

矩阵理论在一类微分方程组求解中的应用

曹海松,王晨旭,李恒燕

(华北水利水电大学数学与统计学院,河南 郑州 450045)

摘要:从矩阵视角出发,探讨矩阵理论在一类微分方程组求解中的应用,并通过具体数值算例验证有效性。

关键词:矩阵理论;对角化;Jordan 矩阵;矩阵函数;微分方程

中图分类号:O29 **文献标志码:**A

引用格式:曹海松,王晨旭,李恒燕. 矩阵理论在一类微分方程组求解中的应用[J]. 山东大学学报(理学版),2025,60(12):32-37.

Application of matrix theory in solving a class of differential equations

CAO Haisong, WANG Chenxu, LI Hengyan

(School of Mathematics and Statistics, North China University of Water Resources and Electric Power, Zhengzhou 450045, Henan, China)

Abstract: From the perspective of matrix, this paper discusses the application of matrix theory in solving a class of differential equations, and its effectiveness is verified by numerical examples.

Key words: matrix theory; diagonalization; Jordan matrix; matrix function; differential equation

0 引言

在理论方面,越来越多的复 Hilbert 空间上的(半)正定矩阵的分析以及特征量的性质不断被研究,从而带动了诸如量子信息、微积分方程、算子扰动等理论的发展。同时,在实际应用方面,它不仅应用在优化理论以及图论等数学学科,还应用在工程管理、物理学、动力系统交叉应用学科中^[1]。事实上,诸多实际问题的建模分析等同于微分方程(组)问题,而矩阵是与微分方程(组)密切相关的^[2-4],往往可以通过探讨矩阵相关的数值特征量或者性质来揭示实际问题的答案。

文献[5-11]中,专家学者们分别基于传统的微分方程求解方法和有限元理论对各种类型微分方程的求解进行了研究,特别地,李俊等^[12]讨论了可对角化矩阵在求解微分方程组中的应用,冯俊娥等^[13]基于过渡矩阵对齐次线性常微分方程组的求解进行了研究。事实上,对于一般不可对角化矩阵或者其他类型的微分方程,也是可以从矩阵视角探讨微分方程组的解,这也是本文的出发点和内容。对于如下微分方程组:

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) \end{cases} \quad (1)$$

记

收稿日期:2023-10-06; 网络出版时间:2024-12-17 11:11:27

基金项目:河南省高等学校重点科研项目计划(24B110007); 河南省研究生教育改革与质量提升工程项目(YJS2025KC03); 华北水利水电大学硕士创新能力提升工程(NCWUYC-202416088); 华北水利水电大学教改项目(2024XJGXM071); 华北水利水电大学研究生教育改革与质量提升工程项目(NCWUSZKC202304)

第一作者:曹海松(1986—),男,讲师,博士,研究方向为矩阵理论、复杂网络建模. E-mail:hscao@ncwu.edu.cn

$$\mathbf{X} = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

从而微分方程组(1)变成

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}. \quad (2)$$

下面主要讨论矩阵 \mathbf{A} 的相关性质,进而求解微分方程组(1)的解。

1 主要结论

定理 1.1 若矩阵 \mathbf{A} 可相似对角化,则微分方程组(1)的解为

$$x_i(t) = \sum_{i=1}^n K_i e^{\lambda_i t} \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad K_i (i=1, 2, \dots, n) \text{ 为任意常数}.$$

证明 设矩阵 \mathbf{A} 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 对应的 n 个特征向量为 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, 令

$$\mathbf{P} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

从而有 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}$, 即 $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}$, 令 $\mathbf{Y} = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}$, 则 $\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{P}^{-1}\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{Y}$, 即 $y_i'(t) = \lambda_i y_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, n)$, 解得 $y_i(t) = C_i e^{\lambda_i t} \quad (i=1, 2, \dots, n)$, 其中 $C_i (i=1, 2, \dots, n)$ 为任意常数。由 $\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{Y}$, 可解得 $x_i(t) = \sum_{i=1}^n K_i e^{\lambda_i t} \quad (i=1, 2, \dots, n)$, $K_i (i=1, 2, \dots, n)$ 为任意常数。

推论 1.1 特别地,若矩阵 \mathbf{A} 为正规矩阵,则微分方程组(1)的解为

$$x_i(t) = \sum_{i=1}^n R_i e^{\lambda_i t} \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad R_i (i=1, 2, \dots, n) \text{ 为任意常数}.$$

证明 矩阵 \mathbf{A} 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 对应的 n 个特征向量为 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, 将 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 通过 Gram-Schmidt 化成 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, 令

$$\mathbf{U} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n), \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

从而有 $\mathbf{U}^H \mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{A}$, 即 $\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{A} \mathbf{U}^H$, 令 $\mathbf{Y} = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))^T = \mathbf{U}^H \mathbf{X}$, 则 $\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{U}^H \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{Y}$, 即 $y_i'(t) = \lambda_i y_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, n)$, 解得 $y_i(t) = C_i e^{\lambda_i t} \quad (i=1, 2, \dots, n)$, 其中 $C_i (i=1, 2, \dots, n)$ 为任意常数。由 $\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{Y}$ 可解得 $x_i(t) = \sum_{i=1}^n R_i e^{\lambda_i t} \quad (i=1, 2, \dots, n)$, $R_i (i=1, 2, \dots, n)$ 为任意常数。

定理 1.2 对于任意不可对角化矩阵 \mathbf{A} , 关于微分方程组(1)的解, 本文给出如下的 2 种求解思路。

(1) 约尔旦化法

矩阵 \mathbf{A} 的特征多项式 $|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{k_s}$, 其中 λ_i 是 \mathbf{A} 的 k_i 重特征值, $\sum_{i=1}^s k_i = n$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ 互异。

$$\mathbf{J}_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1(\lambda_1) & & & \\ & \mathbf{J}_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{J}_s(\lambda_s) \end{pmatrix},$$

其中, $J_i(\lambda_i)$ 是主对角元素为 λ_i 的 k_i 阶 Jordan 矩阵。对于特征值 λ_i , 因其不可对角化, 故 $n_i = n - R(\lambda_i I - A) < k_i$ 。特征向量为 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n_i}$, 令 $\alpha_i = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_{n_i} \xi_{n_i}$, 选择合适的 α_i , 通过如下的 Jordan 链:

$$\begin{cases} (A - \lambda_i I) \beta_1 = \alpha_i, \\ (A - \lambda_i I) \beta_2 = \beta_1, \\ \vdots \\ (A - \lambda_i I) \beta_{k_i - n_i} = \beta_{k_i - n_i - 1}, \end{cases}$$

解得广义特征向量 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{k_i - n_i}$, 对其他特征值做同样处理, 为方便叙述, 把包含求解的广义特征向量统一记成 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, 并令 $T = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$, 从而有 $T^{-1}AT = J_A$, 即 $A = TJ_A T^{-1}$, 令 $Y = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))^T = T^{-1}X$, 则 $\dot{Y} = T^{-1}\dot{X} = J_A Y$, 把 Y 依 J_A 的结构, 相应取 k_1 列, k_2 列, \dots, k_s 列, 分块为 $Y = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_s(t))^T$, $p_i(t) \in \mathbb{C}^{1 \times k_i}$, 从而有 $\dot{p}_i(t) = J_s(\lambda_s) p_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, s$)。

为表述方便, 不妨取 $p_1(t) = J_1(\lambda_1) p_1(t)$ 为代表来分析。设

$$J_1(\lambda_1) = \begin{pmatrix} J_{11}(\lambda_1) & & & \\ & J_{12}(\lambda_1) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{1r}(\lambda_1) \end{pmatrix},$$

其中, $J_{1i}(\lambda_1)$ 是 t_i 阶 Jordan 块, $\sum_{i=1}^s t_i = k_1$, $J_{1i}(\lambda_1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_1 \end{pmatrix}_{t_i \times t_i}$, 再把 Y 依 $J_{1i}(\lambda_1)$ 的结构, 相应取

t_1 列, t_2 列, \dots, t_s 列, 分块为 $Y = (p_1^{(1)}(t), p_2^{(1)}(t), \dots, p_{t_i}^{(1)}(t))^T$, $p_i^{(1)}(t) \in \mathbb{C}^{1 \times t_i}$, 从而有 $\dot{p}_i^{(1)}(t) = J_{1i}(\lambda_1) p_i^{(1)}(t)$ ($i = 1, 2, \dots, t_i$), 可具体表示为

$$\begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) + y_2(t), \\ y_2'(t) = \lambda_1 y_2(t) + y_3(t), \\ \vdots \\ y_{t_i-1}'(t) = \lambda_1 y_{t_i-1}(t) + y_{t_i}(t), \\ y_{t_i}'(t) = \lambda_1 y_{t_i}(t), \end{cases}$$

自下而上依次可求出对应的 $y_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, t_i$), 从而可确定所有的 $y_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 由 $X = TY$, 可解得 $x_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$)。

(2) 矩阵函数法

根据矩阵函数的微分法则, 有

$$\frac{d}{dt} (e^{-At} X) = e^{-At} (-A) X + e^{-At} \dot{X} = e^{-At} (\dot{X} - AX) = \mathbf{0}_{n \times n},$$

将上式两端在 $[t_0, t]$ 上积分, 得 $e^{-At} X - e^{-At_0} X(t_0) = \mathbf{0}_{n \times n}$, 所以 $X = e^{A(t-t_0)} X(t_0)$, 其中 t_0 为初始时刻(值)。

下面通过具体的数值算例来验证结论的有效性。

2 数值算例

算例 2.1 求微分方程组 $\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = -2x_1(t) + 4x_2(t) \end{cases}$ 的解。

记 $X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, 则方程组即 $\dot{X} = AX$ 。矩阵 A 的特征多项式 $|\lambda I - A| = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$, 故特

征值 $\lambda_1=2, \lambda_2=3$, 对应特征向量 $\xi_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 令 $P=(\xi_1 \ \xi_2)$, 从而有 $P^{-1}AP=A$, 其中 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ 。

令 $Y=(y_1(t) \ y_2(t))^T=P^{-1}X$, 则 $\dot{Y}=P^{-1}\dot{X}=AY$, 即

$$\begin{cases} y_1'(t)=2y_1(t), \\ y_2'(t)=3y_2(t), \end{cases} \quad \text{可解得} \begin{cases} y_1(t)=C_1e^{2t}, \\ y_2(t)=C_2e^{3t}, \end{cases}$$

从而

$$X=PY=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1e^{2t} \\ C_2e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1e^{2t}+C_2e^{3t} \\ C_1e^{2t}+2C_2e^{3t} \end{pmatrix}。$$

算例 2.2 求微分方程组 $\begin{cases} x_1'(t)=-x_1(t)+i \cdot x_2(t), \\ x_2'(t)=-i \cdot x_1(t)-i \cdot x_3(t), \quad (i^2=-1) \text{ 的解。} \\ x_3'(t)=i \cdot x_2(t)-x_3(t), \end{cases}$

记

$$X=(x_1(t), x_2(t), x_3(t)), \quad A=\begin{pmatrix} -1 & i & 0 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & i & -1 \end{pmatrix},$$

则方程组即 $\dot{X}=AX$ 。矩阵 A 的特征多项式 $|\lambda I-A|=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+2)$, 故特征值 $\lambda_1=1, \lambda_2=-1, \lambda_3=-2$,

对应特征向量 $\xi_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -2i \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_3=\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$, 经过验证两两正交, 接下来单位化, 得

$$p_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix},$$

令 $P=(p_1, p_2, p_3)$, 从而有 $P^{-1}AP=A$, 其中 $A=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$ 。令 $Y=(y_1(t), y_2(t), y_3(t))^T=P^{-1}X$, 则 $\dot{Y}=$

$P^{-1}\dot{X}=AY$, 即

$$\begin{cases} y_1'(t)=y_1(t), \\ y_2'(t)=-y_2(t), \\ y_3'(t)=-2y_3(t), \end{cases} \quad \text{可解得} \begin{cases} y_1(t)=C_1e^t, \\ y_2(t)=C_2e^{-t}, \\ y_3(t)=C_3e^{-2t}, \end{cases}$$

从而

$$X=PY=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-2i}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1e^t \\ C_2e^{-t} \\ C_3e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}}C_1e^t - \frac{1}{\sqrt{2}}C_2e^{-t} + \frac{1}{\sqrt{3}}C_3e^{-2t} \\ \frac{-2i}{\sqrt{6}}C_1e^t + \frac{i}{\sqrt{3}}C_3e^{-2t} \\ \frac{1}{\sqrt{6}}C_1e^t + \frac{1}{\sqrt{2}}C_2e^{-t} + \frac{1}{\sqrt{3}}C_3e^{-2t} \end{pmatrix}。$$

算例 2.3 求微分方程组 $\begin{cases} x_1'(t)=2x_1(t) \\ x_2'(t)=x_1(t)+x_2(t)+x_3(t) \\ x_3'(t)=x_1(t)-x_2(t)+3x_3(t) \end{cases}$ 的解。

记

$$X=(x_1(t), x_2(t), x_3(t)), \quad A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

则方程组即 $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$, 显然矩阵 \mathbf{A} 不可对角化。

方法1 约尔旦化法

矩阵 \mathbf{A} 的特征多项式 $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = (\lambda - 2)^3$, 故特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$, 对应特征向量 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 通过

Jordan 链 $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\beta = \xi_2$, 求得广义特征向量 $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 令 $\mathbf{T} = (\xi_1, \xi_2, \beta)$, 从而有 $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{J}_A$, 其中

$$\mathbf{J}_A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

令 $\mathbf{Y} = (y_1(t), y_2(t), y_3(t))^T = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{X}$, 则 $\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{T}^{-1}\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}_A\mathbf{Y}$, 即

$$\begin{cases} y_1'(t) = 2y_1(t), \\ y_2'(t) = 2y_2(t) + y_3(t), \\ y_3'(t) = 2y_3(t), \end{cases} \text{可解得} \begin{cases} y_1(t) = C_1 e^{2t}, \\ y_2(t) = C_2 t e^{2t}, \\ y_3(t) = C_2 e^{2t}, \end{cases}$$

从而

$$\mathbf{X} = \mathbf{T}\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 e^{2t} \\ C_2 t e^{2t} \\ C_2 e^{2t} \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} C_1 + C_2 \\ C_1 + C_2 t \\ C_2 t \end{pmatrix}.$$

方法2 矩阵函数法

不妨设 $t_0 = 0$, $\mathbf{X}(0) = (K_1, K_2, K_3)^T$ 。

矩阵 \mathbf{A} 的最小多项式 $m_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2$, 进而求得矩阵函数

$$e^{At} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1-t & t \\ t & -t & 1+t \end{pmatrix},$$

从而微分方程组的解

$$\mathbf{X} = e^{At}\mathbf{X}(0) = e^{2t} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 + (K_1 - K_2 + K_3)t \\ K_3 + (K_1 - K_2 + K_3)t \end{pmatrix}.$$

3 小结

本文通过讨论矩阵相关理论, 进而求解一类微分方程组的解的问题, 一方面从矩阵视角讨论了一类微分方程组的解的问题, 另一方面也是矩阵论与微分方程的交叉融合研究, 启示学生在学习过程中的思考和学用结合。

参考文献:

- [1] 张贤达. 矩阵分析与应用[M]. 2版. 北京: 清华大学出版社, 2013:325.
ZHANG Xianda. Matrix analysis and application[M]. 2nd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2013:325.
- [2] 李尚志. 线性代数精彩应用案例(之一)[J]. 大学数学, 2006, 22(3): 1-8.
LI Shangzhi. Wonderful application cases of linear algebra(1)[J]. College Mathematics, 2006, 22(3): 1-8.
- [3] GILBERT S. Introduction to linear algebra[M]. 4th ed. Massachusetts: Wellesley-Cambridge Press, 2009:33-37.
- [4] 杨明, 刘先忠. 矩阵论[M]. 2版. 武汉: 华中科技大学出版社, 2014:40-43.
YANG Ming, LIU Xianzhong. Matrix theory[M]. 2nd ed. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press,

2014.

- [5] 廖晓花. 三元一阶线性非齐次微分方程组解法分析[J]. 兰州工业学院学报, 2021, 28(1):86-91.
LIAO Xiaohua. Solution analysis of first order linear non-homogeneous differential equations with three variables[J]. Journal of Lanzhou Institute of Technology, 2021, 28(1):86-91.
- [6] 杨景保,莫嘉琪. 一类非线性三阶微分方程边值问题解的存在唯一性[J]. 应用数学和力学, 2020, 41(2):216-222.
YANG Jingbao, MO Jiaqi. Existence and uniqueness of solutions to boundary value problems of a class of nonlinear 3rd-order differential equations[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2020, 41(2):216-222.
- [7] 周恺,高芳,朱立明. 一类特殊的二阶常系数线性非齐次微分方程的解法[J]. 赤峰学院学报(自然科学版), 2018, 34(7):167-168.
ZHOU Kai, GAO Fang, ZHU Liming. Solution of a special second-order linear non-homogeneous differential equation with constant coefficients[J]. Journal of Chifeng University (Natural Science Edition), 2018, 34(7):167-168.
- [8] 李迎娣. 二阶常系数线性非齐次微分方程的一些解法[J]. 中央民族大学学报(自然科学版), 2018, 27(1):21-23.
LI Yingdi. Some solutions to the second order constant coefficient Linear nonhomogeneous differential equation[J]. Journal of Minzu University of China (Natural Sciences Edition), 2018, 27(1):21-23.
- [9] 栾新,辛佳,宋大雷,等. 分数阶微分方程组的一种高精度数值算法[J]. 系统仿真学报, 2018, 30(2):421-426.
LUAN Xin, XIN Jia, SONG Dalei, et al. High order numerical method for system of fractional differential equations[J]. Journal of System Simulation, 2018, 30(2):421-426.
- [10] KANGUZHIN B K, NURAKHMETOV D B. Boundary value problems for 2nd order non-homogeneous differential equations with variable coefficients[J]. Journal of Xinjiang University (Natural Science Edition), 2011(1):47-56.
- [11] 胡劲松. 一阶高次齐次微分方程的求解[J]. 大学数学, 2010, 26(4):169-172.
HU Jinsong. Solving one-order homogeneous differential equation of higher degree[J]. College Mathematics, 2010, 26(4):169-172.
- [12] 李俊,周文. 可对角化矩阵的应用[J]. 数学学习与研究, 2020(5):16-17.
LI Jun, ZHOU Wen. Application of diagonalizable matrix[J]. Mathematics Learning and Research, 2020(5):16-17.
- [13] 冯俊娥,张庆乐. 齐次线性常微分方程组基于过渡矩阵的求解方法[J]. 大学数学, 2020, 36(6):55-62.
FENG June, ZHANG Qingle. A method for solving homogeneous linear ordinary differential equations based on transition matrix[J]. College Mathematics, 2020, 36(6):55-62.

(编辑:胡春燕)

(上接第 31 页)

- [36] KANG Xiangping, LI Deyu, WANG Suge, et al. Formal concept analysis based on fuzzy granularity base for different granulations [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2012, 203:33-48.
- [37] WU Weizhi, LEUNG Y, MI Jusheng. Granular computing and knowledge reduction in formal contexts[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2008, 21(10):1461-1474.
- [38] LI Jinhai, HUANG Chenchen, QI Jianjun, et al. Three-way cognitive concept learning via multi-granularity[J]. Information Sciences, 2017, 378:244-263.
- [39] LI Jinhai, MEI Changlin, XU Weihua, et al. Concept learning via granular computing: a cognitive viewpoint[J]. Information Sciences, 2015, 298:447-467.
- [40] LI J H, KUMAR C A, MEI C L, et al. Comparison of reduction in formal decision contexts[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2017, 80:100-122.
- [41] 闫梦宇,李金海,刘文奇,等. 带对象结构信息形式背景的概念知识发现与演化[J]. 电子学报, 2023, 51(1):11-17.
YAN Mengyu, LI Jinhai, LIU Wenqi, et al. Conceptual knowledge discovery and evolution in formal context with object structure information[J]. Acta Electronica Sinica, 2023, 51(1):11-17.

(编辑:陈丽萍)