

基于粒概念网络的概念格构造方法

吴海,牛娇娇*,铁文彦,左建坤

(长江大学计算机科学学院,湖北荆州434000)

摘要:针对如何构建形式背景的整个概念格的问题,提出一种基于粒概念的概念格构造方法。通过粒概念生成一般概念的概念学习机制,构建一个包含输入层、粒概念生成层和概念生成层的粒概念网络(granular concept network, GraCN)。对粒概念网络中的概念节点进行去重处理,并添加内涵为属性全集和外延为对象全集的概念节点,构建形式背景的概念格。数值实验证明使用粒概念网络生成概念格的可行性和有效性。

关键词:形式概念分析;概念格;概念格构造;粒概念网络;粒计算

中图分类号:TP181 **文献标志码:**A

引用格式:吴海,牛娇娇,铁文彦,等.基于粒概念网络的概念格构造方法[J].山东大学学报(理学版),2025,60(12):21-31,37.

Concept lattice construction method based on granular concept network

WU Hai, NIU Jiaojiao*, TIE Wenyan, ZUO Jiankun

(School of Computer Science, Yangtze University, Jingzhou 434000, Hubei, China)

Abstract: Aiming at the problem of how to construct the whole concept lattice of the formal context based on the granular concepts, this paper proposes a concept lattice construction method based on the granular concepts. The concept learning mechanism of generating general concepts through granular concepts is discussed, and a granular concept network (GraCN) containing an input layer, a granular concept generation layer and a concept generation layer is constructed based on this mechanism. The concept lattice of the formal context is constructed by deduplicating concept nodes in GraCN and adding the concept node whose intent is the whole attribute set and whose extent is the whole object set. Numerical experiments validate the feasibility and effectiveness of using the granular concept network to generate the concept lattice.

Key words: formal concept analysis; concept lattice; concept lattice construction; granular concept network; granular computing

0 引言

形式概念分析^[1](formal concept analysis, FCA)是一种利用形式背景进行数据分析和知识发现的有效工具。概念为知识的主要表示方式,概念格是数据的核心知识结构。概念格中每个节点代表一个由外延和内涵构成的概念,外延通常定义为概念所覆盖的实例,而内涵则描述这些实例的共同特征。形式概念分析与粗糙集^[2-4]、模糊集^[5-7]、三支决策^[8-10]和粒计算^[11-15]等理论相互结合并得到充分的发展。目前,形式概念分析在诸多领域中都有广泛的应用,如决策分析^[16]、医学诊断^[17]、冲突分析^[18-20]、异常值检测^[21]、图神经网络^[22]、认知科学^[23]和情感分析^[24]等。

在应用形式概念分析处理大规模数据的过程中,概念格的构造效率始终是一大难题,学者们对此进行广泛的研究,并从不同角度提出诸多概念格构造算法,大致可分为批处理算法和增量式算法。批处理算法利用

收稿日期:2024-05-17;网络出版时间:2025-01-16 12:34:18

基金项目:国家自然科学基金资助项目(12071131);湖北省自然科学基金资助项目(2024AFB345,2023AFB082)

第一作者:吴海(2001—),男,硕士研究生,研究方向为形式概念分析、粒计算、深度学习。E-mail:13297558122@163.com

*通信作者:牛娇娇(1992—),女,讲师,硕士生导师,博士,研究方向为概念认知、模糊集理论、粒计算和知识图谱。

E-mail:niujiaojiao@163.com

一次性处理所有数据构建完整的概念格,而增量式算法则是根据数据的增量进行概念格的构建,避免重复计算,提高了构造效率。经典概念格构造算法从最初的节点生成方式,如 CbO^[25] (close-by-one, CbO)、NextClosure^[26]、Bordat^[27]、Nourine^[28]、Lindig^[29]等算法,以及 Godin 等^[30-32]提出的增量式构造算法,Valtchev 等^[33-34]提出的集成概念格构造算法,这些算法都属于增量式概念格构造算法的范畴。因此,增量式的构建算法是目前概念格构建的主要策略。但是,这些算法没有完全解决针对大规模数据集概念格构造效率低下甚至无法构建的问题。

随着数据规模和复杂度的不断增加,概念数量往往呈指数级增长的趋势,导致概念格构造时间急剧增加。为了提高构造效率,研究者将粒计算引入形式概念分析,先后提出粒计算模型^[35]、对象/属性/关系粒化模型^[10,36]、粒规则获取模型^[37]、以及粒约简和粒概念计算模型^[37-39]。粒概念由单一对象或属性诱导生成,具有不可再分性,被视为概念的最小单元。在粒计算的框架下,概念可以分解为若干个粒概念的交或并运算,并且逐渐成为形式概念分析理论的研究热点之一^[37,40]。尽管由粒概念生成一般概念的理论已被证明,但目前尚无研究进一步讨论如何基于粒概念构造形式背景的概念格。基于此,本文旨在基于粒概念提出一种新的概念格构造算法。

1 基础知识

在形式概念分析中,形式背景 F 定义为三元组 (U, A, I) , 其中 $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 是非空有限对象集, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ 为非空有限属性集, I 是 $U \times A$ 上的二元关系。 $(x, a) \in I$ 表示对象 x 拥有属性 a , $(x, a) \notin I$ 表示对象 x 不具有属性 a 。

给定形式背景 $F = (U, A, I)$, 形式概念(简称概念)定义为由对象集 X 和属性集 B 构成的二元组 (X, B) , 满足 $f(X) = B$ 且 $g(B) = X$ 。映射 f 和 g 为概念生成算子, 定义

$$f(X) = \{a \in A \mid \forall x \in X, (x, a) \in I\}, \quad X \subseteq U,$$

$$g(B) = \{x \in U \mid \forall a \in B, (x, a) \in I\}, \quad B \subseteq A.$$

其中, X 称为概念 (X, B) 的外延, B 称为概念 (X, B) 的内涵。

显然, 概念内涵描述了外延中对象的共同特征, 而外延是内涵的具体体现。内涵和外延之间存在唯一确定关系, 总是同时存在。在粒计算的框架下可以定义概念的最小基本单元, 即粒概念, 包括对象粒概念(形如 $(g(f(x)), f(x)), x \in U$) 和属性粒概念(形如 $(g(a), f(g(a))), a \in A$)。粒概念是一种可用于生成其它概念的特殊概念, 由粒概念组成的概念集合被称为概念空间。由对象粒概念构成的概念子空间, 记为 F_G 。

性质 1^[1] 给定形式背景 $F = (U, A, I)$, 对于任意 $X, X_1, X_2 \subseteq U, B, B_1, B_2 \subseteq A$, 有以下关系成立:

- (1) $X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow f(X_2) \subseteq f(X_1); B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow g(B_2) \subseteq g(B_1);$
- (2) $X \subseteq g(f(X)); B \subseteq f(g(B));$
- (3) $f(X) = f(g(f(X))); g(B) = g(f(g(B)));$
- (4) $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cap f(X_2); g(B_1 \cup B_2) = g(B_1) \cap g(B_2).$

给定概念 (X_1, B_1) 和 (X_2, B_2) , 它们之间的偏序关系 (\leq) 和上、下确界 (\vee, \wedge) 定义如下:

$$(X_1, B_1) \leq (X_2, B_2) \Leftrightarrow X_1 \subseteq X_2 (B_2 \subseteq B_1);$$

$$(X_1, B_1) \vee (X_2, B_2) = (g(f(X_1 \cup X_2)), B_1 \cap B_2);$$

$$(X_1, B_1) \wedge (X_2, B_2) = (X_1 \cap X_2, f(g(B_1 \cup B_2))).$$

根据性质 1, 不难验证 $(g(f(X_1 \cup X_2)), B_1 \cap B_2)$ 和 $(X_1 \cap X_2, f(g(B_1 \cup B_2)))$ 均满足概念的定义。因此, 形式背景 $F = (U, A, I)$ 中所有的概念及概念间的偏序关系构成完备格, 称为形式背景的概念格, 记为 $L(U, A, I)$ 。为方便起见, 下文将集合 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 简写为 $x_1 x_2 \dots x_n$ 。

2 粒概念网络视角下的概念格构造

为了提出粒概念网络视角下的概念格构造算法, 先给出粒概念网络的定义, 再探讨由粒概念生成一般概

念的学习机制,最后阐述通过粒概念网络构建概念格的方法。

定义 1 形式背景 F 的概念神经元是 F 中负责接收、处理和传输概念信息的基本单元,可以表示为 $(X, B) = \mu\left(\sum_{i=1}^{|F_G|} w_i(X_i, B_i)\right)$, 其中, $(X_i, B_i) \in F_G$ 为概念神经元所接收的第 i 个输入, μ 为概念融合函数, 权重 $w_i = \begin{cases} 1, & \text{如果 } X_i \subseteq X, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$ w_i 表示概念节点 (X_i, B_i) 和输出概念节点 (X, B) 之间的关联性。

图 1 给出了概念神经元模型。如图 1 所示,概念神经元模型与神经元模型有着相同的结构,旨在通过概念融合函数 μ 将接收到的粒概念转化为一般概念。需要说明的是,粒概念的输入顺序不会影响概念的生成,因此对粒概念的输入顺序没有特殊要求,可自行指定。为了方便,本文使用 $w((X_i, B_i), (X_j, B_j))$ 或者 w_{ij} 表示概念 (X_i, B_i) 和概念 (X_j, B_j) 之间的权重。

定义 2 形式背景 $F = (U, A, I)$ 的粒概念网络 F_{GraCN} 是由相互连接的概念神经元组成的多层网络,包含输入层、粒概念生成层和概念生成层。输入层接收 $(x, f(x))$, $x \in U$ 作为输入,粒概念生成层通过概念生成算子得到粒概念 $(g(f(x)), f(x))$,概念生成层是一个包含多个层的网络结构,将粒概念转化为一般概念。

例 1 令形式背景 $F = (U, A, I)$, 其中 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{a, b, c, d, e\}$ 。对象 1 拥有属性 c 和 e ,对象 2 拥有属性 a, b 和 d ,对象 3 拥有属性 a, b 和 c ,对象 4 拥有属性 b 和 e ,对象 5 拥有属性 b, c 和 e ,对象 6 拥有属性 a, c 和 d 。

形式背景 F 的粒概念网络如图 2(a) 所示,其概念格如图 2(b) 所示。在图 2(a) 中,虚线后面的概念为平移概念(见定义 3),两个由直线相连的概念节点之间的权重为 1,图 2(a) 省略了权重为 0 的连线。在该粒概念网络中,输入层有 6 个样本,粒概念生成层根据概念生成算子得到 6 个粒概念,概念生成层经过两轮计算产生 8 个新概念。

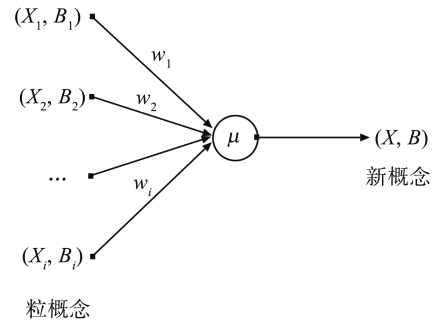
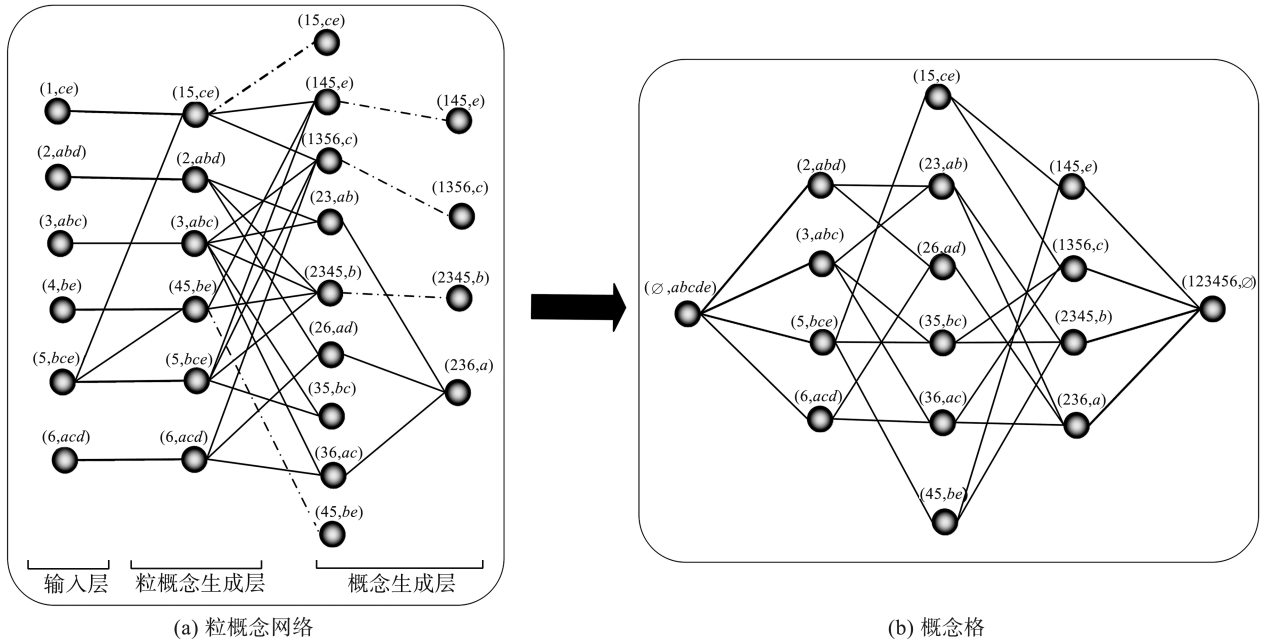


图 1 概念神经元模型
Fig.1 The concept neuron model



(a) 粒概念网络 (b) 概念格

图 2 形式背景 $F = (U, A, I)$ 的粒概念网络和概念格

Fig.2 The granular concept network and concept lattice of the formal context $F = (U, A, I)$

事实上,给定形式背景,由于其粒概念是确定的,因此形式背景的粒概念网络也是确定的。换言之,粒概念网络的层数和每一层的节点数都是固定的。显然,若已知粒概念网络中每层的节点,容易确定权重矩阵。然而,粒概念网络中除了第一层的粒概念易于获取之外,其它概念节点均未知且难以获取。因此,接下来将探讨如何从粒概念中获取一般概念,并提出可用于确定权重矩阵的概念融合规则,逐层构建粒概念网络。为

了使得粒概念网络尽可能的保留概念之间的层次结构,本文侧重考虑2个概念之间的融合,即 $\sum_{i=1}^{|F_G|} w_i = 2$ 。此外,为了避免生成过多内涵为空集的概念,规定粒概念网络中不包含内涵或者外延为空集的概念节点。同时, F_{GraCN}^k 表示粒概念网络 F_{GraCN} 网络的第 k 层,则 F_{GraCN}^1 即为粒概念网络层,得到定理1成立。

定理1 令 F_{GraCN} 为形式背景 $F=(U,A,I)$ 的粒概念网络,对于 $(X_i, B_i), (X_j, B_j) \in F_{\text{GraCN}}^k$,若 $B_i \cap B_j = \emptyset$,则 $(X_i \cup X_j, B_i \cap B_j) \notin F_{\text{GraCN}}^{k+1}$ 。

定理2 令 F_{GraCN} 为形式背景 $F=(U,A,I)$ 的粒概念网络,对于 $(X_i, B_i), (X_j, B_j) \in F_{\text{GraCN}}^k$ 满足 $B_i \cap B_j \neq \emptyset$,若对于任意 $(X_t, B_t) \in F_{\text{GraCN}}^k$ 满足 $B_i \cap B_j \subseteq B_t$,均有 $X_t \subseteq X_i \cup X_j$,则 $(X_i \cup X_j, B_i \cap B_j) \in F_{\text{GraCN}}^{k+1}$ 。

证明 $(X_i \cup X_j, B_i \cap B_j) \in F_{\text{GraCN}}^{k+1}$ 等价于 $f(X_i \cup X_j) = B_i \cap B_j$ 且 $g(B_i \cap B_j) = X_i \cup X_j$ 。

根据性质1(4),一方面,

$$f(X_i \cup X_j) = f(X_i) \cap f(X_j) = B_i \cap B_j;$$

另一方面,令 $(X_i \cup X_j)^c$ 为 $X_i \cup X_j$ 在 U 中的补集。由于 $(X_i, B_i), (X_j, B_j)$ 为概念,则对于 $x \in X_i \cup X_j, b \in B_i \cap B_j$,均有 $(x, b) \in I$,于是有 $\{x \in X_i \cup X_j \mid \forall a \in B_i \cap B_j, (x, a) \in I\} = X_i \cup X_j$ 。

令 $\{y \in (X_i \cup X_j)^c \mid \forall a \in B_i \cap B_j, (y, a) \in I\} = Y$,则有

$$\begin{aligned} g(B_i \cap B_j) &= \{x \in X \mid \forall a \in B_i \cap B_j, (x, a) \in I\} \\ &= \{x \in X_i \cup X_j \mid \forall a \in B_i \cap B_j, (x, a) \in I\} \cup \{y \in (X_i \cup X_j)^c \mid \forall a \in B_i \cap B_j, (y, a) \in I\} \\ &= X_i \cup X_j \cup Y. \end{aligned}$$

下面证明 $Y = \emptyset$ 。若 $Y \neq \emptyset$,由于粒概念网络所生成的概念内涵中元素个数随网络层数的增加呈现非增趋势,因此对于任意 $y \in Y$,存在 $(X_k, B_k) \in F_{\text{GraCN}}^k$ 使得 $y \in X_k, B_i \cap B_j \subseteq B_k$ 。根据已知条件,可得 $X_k \subseteq X_i \cup X_j$,这等价于 $y \in X_i \cup X_j$,与 $y \in (X_i \cup X_j)^c$ 矛盾,于是 $Y = \emptyset$ 。进一步地,可得 $g(B_i \cap B_j) = X_i \cup X_j$ 。

定理3 令 F_{GraCN} 为形式背景 $F=(U,A,I)$ 的粒概念网络,对于 $(X_i, B_i), (X_j, B_j) \in F_{\text{GraCN}}^k$ 满足 $B_i \cap B_j \neq \emptyset$,若存在 $(X_t, B_t) \in F_{\text{GraCN}}^k$ 使得 $B_i \cap B_j \subseteq B_t$ 且 $X_t \not\subseteq X_i \cup X_j$,则 $(g(B_i \cap B_j), B_i \cap B_j) \in F_{\text{GraCN}}^{k+1}$ 。

证明 $(g(B_i \cap B_j), B_i \cap B_j) \in F_{\text{GraCN}}^{k+1}$ 等价于证明 $f(g(B_i \cap B_j)) = B_i \cap B_j$ 。根据定理2的证明过程和性质1(4),结论显然。

根据定理1—3,得到定理4。

定理4 令 F_{GraCN} 为形式背景 $F=(U,A,I)$ 的粒概念网络,对于 $(X_i, B_i) \in F_{\text{GraCN}}^k, (X_j, B_j) \in F_{\text{GraCN}}^{k+1}$,有:

- (1) $w_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } \exists (X_j, B_j) \in F_{\text{GraCN}}^k, \text{ 使得 } (X_i, B_i), (X_j, B_j) \text{ 满足定理2和定理3,} \\ 0, & \text{如果 } \forall (X_j, B_j) \in F_{\text{GraCN}}^k, (X_i, B_i), (X_j, B_j) \text{ 满足定理1;} \end{cases}$
- (2) $(X_i, B_i) = \mu((X_i, B_i) + (X_j, B_j)) = \begin{cases} (X_i \cup X_j, B_i \cap B_j), & \text{如果 } (X_i, B_i), (X_j, B_j) \text{ 满足定理2,} \\ (g(B_i \cap B_j), B_i \cap B_j), & \text{如果 } (X_i, B_i), (X_j, B_j) \text{ 满足定理3.} \end{cases}$

定理4说明粒概念网络中的权重可以通过同一层概念之间的关系得到,其中定理4(1)表明当粒概念网络中同一层的两个概念满足定理2或者定理3时,便可以生成一个新的概念;否则,这两个概念不会生成新概念。与此同时,一个概念与由它参与生成的新概念之间的权重为1,与它未参与生成的新概念之间的权重为0。需要说明的是,输入层为由对象和其属性构成的二元组,虽然这些二元组并不满足概念的定义,但定理1—4中概念的生成规则,在由输入层生成粒概念生成层中的概念节点时同样适用。由于同一概念可通过多种途径生成,为了不生成过多重复概念,在生成新概念前应先判断该概念是否已存在于粒概念网络中。此外,为了在粒概念网络中保留概念之间的序关系,在粒概念网络中引入平移概念,定义如下。

定义3 给定粒概念网络 F_{GraCN} ,对于 $(X, B) \in F_{\text{GraCN}}^k$,如果 (X, B) 满足以下2个条件,则称 (X, B) 为平移概念:

- (1) 存在 $(Y, C) \in F_{\text{GraCN}}^k$ 使得 $Y \subseteq X$;
- (2) 不存在 $(Y, C) \in F_{\text{GraCN}}^k$ 使得 $X \subseteq Y$ 。

根据定义3知,平移概念为粒概念网络每层概念中满足定义3中给定条件的,且外延不是其他任何概念外延真子集的概念。当粒概念网络生成概念格时,只需移除粒概念网络中的重复概念,并添加外延为全集和

内涵为全集的概念。如算法 1 所示,基于粒概念网络的概念格构造算法包含 2 个过程:粒概念网络构建过程见步骤(1)—(32),概念格生成过程见步骤(33)—(43)。在粒概念网络构建过程中,步骤(1)—(3)为初始化过程,该过程构建了粒概念网络的第 1 层;步骤(4)—(32)为粒概念网络的概念生成层的构建过程,该过程经过 $N-1$ 次循环,构建了粒概念网络的第 2 至 N 层。在概念格的构建过程中,步骤(33)—(38)通过遍历粒概念网络去除重复节点;步骤(39)—(42)则分别添加内涵为属性全集的概念和外延为对象全集的概念构造完整的概念格结构。由于粒概念网络的层数是未知的,因此无法直接计算算法 1 的时间复杂度。此处对算法的运行时间进行分析。 n 表示粒概念网络的层数, F_{GraCN}^i 和 T_{GraCN}^i 分别表示第 i 层的概念节点集合和平移概念集合,则粒概念网络构建过程的最长运行时间为 $T(n) = \sum_{i=1}^n |F_{\text{GraCN}}^i|^2 + \sum_{i=1}^n |T_{\text{GraCN}}^i|$,概念格构建过程运行

时间为 $T(n) = \sum_{i=1}^n |F_{\text{GraCN}}^i| + |U|$,因此算法 1 的最长运行时间为

$$T(n) = T \left(\sum_{i=1}^n |F_{\text{GraCN}}^i| + \sum_{i=1}^n |F_{\text{GraCN}}^i|^2 + \sum_{i=1}^n |T_{\text{GraCN}}^i| + |U| \right)。$$

算法 1 基于粒概念网络的概念格构造算法

输入 形式背景 $F = (U, A, I)$ 。

输出 概念格 $L(U, A, I)$ 。

//过程 1 粒概念网络构建过程

- (1) 根据定理 1—4,构造第 1 层 F_{GraCN}^1 ; //构造粒概念生成层
- (2) 初始化 $N_{\text{GraCN}} = F_{\text{GraCN}}^1$;
- (3) 初始化 $F_{\text{GraCN}} = F_{\text{GraCN}}^1$
- (4) 初始化 $N = 1$; //粒概念网络的层数
- (5) While (N_{GraCN} 非空集) //构造概念生成层
- (6) 令 $T_{\text{GraCN}} = \emptyset$; //平移概念
- (7) 令 $N_{\text{GraCN}} = \emptyset$;
- (8) 令 $F_{\text{GraC}} = F_{\text{GraCN}}^1$;
- (9) 令 $N = N + 1$;
- (10) For $(X_i, B_i) \in F_{\text{GraC}}$
- (11) 根据定义 3 判断 (X_i, B_i) 是否为平移概念;
- (12) If (X_i, B_i) 为平移概念
- (13) $T_{\text{GraCN}} \leftarrow (X_i, B_i)$;
- (14) End If
- (15) 令 $F_{\text{GraCi}} = F_{\text{GraC}} \setminus (X_i, B_i)$;
- (16) 令 $F_{\text{GraCj}} = \{(X_j, B_j) \mid (X_j, B_j) \in F_{\text{GraC}}, B_i \cap B_j \neq \emptyset\}$;
- (17) For $(X_j, B_j) \in F_{\text{GraCj}}$
- (18) If 对于任意 $(X_k, B_k) \in F_{\text{GraCi}}$ 满足 $B_i \cap B_j \subseteq B_k$, 均有 $X_k \subseteq X_i \cup X_j$ 成立
- (19) If $(X_i \cup X_j, B_i \cap B_j) \notin F_{\text{GraCN}}^{N-1}$
- (20) $N_{\text{GraCN}} \leftarrow (X_i \cup X_j, B_i \cap B_j)$;
- (21) 令 $w((X_i, B_i), (X_i \cup X_j, B_i \cap B_j)) = 1$;
- (22) End If
- (23) Else If
- (24) $N_{\text{GraCN}} \leftarrow (g(B_i \cap B_j), B_i \cap B_j)$;
- (25) 令 $w((X_i, B_i), (g(B_i \cap B_j), B_i \cap B_j)) = 1$;
- (26) End If
- (27) End For
- (28) End For

(29) 更新 $F_{\text{GraC}} = N_{\text{GraCN}} \cup T_{\text{GraCN}}$;

(30) 令 $F_{\text{GraCN}}^N = N_{\text{GraCN}}^N$; // 粒概念网络的第 N 层

(31) 更新 $F_{\text{GraCN}} = F_{\text{GraCN}} \cup F_{\text{GraCN}}^N$

(32) End While

// 过程 2 概念格构建过程

(33) 令 $L(U, A, I) = \emptyset$;

(34) For F_{GraCN} 中的每一个概念节点 (X, B)

(35) If $(X, B) \notin L(U, A, I)$

(36) $L(U, A, I) \leftarrow (X, B)$;

(37) End If

(38) End For

(39) $L(U, A, I) \leftarrow (g(A), A)$; // 添加内涵为属性全集的概念

(40) If $(U, f(U)) \notin L(U, A, I)$

(41) $L(U, A, I) \leftarrow (U, f(U))$; // 添加外延为对象全集的概念

(42) End If

(43) Return $L(U, A, I)$

例 2(续例 1) 此处给出图 2 中粒概念网络 F_{GraCN} 的构造过程。输入层有 6 个节点:

$$N_1^0: (1, ce); N_2^0: (2, abd); N_3^0: (3, abc);$$

$$N_4^0: (4, be); N_5^0: (5, bce); N_6^0: (6, acd)。$$

(1) 第 1 层概念权重矩阵 W^1 为

$$W^1 = \begin{pmatrix} w_{11}^1 & w_{12}^1 & w_{13}^1 & w_{14}^1 & w_{15}^1 & w_{16}^1 \\ w_{21}^1 & w_{22}^1 & w_{23}^1 & w_{24}^1 & w_{25}^1 & w_{26}^1 \\ w_{31}^1 & w_{32}^1 & w_{33}^1 & w_{34}^1 & w_{35}^1 & w_{36}^1 \\ w_{41}^1 & w_{42}^1 & w_{43}^1 & w_{44}^1 & w_{45}^1 & w_{46}^1 \\ w_{51}^1 & w_{52}^1 & w_{53}^1 & w_{54}^1 & w_{55}^1 & w_{56}^1 \\ w_{61}^1 & w_{62}^1 & w_{63}^1 & w_{64}^1 & w_{65}^1 & w_{66}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}。$$

粒概念层有 6 个概念:

$$N_1^1: (15, ce); N_2^1: (2, abd); N_3^1: (3, abc);$$

$$N_4^1: (45, be); N_5^1: (5, bce); N_6^1: (6, acd)。$$

(2) 第 2 层概念权重矩阵 W^2 为

$$W^2 = \begin{pmatrix} w_{11}^2 & w_{12}^2 & w_{13}^2 & w_{14}^2 & w_{15}^2 & w_{16}^2 & w_{17}^2 & w_{18}^2 & w_{19}^2 \\ w_{21}^2 & w_{22}^2 & w_{23}^2 & w_{24}^2 & w_{25}^2 & w_{26}^2 & w_{27}^2 & w_{28}^2 & w_{28}^2 \\ w_{31}^2 & w_{32}^2 & w_{33}^2 & w_{34}^2 & w_{35}^2 & w_{36}^2 & w_{37}^2 & w_{38}^2 & w_{39}^2 \\ w_{41}^2 & w_{42}^2 & w_{43}^2 & w_{44}^2 & w_{45}^2 & w_{46}^2 & w_{47}^2 & w_{48}^2 & w_{49}^2 \\ w_{51}^2 & w_{52}^2 & w_{53}^2 & w_{54}^2 & w_{55}^2 & w_{56}^2 & w_{57}^2 & w_{58}^2 & w_{59}^2 \\ w_{61}^2 & w_{62}^2 & w_{63}^2 & w_{64}^2 & w_{65}^2 & w_{66}^2 & w_{67}^2 & w_{68}^2 & w_{69}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}。$$

第 2 层有 9 个概念:

$$N_1^2: (15, ce); N_2^2: (145, e); N_3^2: (1356, c);$$

$$N_4^2: (23, ab); N_5^2: (2345, b); N_6^2: (26, ad);$$

$$N_7^2: (35, bc); N_8^2: (36, ac); N_9^2: (45, be)。$$

(3) 第 3 层概念权重矩阵 W^3 为

$$W^3 = \begin{pmatrix} w_{11}^3 & w_{12}^3 & w_{13}^3 & w_{14}^3 \\ w_{21}^3 & w_{22}^3 & w_{23}^3 & w_{24}^3 \\ w_{31}^3 & w_{32}^3 & w_{33}^3 & w_{34}^3 \\ w_{41}^3 & w_{42}^3 & w_{43}^3 & w_{44}^3 \\ w_{51}^3 & w_{52}^3 & w_{53}^3 & w_{54}^3 \\ w_{61}^3 & w_{62}^3 & w_{63}^3 & w_{64}^3 \\ w_{71}^3 & w_{72}^3 & w_{73}^3 & w_{74}^3 \\ w_{81}^3 & w_{82}^3 & w_{83}^3 & w_{84}^3 \\ w_{91}^3 & w_{92}^3 & w_{93}^3 & w_{94}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}。$$

第 3 层有 4 个概念:

$$N_1^3:(145,e); N_2^3:(1356,c); N_3^3:(2345,b); N_4^3:(236,a)。$$

至此,第 3 层中任意 2 个概念之间的内涵交集均为空集,算法终止。

3 数值实验

通过数值实验评估 GraCN 算法的性能。选择传统的静态概念格构建算法(考虑样本的组合,记为算法 2)和基于网络结构的概念格构建算法^[41](记为算法 3)作为对比算法,对比指标有运行时间、加速比和生成概念个数。为确保实验结果的合理性,每个算法运行 5 次,并报告算法的平均运行时间。此外,为保证公平性,GraCN 算法和对比算法均在相同的计算环境中运行,实验条件为 Intel Core I9-14900KF@3.2 GHz CPU,内存为 64 GB。

3.1 数据集及实验设置

为了构建实验所需的形式背景,从加州大学欧文分校 Learning Repository 数据库和 Kaggle 数据库中选取了 10 个数据集,详细信息见表 1。由于形式背景为二元数据集,在实验前需对所选择数据集进行数据预处理,主要采用替代法、区间法和扩充法。替代法将符号数据集中的字符型属性使用不同的数值代替;区间法针对数值型属性,将每个属性的属性值划分为至多 3 个不相交的区间,并使用区间替换原始数值。经过替代法和区间法进行数据预处理后,将得到属性类型为分类型的数据集,进一步通过扩充法将属性值视为新的属性,从而得到最终的二元形式背景。需要注意的是,数据集 Zoo 仅第 13 个属性包含多个取值,在实验中直接删去该属性得到实验所需的形式背景。数据集 Mushroom 中第 15 个属性仅有一个取值,在数据预处理过程中也将其删去。此外,实验忽略数据集中的类别信息,只使用包含条件属性的部分数据。为了方便描述,将数据集 Tic-Tac-Toe Endgame 简写为 Tic,将数据集 Lung cancer 简写为 Lung。处理后的数据集的详细信息见表 1。

表 1 形式背景的统计信息
Table 1 The statistics of the chosen datasets

数据集	样本数	属性数	处理后属性个数
Ballons	20	3	3
Lenses	24	4	4
Lung cancer	32	56	56
Sobar	72	19	57
Zoo	101	16	13
Iris	150	4	12
Glass	214	11	30
Tic-Tac-Toe Endgame	958	9	27
Segment	2 627	9	9
Mushroom	8 124	21	20

3.2 子形式背景上的实验结果

为了验证算法的性能,需对比算法的运行时间和生成的概念个数。受设备内存限制,表1形式背景中产生仅包含20个对象的子形式背景(Lenses数据集除外),并使用“数据集1~10”对所生成的子形式背景命名。表2列出了GraCN算法和对比算法的运行时间和生成的概念个数。

表2 算法运行时间和生成的概念个数对比结果

Table 2 The comparison results of running time and the number of generated concepts

数据集	GraCN 算法		算法 2		算法 3	
	运行时间/s	概念个数	运行时间/s	概念个数	运行时间/s	概念个数
1	0.000 4	8	0.728 5	8	0.007 900	0
2	0.001 4	25	0.771 4	25	0.048 200	5
3	0.713 2	511	1.411 6	511	51.883 000	129
4	3.211 4	1 085	1.480 6	1 085	420.313 500	329
5	0.005 3	57	1.016 8	57	0.218 200	16
6	0.000 6	7	1.921 8	7	0.014 600	2
7	0.046 4	171	2.156 1	171	48.482 900	29
8	0.030 7	153	2.104 0	153	114.764 700	26
9	0.007 0	52	1.103 6	52	0.256 500	13
10	0.004 3	48	2.136 4	48	0.527 000	15

从表2可以看出:(1)GraCN算法和算法2均能从所选数据集中获取相同数量的概念,由于受到额外条件的限制,考虑网络信息,算法3仅能生成一部分概念;(2)在数据集1~3、5~10上,GraCN算法的构建效率均高于对比算法,仅在数据集4上的构建效率低于算法2。通过观察发现,数据集4中包含1085个概念,但样本数仅为20。这说明,对于规模较小而概念格结构较大的数据集,需要遍历样本的概念格构建算法比需要遍历所有概念的构建算法更加高效。

为了更直观地观察GraCN算法和对比算法的速率,图3展示了算法的加速比(对比算法的运行时间/GraCN的运行时间)。结果显示,GraCN算法在多个数据集上显著优于对比算法。具体而言,算法2与GraCN算法在数据集3上的加速比约为2;在数据集7~8上的加速比约为50;在数据集2、5、9、10上的加速比约为100;在数据集1、6上,算法2与GraCN算法的加速比甚至约为1000。仅在数据集4上,算法2和GraCN算法的加速比低于1,即所提出算法的效率低于算法2。当将GraCN算法和算法3进行对比时发现,算法3与GraCN算法在数据集1~3、5~6、9~10上的加速比均大于10;在数据集4和数据集10上的加速比约为100;而在数据集7、8上,算法3与GraCN算法的加速比大于1000。这些结果均表明了GraCN算法在构建概念格时的可行性和有效性。

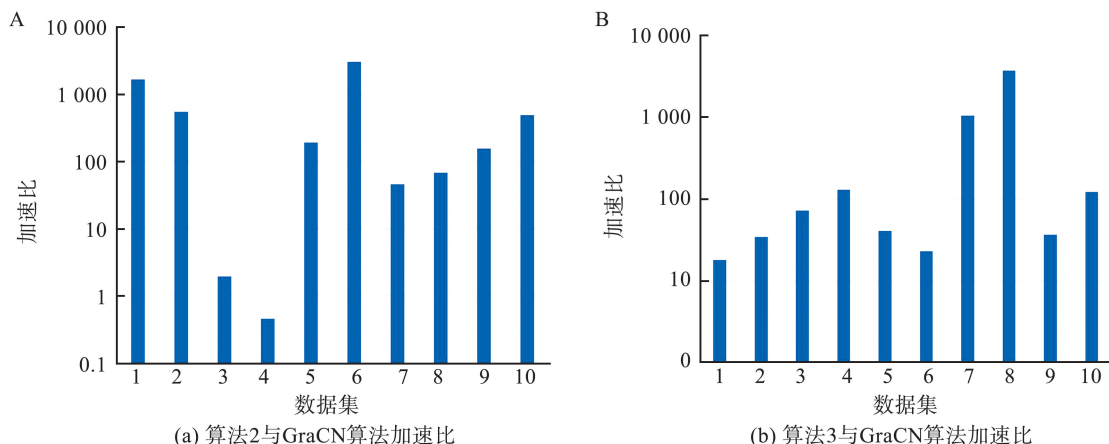


图3 各算法加速比

Fig.3 The speed-up ratio between algorithms

3.3 在形式背景上的实验结果

为了验证GraCN算法在大规模数据集上的性能,使用GraCN算法为所选数据集构建概念格。图4展

示了 GraCN 算法的运行时间和生成的概念格节点数量。如图 4 所示,规模较小的数据集构造概念格, GraCN 算法的运行时间为 1 s 内,涉及到有数据集 Ballons、Lenses、Zoo 和 Iris。然而,当数据集包含较多样本时,构造概念格所需的运行时间增加,如为数据集 Glass 构造概念格, GraCN 算法运行时间为 400 s,为数据集 Mushroom 构造概念格, GraCN 算法运行时间为 21 865 s。这说明算法的运行时间受样本数量的影响较大。此外,数据集 Sobar 包含 72 个样本和 19 个属性, GraCN 算法构建概念格的运行时间超过了 10 000 s,这是因为该数据集概念格规模较大(节点个数为 17 421),说明所提出算法的运行效率受样本数量影响的同时也受到数据集关系复杂程度的影响。

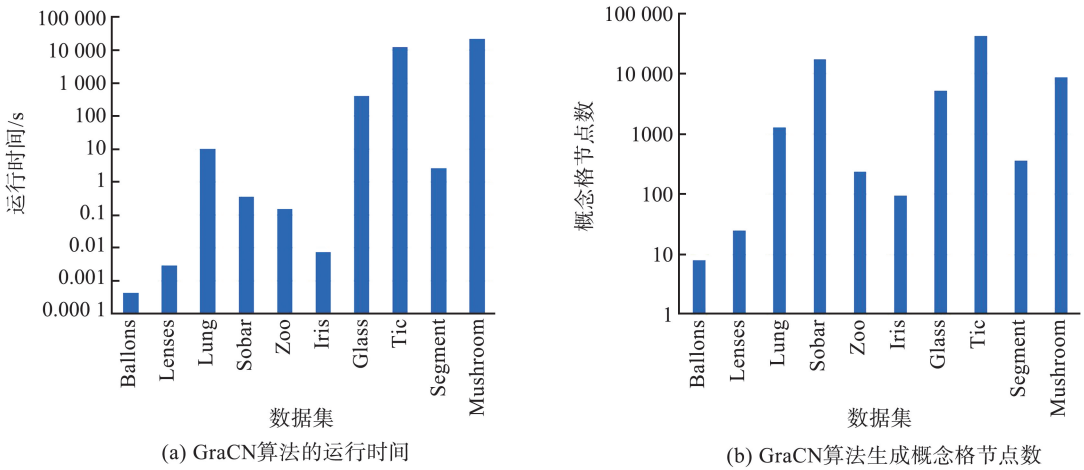
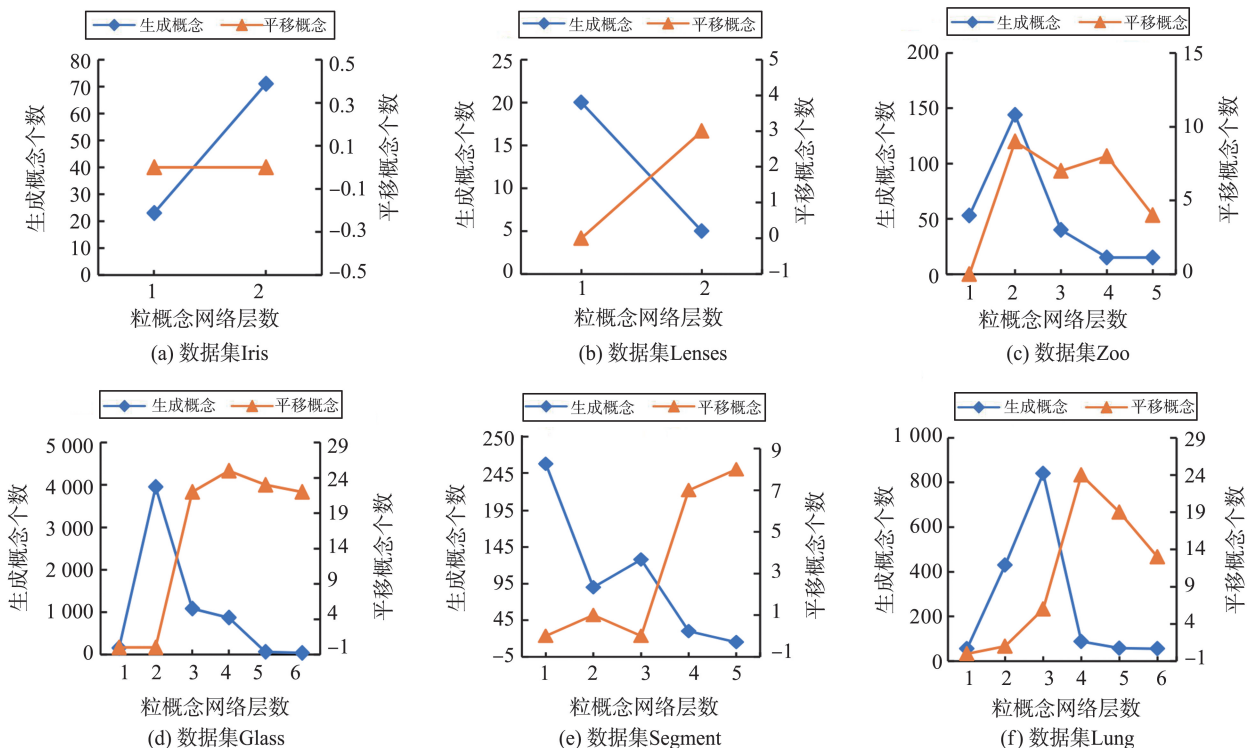


图 4 GraCN 算法在所选数据集上实验结果
Fig.4 The experimental results of GraCN on the selected datasets

除此之外,图 5 刻画了不同数据集的粒概念网络各层所包含的概念个数(左侧刻度线)和平移概念个数(右侧刻度线)。从图 5 中得出以下结论:(1) 当概念节点较多时, GraCN 算法生成的概念数量随着层数的增加不断增多,在中间某层节点数量到达最大后随着网络层数的增加不断减少;(2) GraCN 算法为所选择数据集的构造的粒概念网络最多为 9 层,这说明所提出的 GraCN 算法可以经过较少次迭代构建数据集的概念格。由于粒概念网络能够同时生成概念格中处于不同层的概念,使得所提出的算法相比于逐层生成概念的概念构造方式更加高效。



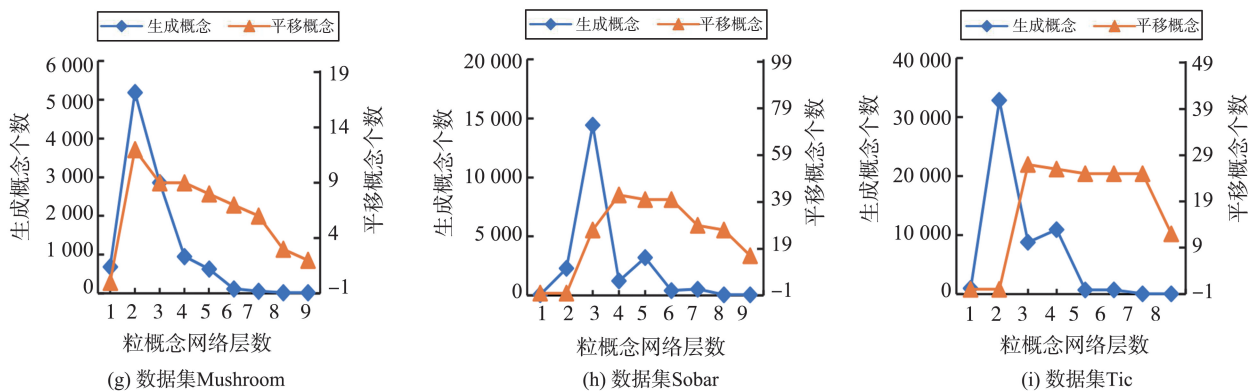


图5 GraCN 各层所生成概念个数和平移概念个数

Fig.5 The number of concepts and translational concepts generated at each layer of GraCN

4 结语

本文基于粒概念网络提出了 GraCN 算法。基于形式背景的粒概念探讨了概念生成机制,并基于该机制构建了一个包含输入层、粒概念生成层和概念生成层的粒概念网络。进一步地,通过去除粒概念网络中的重复概念节点,添加内涵为属性全集和外延为对象全集的概念节点获取了形式背景的概念格。最后,通过实验证明了所提出算法的有效性。

在生成新概念节点时,尽管可以通过设立判断机制过滤前一层已存在概念节点,但粒概念网络可能会同时生成概念格不同层次的概念,并且无法有效避免重复节点的生成。由于过多的重复概念节点会带来更多的计算,如何有效避免粒概念网络中重复概念的生成是未来的一个研究方向。此外,粒概念网络采用静态的生成策略,在面临大规模数据集时,如何提高效率,也是挑战之一,因此,提出增量的粒概念网络构造算法对提高模型的效率至关重要,也是未来所关注的重点之一。

参考文献:

- [1] WILLE R. Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concept[C]//Proceeding of the 7th International Conference on Formal Concept Analysis. Berlin: Springer, 2009:314-339.
- [2] WEI Ling, QI Jianjun. Relation between concept lattice reduction and rough set reduction[J]. Knowledge-Based Systems, 2010, 23(8):934-938.
- [3] CHEN Degang, ZHANG Wenxiu, YEUNG D, et al. Rough approximations on a complete completely distributive lattice with applications to generalized rough sets[J]. Information Sciences, 2006, 176(13):1829-1848.
- [4] LI Jinhai, REN Yue, MEI Changlin, et al. A comparative study of multigranulation rough sets and concept lattices via rule acquisition[J]. Knowledge-Based Systems, 2016, 91:152-164.
- [5] XU Weihua, GUO Doudou, QIAN Yuhua, et al. Two-way concept-cognitive learning method: a fuzzy-based progressive learning [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2023, 31(6):1885-1899.
- [6] LAI Hongliang, ZHANG Dexue. Concept lattices of fuzzy contexts: formal concept analysis vs. rough set theory [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2009, 50(5):695-707.
- [7] ZHANG Qiye, XIE Weixian, FAN Lei. Fuzzy complete lattices[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2009, 160(16):2275-2291.
- [8] WEI Ling, LIU Lin, QI Jianjun, et al. Rules acquisition of formal decision contexts based on three-way concept lattices[J]. Information Sciences, 2020, 516:529-544.
- [9] REN Ruisi, WEI Ling. The attribute reductions of three-way concept lattices[J]. Knowledge-Based Systems, 2016, 99:92-102.
- [10] QI Jianjun, WEI Ling, YAO Yiyu. Three-way formal concept analysis[C]//Rough Sets and Knowledge Technology: 9th International Conference, RSKT 2014. Shanghai: Springer, 2014:732-741.
- [11] SPOTO A, STEFANUTTI L, VIDOTTO G. Knowledge space theory, formal concept analysis, and computerized psychological assessment[J]. Behavior Research Methods, 2010, 42(1):342-350.

- [12] POELMANS J, IGNATOV D I, KUZNETSOV S O, et al. Formal concept analysis in knowledge processing: a survey on applications[J]. *Expert Systems with Applications*, 2013, 40(16):6538-6560.
- [13] XU Weihua, LI Wentao. Granular computing approach to two-way learning based on formal concept analysis in fuzzy datasets[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2014, 46(2):366-379.
- [14] LOIA V, ORCIUOLI F, PEDRYCZ W. Towards a granular computing approach based on formal concept analysis for discovering periodicities in data[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2018, 146:1-11.
- [15] LIN Tsau Young. Granular computing I: the concept of granulation and its formal model[J]. *International Journal of Granular Computing, Rough Sets and Intelligent Systems*, 2009, 1(1):21-42.
- [16] PANG Kuo, MARTÍNEZ L, LI Nan, et al. A concept lattice-based expert opinion aggregation method for multi-attribute group decision-making with linguistic information[J]. *Expert Systems with Applications*, 2024, 237:121485.
- [17] ZHAI Yanhui, WANG Tao, LI Deyu. Robust variable threshold fuzzy concept lattice with application to medical diagnosis[J]. *International Journal of Fuzzy Systems*, 2024, 26(1):344-356.
- [18] WANG Lu, PEI Zheng, QIN Keyun. A novel conflict analysis model based on the formal concept analysis[J]. *Applied Intelligence*, 2023, 53(9):10699-10714.
- [19] ZHI Huilai, LI Jinhai. Component similarity based conflict analysis: an information fusion viewpoint[J]. *Information Fusion*, 2024, 104:102157.
- [20] LANG Guangming, YAO Yiyu. Formal concept analysis perspectives on three-way conflict analysis[J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2023, 152:160-182.
- [21] HU Qian, YUAN Zhong, QIN Keyun, et al. A novel outlier detection approach based on formal concept analysis[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2023, 268:110486.
- [22] SHAO Mingwen, HU Zhiyong, WU Weizhi, et al. Graph neural networks induced by concept lattices for classification[J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2023, 154:262-276.
- [23] GUO Doudou, XU Weihua, QIAN Yuhua, et al. Fuzzy-granular concept-cognitive learning via three-way decision: performance evaluation on dynamic knowledge discovery[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2024, 32(3):1409-1423.
- [24] OJEDA-HERNÁNDEZ M, LÓPEZ-RODRÍGUEZ D, MORA Á. Lexicon-based sentiment analysis in texts using formal concept analysis[J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2023, 155:104-112.
- [25] KUZNETSOV S O. Learning of simple conceptual graphs from positive and negative examples[C]//*European Conference on Principles of Data Mining and Knowledge Discovery*. Heidelberg: Springer, 1999:384-391.
- [26] FU Huaiguo, NGUIFO E M. A parallel algorithm to generate formal concepts for large data[C]//*Concept Lattices: Second International Conference on Formal Concept Analysis, ICFCA 2004*. Sydney: Springer, 2004:394-401.
- [27] KUZNETSOV S O, OBIEDKOV S A. Comparing performance of algorithms for generating concept lattices[J]. *Journal of Experimental & Theoretical Artificial Intelligence*, 2002, 14(2/3):189-216.
- [28] NOURINE L, RAYNAUD O. A fast algorithm for building lattices[J]. *Information Processing Letters*, 1999, 71(5/6):199-204.
- [29] LINDIG C. Fast concept analysis[J]. *Working with Conceptual Structures-Contributions to ICCS*, 2000, 2000:152-161.
- [30] GODIN R, MINEAU G, MISSAOUI R. Incremental structuring of knowledge bases[C]//*Proceedings of the International Knowledge Retrieval, Use, and Storage for Efficiency Symposium*. Santa Cruz: KRUSE, 1995, 95:179-193.
- [31] GODIN R, MISSAOUI R, ALAOUI H. Incremental concept formation algorithms based on galois (concept) lattices[J]. *Computational Intelligence*, 1995, 11(2):246-267.
- [32] GODIN R, MILI H, MINEAU G W, et al. Design of class hierarchies based on concept, (galois) lattices[J]. *Theory and Practice of Object Systems*, 1998, 4(2):117-134.
- [33] VALTCHEV P, MISSAOUI R. Building concept (galois) lattices from parts: generalizing the incremental methods [C]//*International Conference on Conceptual Structures*. Heidelberg: Springer, 2001:290-303.
- [34] VALTCHEV P, MISSAOUI R, LEBRUN P. A partition-based approach towards constructing galois (concept) lattices[J]. *Discrete Mathematics*, 2002, 256(3):801-829.
- [35] MA Jianmin, ZHANG Wenxiu, LEUNG Y, et al. Granular computing and dual galois connection[J]. *Information Sciences*, 2007, 177(23):5365-5377.