}^X\to 0。$$

定义函子 $\boldsymbol{\Sigma},\boldsymbol{\Sigma}^{-1}:\mathscr{C}_N(R)\to\mathscr{C}_N(R)$ 在上述正合序列中满足 $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}X=\mathrm{Ker}\,\rho^X$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}X=\mathrm{Coker}\,\boldsymbol{\lambda}^X$,则 $\boldsymbol{\Sigma}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ 诱导了三角范畴 $\mathscr{K}_N(R)$ 的自同构函子。对于 $X=(X_i,d_i^X)\in\mathscr{C}_N(R)$,由 $\boldsymbol{\Theta}(X)_i=X_{i+1}$ 和 $d_i^{\Theta(X)}=d_{i+1}^X$,定义平移函子 $\boldsymbol{\Theta}:\mathscr{C}_N(R)\to\mathscr{C}_N(R)$。特别地,对任意 $n\in\mathbf{Z}$,记 X 的 n 次平移为 $\boldsymbol{\Theta}^n X$,因此可得平移函子 $\boldsymbol{\Theta}:\mathscr{K}_N(R)\to\mathscr{K}_N(R)$。

在文献[5]中,对任意 N-复形 X 和 $\boldsymbol{\Sigma}X$ 有

$$(\boldsymbol{\Sigma}X)_n=X_{n-1}\oplus X_{n-2}\oplus\cdots\oplus X_{n-(N-1)},$$

$$\boldsymbol{d}_n^{\Sigma X}=\begin{pmatrix}-d & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ -d^2 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ -d^{N-3} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0\\ -d^{N-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1\\ -d^{N-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

对任意 $f\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_N(R)}(X,Y)$,定义 $(C(f))_n=Y_n\oplus(\boldsymbol{\Sigma}X)_n$,微分为

$$\boldsymbol{d}=\begin{pmatrix} d & f & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -d & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -d^{N-2} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & -d^{N-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则 $C(f)$ 是 N-复形。特别地,在 $\mathscr{C}_N(R)$ 中有行是可裂正合的交换图

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\boldsymbol{\lambda}^X"] \arrow[d, "f"'] & \bigoplus\limits_{n\in\mathbf{Z}} D^N_{n+N-1}(X_n) \arrow[r, "\boldsymbol{\eta}^X"] \arrow[d, "\boldsymbol{\varphi}"] & \Sigma X \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "\boldsymbol{g}"] & C(f) \arrow[r, "\boldsymbol{h}"] & \Sigma X \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

其中

$$\boldsymbol{\lambda}^X=\begin{pmatrix} 1 \\ d \\ \vdots \\ d^{N-1} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}^X=\begin{pmatrix} -d & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -d^2 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -d^{N-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{g}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{h}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\varphi}=\begin{pmatrix} f & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -d & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -d^{N-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}。$$

称环 R 是左凝聚的,如果环 R 的每个有限生成左理想是有限表示的。

定义 1[6] 称 R-模 M 为 FP-内射模,如果对任意有限表示模 N, $\mathrm{Ext}^1_R(N,M)=0$。

定义 2[1] 称 R-模 F 为 FI-内射模,如果对任意 FP-内射模 M, $\mathrm{Ext}^1_R(M,F)=0$。

定义 3[7] 称复形 D 是有限表示的,如果 D 是有界的且对任意 $n\in\mathbf{Z}$, D_n 是有限表示模。

定义 4[8] 称复形 C 为 FP-内射复形,如果对任意有限表示复形 D, $\mathrm{Ext}^1_R(D,C)=0$。

定义 5[2] 称复形 X 为 FI-内射复形,如果对任意 FP-内射复形 C, $\mathrm{Ext}^1_R(C,X)=0$。

定义 6[9] 称 N-复形 P 是有限表示的,如果 P 是有界的且对任意 $n\in\mathbf{Z}$, P_n 是有限表示模。

定义 7[9] 称 N-复形 G 为 FP-内射的,如果对任意有限表示 N-复形 P, $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{C}_N(R)}(P,G)=0$。

定义 8[10] 称 N-复形 X 是 N-正合的,如果对任意 t, $1\leqslant t\leqslant \mathbf{N}-1$ 和任意 $n\in\mathbf{Z}$, $H^t_n(X)=0$。

引理 1[10] 设 $M\in R$-Mod 和 $X,Y\in\mathscr{C}_N(R)$,则对任意 $n\in\mathbf{Z}$, $t\in 1,2,\cdots,\mathbf{N}$ 存在如下同构式:

(1) $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_N(R)}(D^N_n(M),Y)\cong\mathrm{Hom}_R(M,Y_n)$;

(2) $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_N(R)}(X,D^N_{n+N-1}(M))\cong\mathrm{Hom}_R(X_n,M)$;

(3) 如果 Y 是 N-正合的,则 $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{C}_N(R)}(D^t_n(M),Y)\cong\mathrm{Ext}^1_R(M,Z^t_n(Y))$;

(4) 如果 X 是 N-正合的,则 $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{C}_N(R)}(X,D^t_n(M))\cong\mathrm{Ext}^1_R(X_{n-(t-1)}/B^t_{n-(t-1)}(X),M)$。

引理 2[9] 设 C 和 D 是 N-复形,则 $H^1_n\,\mathrm{Hom}_R(C,D)\cong\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_N(R)}(C,\Theta^n D)$。特别地, $\mathrm{Hom}_R(C,D)$ 是 N-正合的当且仅当 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_N(R)}(C,\Theta^n D)=0$。即, $H^t_n\,\mathrm{Hom}_R(C,D)=0$ 等价于 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_N(R)}(C,\Theta^n D)=0$,其中 $n\in\mathbf{Z}$, $t=1,2,\cdots,\mathbf{N}$。

引理 3[9] 设 X 和 Y 是 N-复形,则以下叙述成立:

(1) $\Sigma\,\mathrm{Hom}_R(X,Y)=\mathrm{Hom}_R(X,\Sigma Y)$;

(2) $\Sigma^{-1}\mathrm{Hom}_R(X,Y)=\mathrm{Hom}_R(\Sigma^{-1}X,Y)$;

(3) $H^t_n(\Sigma X)=H^{N-t}_{n-t}(X)$;

(4) $H^t_n(\Sigma^{-1}X)=H^{N-t}_{n+N-t}(X)$。

2　主要结果

本节将研究 FI-内射 N-复形的概念,首先给出以下需要用到的定义。

定义 9　N-复形 C 的 FP-内射维数记为 FP-id(C),是指对任意有限表示 N-复形 D,满足 $\mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathscr{C}_N(R)}(D,C)=0$ 的最小正整数 n,若满足条件的 n 不存在,则规定 FP-id$(C)=\infty$。

定义 10　设 I 是 N-复形,若对任意 FP-内射 N-复形 G,$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{C}_N(R)}(G,I)=0$,则称 I 为 FI-内射 N-复形。

推论 1　若 M 为 FI-内射模,则 $D^N_n(M)$ 是 FI-内射 N-复形。

证明　设 M 是 FI-内射模,G 是 FP-内射 N-复形。由文献[9]中定理 3.8 知,G 是 N-正合的,从而由引理 1 知

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{C}_N(R)}(G,D^N_n(M))\cong \mathrm{Ext}^1_R(G_{n-(N-1)}/B^N_{n-(N-1)}(G),M)=\mathrm{Ext}^1_R(G_{n-(N-1)},M),$$

其中 $G_{n-(N-1)}$ 是 FP-内射模。而由定义 2 知,$\mathrm{Ext}^1_R(G_{n-(N-1)},M)=0$,因此由引理 1 知

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{C}_N(R)}(G,D^N_n(M))=0。$$

故 $D^N_n(M)$ 是 FI-内射 N-复形。

注记 1　(1) 所有的内射 N-复形均是 FI-内射的。

(2) 对任意 $n\in\mathbf{Z}$ 和任意 FI-内射 N-复形 I,$\Theta^n I$ 是 FI-内射 N-复形。

定理 1　设 R 为左凝聚环,I 为 N-复形,则以下陈述等价:

(1) I 为 FI-内射 N-复形;

(2) 对任意 $n\in\mathbf{Z}$,I_n 是 FI-内射模,并且对任意 FP-内射 N-复形 G,$\mathrm{Hom}_R(G,I)$ 是 N-正合的。

证明　(1)⇒(2)。设 I 是 FI-内射 N-复形,M 是 FP-内射模,则 $D^N_n(M)$ 是 FP-内射 N-复形,

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{C}_N(R)}(D^N_n(M),I)=0。$$

又因为

$$\mathrm{Ext}^1_R(M,I_n)\cong \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{C}_N(R)}(D^N_n(M),I),$$

所以 $\mathrm{Ext}^1_R(M,I_n)=0$。因此由定义 2 知,$I_n$ 是 FI-内射模。

由文献[5]中命题 2.14 知,对于 FP-内射 N-复形 G,$\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_N(R)}(G,\Theta^{-n}I)=0$ 当且仅当对任意 n 和 N-复形同态 f:$G\to\Theta^{-n}I$,序列

$$0\to\Theta^{-n}I\to C(f)\to\Sigma G\to 0$$

是可裂的。又因为 G 是 FP-内射 N-复形,所以由文献[9]中定理 4.11 知,ΣG 是 FP-内射 N-复形。由注记 1 知,$\Theta^{-n}I$ 是 FI-内射 N-复形,从而 $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{C}_N(R)}(\Sigma G,\Theta^{-n}I)=0$,因此序列

$$0\to\Theta^{-n}I\to C(f)\to\Sigma G\to 0$$

是可裂的,则 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_N(R)}(G,\Theta^{-n}I)=0$。所以由引理 2 知,$\mathrm{Hom}_R(G,I)$ 是 N-正合的。

(2)⇐(1)。假设对任意 $n\in\mathbf{Z}$,I_n 是 FI-内射模,并且对任意 FP-内射 N-复形 G,$\mathrm{Hom}_R(G,I)$ 是 N-正合的,则 $\mathrm{Hom}_R(G,\Theta^n I)$ 是 N-正合的,从而根据引理 3 可知,$\mathrm{Hom}_R(\Sigma^{-1}G,\Theta^n I)$ 是 N-正合的,因此 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_N(R)}(\Sigma^{-1}G,I)=0$。

存在 N-复形的短正合列

$$0\to I\to W\to G\to 0,$$

其中 G 是 FP-内射 N-复形。又因为每个 I_n 是 FI-内射模,所以该正合列在模层次上是可裂的。该正合列同构于序列

$$0\to I\to C(f)\to G\to 0,$$

其中 f:$\Sigma^{-1}G\to I$ 是 N-复形同态。又因为 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_N(R)}(\Sigma^{-1}G,I)=0$,所以由文献[5]中命题 2.14 知,序列

$$0\to I\to C(f)\to G\to 0$$

是可裂的。序列

$$0\to I\to W\to G\to 0$$

是可裂的,所以 I 为 FI-内射 N-复形。

命题 1 设 $f=(f_n)_{n\in\mathbf{Z}}:P\to I$ 为 P 的 FI-内射预包络,则对任意 $n\in\mathbf{Z}$,$f_n:P_n\to I_n$ 为 P_n 的 FI-内射预包络。

证明 设 E 是任意 FI-内射模,$g_{n-(N-1)}:P_{n-(N-1)}\to E$ 是任意同态,定义同态 $g=(g_i)_{n\in\mathbf{Z}}:P\to D_n^N(E)$ 为

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "0"'] & P_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "g_n"'] & P_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "g_{n-1}"'] & P_{n-2} \arrow[r] \arrow[d, "g_{n-2}"'] & \cdots \arrow[r] & P_{n-(N-1)} \arrow[r, "d_{n-(N-1)}"] \arrow[d, "g_{n-(N-1)}"'] & P_{n-N} \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & E \arrow[r, "\mathrm{id}"] & E \arrow[r, "\mathrm{id}"] & E \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

其中 $g_{n-i}=g_{n-(N-1)}d^{N-1-i}$。因为 $D_n^N(E)$ 为 FI-内射 N-复形,并且 $f=(f_n)_{n\in\mathbf{Z}}:P\to I$ 为 P 的 FI-内射预包络,所以存在 $h:I\to D_n^N(E)$,使得 $g=hf$,因此图

$$\begin{tikzcd}
P_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "g_n"'] & I_n \arrow[dl, dotted, "h_n"'] \\
E &
\end{tikzcd}$$

可交换,这说明$f_n:P_n\to I_n$ 为 P_n 的 FI-内射预包络。

命题 2 设 I 为 N-复形,则下述条件等价:

(1) I 是 FI-内射 N-复形;

(2) 对于 N-复形的任意短正合列

$$0\to I\to S\to M\to 0,$$

其中 S 为 FP-内射 N-复形,则 $S\to M$ 是 M 的 FP-内射预覆盖;

(3) I 为 FP-内射预覆盖 $f:A\to B$ 的核,其中 A 是内射 N-复形;

(4) 对于 N-复形的任意短正合列

$$0\to A\to B\to P\to 0,$$

其中 P 是 FP-内射 N-复形,则

$$0\to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_N(R)}(P,I)\to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_N(R)}(B,I)\to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_N(R)}(A,I)\to 0$$

是正合的。

证明 (1)⇒(2)。设 I 是 FI-内射 N-复形,

$$0\to I\to S\to M\to 0$$

是 N-复形的短正合列,其中 S 是内射 N-复形。由文献[9]中注记 3.6 知,S 是 FP-内射的。对任意 FP-内射 N-复形 G,$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_N(R)}(G,-)$ 作用于该短正合列,可得

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_N(R)}(G,S)\to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_N(R)}(G,M)\to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{C}_N(R)}(G,I)=0$$

是正合的,从而 $S\to M$ 是 M 的 FP-内射预覆盖。

(1)⇒(4)和(2)⇒(3)。显然成立。

(3)⇒(1)。令 I 是 FP-内射预覆盖 $f:A\to B$ 的核,其中 A 是内射 N-复形,则有正合列

$$0\to I\to A\to A/I\to 0。$$

对任意 FP-内射 N-复形 P,$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_N(R)}(P,-)$ 作用于该短正合列,可得

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_N(R)}(P,A)\to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_N(R)}(P,A/I)\to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{C}_N(R)}(P,I)\to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{C}_N(R)}(P,A)=0$$

是正合的。由条件(3)可得序列

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_N(R)}(P,A)\to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_N(R)}(P,A/I)\to 0$$

是正合的,则$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{C}_N(R)}(P,I)=0$,因此 I 是 FI-内射 N-复形。

(4)⇒(1)。令 P 为 FP-内射 N-复形,考虑 N-复形的短正合列

$$0\to A\to B\to P\to 0,$$

其中 B 是投射的,$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_N(R)}(-,I)$ 作用于该短正合列后可得正合列

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_N(R)}(B,I)\to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_N(R)}(A,I)\to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{C}_N(R)}(P,I)\to 0。$$

又因为

$$0\to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_N(R)}(P,I)\to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_N(R)}(B,I)\to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_N(R)}(A,I)\to 0$$

是正合的,所以$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{C}_N(R)}(P,I)=0$,$I$ 是 FI-内射 N-复形。

命题 3　设 R 为左凝聚环,I 为 N-复形,则下述条件等价:

(1) N-复形 I 是内射的;

(2) I 是 FI-内射 N-复形,并且 FP-id$(I)\leqslant 1$。

证明　(1)⇒(2)。显然的。

(2)⇒(1)。令 I 为 FI-内射 N-复形,并且 FP-id$(I)\leqslant 1$,则存在 N-复形的短正合列

$$0\to I\to E\to P\to 0,$$

其中 E 是内射 N-复形。又因为 R 为左凝聚环,所以 P 是 FP-内射 N-复形。因此$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{C}_N(R)}(P,I)=0$,则该序列是可裂的,从而 I 是内射 N-复形。

参考文献:

[1] MAO Lixin, DING Nanqing. FI-injective and FI-flat modules[J]. Journal of Algebra, 2007, 309(1):367-385.

[2] 唐超. FI-内射复形与 FI-平坦复形[D]. 长沙:湖南师范大学,2011.
TANG Chao. FI-injective complexes and FI-flat complexes[D]. Changsha: Hunan Normal University, 2011.

[3] 辛大伟,田雪. FI-内射复形[J]. 阜阳师范学院学报(自然科学版),2016,33(2):1-3.
XIN Dawei, TIAN Xue. FI-injective complexes[J]. Journal of Fuyang Normal University(Natural Science), 2016, 33(2):1-3.

[4] IYAMA O, KATO K, MIYACHI J. Derived categories of N-complexes[J]. Journal of the London Mathematical Society, 2017, 96(3):687-716.

[5] YANG Xiaoyan, DING Nanqing. The homotopy category and derived category of N-complexes[J]. Journal of Algebra, 2015, 426:430-476.

[6] STENSTRÖM B. Coherent rings and FP-injective modules[J]. Journal of the London Mathematical Society, 1970, 2(2):323-329.

[7] ENOCHS E E, ROZAS J R G. Flat covers of complexes[J]. Journal of Algebra, 1998, 210(1):86-102.

[8] YANG Xiaoyan, LIU Zhongkui. FP-injective complexes[J]. Communications in Algebra, 2009, 38(1):131-142.

[9] LU Bo. FP-injective objects in the category of N-complexes[J]. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 2024, 55(1):242-255.

[10] YANG Xiaoyan, GAO Tianya. Cotorsion pairs in $\mathscr{C}_N(R)$[J]. Algebra Colloquium, 2017, 24(4):577-602.

(编辑:陈丽萍)