

求解隐式互补问题的模系矩阵分裂迭代方法

温淑鸿¹, 柯艺芬^{2*}, 黎科良²

(1.福州大学至诚学院数据科学与统计系,福建福州350002; 2.福建师范大学数学与统计学院,福建福州350117)

摘要:提出一种新的模系矩阵分裂迭代法求解隐式互补问题,该方法不依赖于初始向量的选择,且在每一迭代步中只需求解一个线性方程组。特别地,当系统矩阵是 H_+ -矩阵时,给出算法全局收敛的充分条件。数值实验表明所提出的新方法相比于现有的方法具有更好的数值性能。

关键词:隐式互补问题;基于模系方法;收敛性

中图分类号:O241 **文献标志码:**A

引用格式:温淑鸿,柯艺芬,黎科良.求解隐式互补问题的模系矩阵分裂迭代方法[J].山东大学学报(理学版),2025,60(12):55-65.

Modulus-based matrix splitting iteration method for the implicit complementarity problem

WEN Shuhong¹, KE Yifen^{2*}, LI Keliang²

(1. Department of Data Science and Statistics, Fuzhou University Zhicheng College, Fuzhou 350002, Fujian, China; 2. School of Mathematics and Statistics, Fujian Normal University, Fuzhou 350117, Fujian, China)

Abstract: A new modulus-based matrix splitting iteration method is mainly established for a class of implicit complementarity problem in this paper. Any specificity of the initial vector is not depended on by the proposed method, and only one linear system needs to be solved at each iteration step. In particular, when the system matrix is a H_+ -matrix, the sufficient conditions for global convergence are given. Numerical experiments are presented to show the efficiency of the proposed method, which is superior to the modified modulus-based matrix splitting iteration method in terms of numerical performances.

Key words: implicit complementarity problem; modulus-based method; convergence

0 引言

互补问题在经济学和工程领域中有着广泛的应用,如:空间价格均衡、接触力学问题和断裂力学问题等^[1-3]。本文考虑如下隐式互补问题(implicit complementarity problem, ICP):寻求 $z \in \mathbf{R}^n$,使得

$$w := Az + q \in \mathbf{R}_+^n, \quad g(z) := z - \varphi(z) \in \mathbf{R}_+^n, \quad w^T g(z) = 0, \quad (1)$$

其中, $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $q \in \mathbf{R}^n$ 是一个给定的 n 维实向量, $\varphi: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是一个已知的映射。

当 $\varphi(z) = 0$ 时,隐式互补问题(1)退化为线性互补问题(linear complementarity problem, LCP)。为了更灵活实用地求解线性互补问题,Bai^[4]提出了一类基于模系矩阵分裂迭代方法,由于该方法具有结构简单,收敛速度快的优点,因此已开发出其它版本来求解线性互补问题^[5-16]。

近年来,模系矩阵分裂迭代法已被推广到求解隐式互补问题(1)的数值解。例如,Hong等在文献[17]中将模系矩阵分裂迭代法推广用于求解隐式互补问题(1),通过将隐式互补问题表述为等价不动点方程,进而

收稿日期:2024-06-15; 网络出版时间:2025-09-01 15:55:38

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11901098,12371378,62105064);福建省自然科学基金资助项目(2023J011127,2023J01955)

第一作者:温淑鸿(1982—),女,副教授,研究方向为数值代数及其应用。E-mail:wendywenshuhong@163.com

*通信作者:柯艺芬(1989—),女,副教授,博士,研究方向为数值代数及其应用。E-mail:keyifen@fjnu.edu.cn

构造有效的基于模系矩阵分裂迭代法(简记为MMS)。文献[17]的数值结果表明,对某些隐式互补问题,MMS迭代法比投影不动点迭代法以及牛顿法具有更好的性能。在此基础上,文献[18]设计了一类基于模系矩阵同步多分裂迭代方法来求解隐式互补问题(1),并给出了该方法收敛的充分条件。此外,为了解决文献[17]中对初始向量的约束问题,Zheng等^[19]提出了一种新的方法来解决隐式互补问题(1),从而提高了文献[17]中提出的MMS迭代法的收敛速度。此外,Cao等在文献[17]的基础上,建立了一种求解不动点非线性方程的两步迭代方法,该方法在数值实验中比原来的模分裂方法更有优势。关于求解隐式互补问题(1)的数值算法,可参考文献[17-28]。

基于近年来模系矩阵迭代方法的研究,本文提出一种新的求解隐式互补问题(1)的迭代方法,该方法不依赖于初始向量的选择,且在每一迭代步只需求解一个线性方程组。进一步,讨论了当系统矩阵是 H_+ 矩阵时,所提算法的收敛性。

1 新的模系矩阵分裂迭代法

下面先介绍一些文中需要用到的记号和定义。

设 $A=(a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $B=(b_{ij}) \in \mathbf{R}^{n \times n}$,如果对任意的 $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$,有 $a_{ij} \geq b_{ij}$ ($a_{ij} > b_{ij}$),记为 $A \geq B$ ($A > B$)。符号 I 和 e 分别表示适当维数的单位矩阵和元素都等于1的列向量。记 $|A|=(|a_{ij}|)$ 和 $\|A\|$ 为矩阵 $A=(a_{ij})$ 的绝对值矩阵和2-范数。符号 $\rho(A)$ 表示 A 的谱半径。记 $A=D_A-L_A-U_A=D_A-B_A$,其中 $D_A=\text{diag}(A)$ 为 A 的对角部分, $-L_A$ 、 $-U_A$ 和 B_A 分别表示 A 的严格下三角部分,上三角部分和非对角部分。

设 $A=(a_{ij})$, Z -矩阵、 M -矩阵、 H -矩阵、比较矩阵、 H_+ -矩阵、严格对角占优矩阵的定义如下:

- (1) 如果对于 $i \neq j$,有 $a_{ij} \leq 0$,则称 A 为 Z -矩阵;
- (2) 如果 A 是 Z -矩阵且 $A^{-1} \geq 0$,则称 A 为非奇异 M -矩阵;
- (3) 如果 A 的比较矩阵 $\langle A \rangle$ 是一个非奇异的 M -矩阵,其中 A 的比较矩阵 $\langle A \rangle = \langle a_{ij} \rangle$ 定义如下:

$$\langle a_{ij} \rangle = \begin{cases} |a_{ii}|, & \text{若 } i=j, \\ -|a_{ij}|, & \text{若 } i \neq j, \end{cases}$$

则称 A 为 H -矩阵;

- (4) 如果 A 是 H -矩阵且 A 的对角元素均为正数,则称 A 为 H_+ -矩阵;
- (5) 如果对于任意的 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$,有 $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$,则称 A 为严格对角占有矩阵。

设 $A=M-N$,关于分裂有如下定义:

- (a) 如果 M 是非奇异的矩阵,则称矩阵分裂 $A=M-N$ 是 A 的分裂;
- (b) 如果 M 是一个 M -矩阵且 N 是非奇异的,则称矩阵分裂 $A=M-N$ 是 M -分裂;
- (c) 如果 $\langle M \rangle - |N|$ 是 M -矩阵,则称矩阵分裂 $A=M-N$ 是 H -分裂;
- (d) 如果 $\langle A \rangle = \langle M \rangle - |N|$,则称矩阵分裂 $A=M-N$ 是 H -相容分裂。

针对隐式互补问题(1),文献[17]提出了如下模系矩阵分裂迭代方法(modified modulus-based iterative method, MMS):设 $A=M-N$ 是一个 M -分裂, Ω 是一个正对角矩阵。给定

$$z^{(0)} \in V := \{v \mid v - \varphi(v) \geq 0, Av + q \geq 0\},$$

对于迭代步 $k=0, 1, 2, \dots$,计算

$$\begin{cases} x^{(k)} = \frac{h}{2} (z^{(k)} - \Omega^{-1} w^{(k)} - \varphi(z^{(k)})), \\ (\Omega + M)x^{(k+1)} = Nx^{(k)} + (\Omega - A)|x^{(k)}| - hA\varphi(z^{(k)}) - hq, \\ z^{(k+1)} = \frac{1}{h} (|x^{(k+1)}| + x^{(k+1)}) + \varphi(z^{(k)}). \end{cases} \quad (2)$$

上述迭代过程一直循环到 $\|(Az^{(k+1)} + q)^T(z^{(k+1)} - \varphi(z^{(k+1)}))\| < \varepsilon$,其中 $0 < \varepsilon \ll 1$ 。从文献[17]给出的数值结果可以看出,在求解隐式互补问题(1)时,MMS迭代法比投影不动点迭代法以及牛顿法具有更好的性能。

下面先给出一个重要的假设条件。

假设 1 假设映射 $\varphi: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 满足:对任意的 $u, v \in \mathbf{R}^n$, 存在一个非负矩阵 $\Psi \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 使得

$$|\varphi(u) - \varphi(v)| \leq \Psi |u - v|.$$

当系统矩阵 A 是一个 H_+ -矩阵且映射 φ 满足假设 1 时, 文献[17]给出了如下理论结果。

定理 1^[17] 设 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是一个 H_+ -矩阵, 且 $A = M - N$ 是矩阵 A 的 H -相容分裂, 即 $\langle A \rangle = \langle M \rangle - |N|$ 。假设 Ω 是一个正对角矩阵, h 是一个正常数。记

$$\lambda = \rho(\Psi), \quad \Psi_1 = (\Omega + \langle M \rangle)^{-1} (|\Omega - M| + 2|N|), \quad \Psi_2 = (\Omega + \langle M \rangle)^{-1} |A|,$$

如果参数 $\lambda, \rho(\Psi_1)$ 和 $\rho(\Psi_2)$ 满足

$$\left(1 + \frac{2\rho(\Psi_2)}{1 - \rho(\Psi_1)} \right) \lambda < 1,$$

则对于任何初始向量 $z^{(0)} \in V$, 由方法(2)生成的序列 $\{z^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛到问题(1)的唯一解。

注意到对于迭代方法(2), 由于初始向量 $z^{(0)} \in V$, 对于大规模问题可能不容易找到。于是, 文献[19]提出了一种改进的基于模系矩阵分裂迭代法来求解隐式互补问题(1), 具体方法如下: 设 $A = M - N$ 是一个 M -分裂, Ω 是一个正对角矩阵。给定 $x^{(0)} \in \mathbf{R}^n$, 对于 $k=0, 1, 2, \dots$, 计算

$$\begin{cases} Az^{(k)} = \frac{1}{h} \Omega (|x^{(k)}| - x^{(k)}) - q, \\ (\Omega + M)x^{(k+1)} = Nx^{(k)} + (\Omega - A)|x^{(k)}| - hA\varphi(z^{(k)}) - hq, \end{cases} \quad (3)$$

上述迭代过程一直循环到 $\|\min\{Az^{(k)} + q, z^{(k)} - \varphi(z^{(k)})\}\| < \varepsilon$, 其中 $0 < \varepsilon \ll 1$ 。当系统矩阵 A 是一个 H_+ -矩阵, 且映射 φ 满足假设 1 时, 文献[19]得到了如下结果。

定理 2^[19] 设 Ω 是一个正对角矩阵, $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是一个 H_+ -矩阵, $A = M - N$ 是矩阵 A 的一个 H -分裂, κ_1, κ_2 由下式给出:

$$\begin{cases} \|\|D_{A\Psi^{(k)}A^{-1}}| - D_{A\Psi^{(k)}A^{-1}} + 2|B_{A\Psi^{(k)}A^{-1}}|\|_{\infty} \leq \kappa_1, \\ \|\|D_{A\Psi^{(k)}A^{-1}}| + D_{A\Psi^{(k)}A^{-1}} + 2|B_{A\Psi^{(k)}A^{-1}}|\|_{\infty} \leq \kappa_2. \end{cases}$$

且满足 $\kappa_1, \kappa_2 < 2$ 。那么, $\Omega + M$ 是一个 H -矩阵, 并且存在一个正对角矩阵 D 使得 $(\Omega + \langle M \rangle)D$ 是一个严格对角占优矩阵。进一步, 设 Ψ 由假设 1 给出, 且满足 $|D_{A\Psi A^{-1}}| < I$, 则对任意给定的 $x^{(0)} \in \mathbf{R}^n$, 方法(3)生成的 $\{z^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛于隐式互补问题的精确解 $z^* \in \mathbf{R}^n$, 当且仅当下面两种情况成立:

$$(1) (\langle A \rangle + \langle M \rangle - |N| - \kappa_1 D_A) D e > 0,$$

$$D_A D e \leq \Omega D e < \frac{1}{\kappa_1} (\langle A \rangle + \langle M \rangle - |N|) D e;$$

$$(2) [(2 - \kappa_2) D_A - |A| + \langle M \rangle - |N|] D e > 0,$$

$$\frac{1}{2 - \kappa_2} (\langle A \rangle + \langle M \rangle - |N|) D e < \Omega D e < D_A D e.$$

显然, 迭代方法(3)对初始向量 $x^{(0)}$ 没有约束, 它优于方法(2)。但是, 当系统矩阵 A 较大且密集时, 在每个迭代步骤, 它需要求解系数矩阵为 A 和 $\Omega + M$ 的两个线性方程, 即使用 LU 分解或 Krylov 子空间方法, 求解线性系统的成本仍然很高。

基于方法(2)和(3), 本文构造一种新的基于模系矩阵分裂迭代方法来求解隐式互补问题(1), 该方法基于新的等效线性不动点方程, 在每个迭代步骤只需求解一个系数为矩阵 M 的线性方程组。

设 h 为正常数, Ω 为正对角矩阵。对于任意的 $x \in \mathbf{R}^n$, 假设:

$$\begin{cases} Az + q = \frac{1}{h} \Omega (|x| - x), \\ z - \varphi(z) = \frac{1}{h} (|x| + x), \end{cases} \quad (4)$$

则有 $w = Az + q \geq 0$, $g(z) = z - \varphi(z) \geq 0$ 和 $g(z)^T w = 0$ 。通过式(4)得到关于 x 的更新方程, 即

$$\mathbf{x} = \frac{h}{2} [\mathbf{z} - \varphi(\mathbf{z}) - \mathbf{\Omega}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{q})]. \quad (5)$$

基于式(4)、(5),本文提出如下一种新的模系矩阵迭代方法来求解隐式互补问题(1),简称为NMMS算法,具体见算法1。

算法1 (求解隐式互补问题(1)的NMMS算法)

步骤1 给定 $0 < \varepsilon \ll 1$, $h > 0$, $\mathbf{z}^{(0)} \in \mathbf{R}^n$ 。设 $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$ 是矩阵 \mathbf{A} 的一个分裂, $\mathbf{\Omega}$ 是正对角矩阵。置 $k := 0$ 。

步骤2 计算 $\mathbf{x}^{(k)}$

$$\mathbf{x}^{(k)} = \frac{h}{2} [\mathbf{z}^{(k)} - \varphi(\mathbf{z}^{(k)}) - \mathbf{\Omega}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{z}^{(k)} + \mathbf{q})]. \quad (6)$$

步骤3 通过求解下列线性方程来计算 $\mathbf{z}^{(k+1)}$:

$$\mathbf{M}\mathbf{z}^{(k+1)} = \mathbf{N}\mathbf{z}^{(k)} + \frac{1}{h}\mathbf{\Omega}(|\mathbf{x}^{(k)}| - \mathbf{x}^{(k)}) - \mathbf{q}. \quad (7)$$

步骤4 如果 $\|\min\{\mathbf{A}\mathbf{z}^{(k+1)} + \mathbf{q}, \mathbf{z}^{(k+1)} - \varphi(\mathbf{z}^{(k+1)})\}\| < \varepsilon$, 停止; 否则, 置 $k := k+1$, 返回步骤2。

算法1提供了求解隐式互补问题(1)的一般框架,其可以推导出一系列新的迭代方法,例如:令

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\alpha}(\mathbf{D}_A - \beta\mathbf{L}_A), \quad \mathbf{N} = \frac{1}{\alpha}[(1-\alpha)\mathbf{D}_A + (\alpha-\beta)\mathbf{L}_A + \alpha\mathbf{U}_A].$$

(1) 当 $\alpha = 1, \beta = 0$ 时,称算法1为新的模系Jacobi迭代方法,记作New-MJ;

(2) 当 $\alpha = \beta = 1$ 时,称算法1为新的模系Gauss-Seidel迭代方法,记作New-MGS;

(3) 当 $\alpha = \beta$ 时,称算法1为新的模系SOR迭代方法,记作New-MSOR。

2 收敛性分析

本章研究算法1收敛的充分性条件。

设向量对 $(\mathbf{z}^*, \mathbf{x}^*)$ 是非线性方程(4)的精确解,即

$$\begin{cases} \mathbf{x}^* = \frac{h}{2} [\mathbf{z}^* - \varphi(\mathbf{z}^*) - \mathbf{\Omega}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{z}^* + \mathbf{q})], \\ \mathbf{M}\mathbf{z}^* = \mathbf{N}\mathbf{z}^* + \frac{1}{h}\mathbf{\Omega}(|\mathbf{x}^*| - \mathbf{x}^*) - \mathbf{q}. \end{cases} \quad (8)$$

将式(4)减去式(8),可得

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^* = \frac{h}{2} [\mathbf{z}^{(k)} - \varphi(\mathbf{z}^{(k)}) - \mathbf{z}^* + \varphi(\mathbf{z}^*) - \mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{z}^{(k)} - \mathbf{z}^*)], \\ \mathbf{M}(\mathbf{z}^{(k+1)} - \mathbf{z}^*) = \mathbf{N}(\mathbf{z}^{(k)} - \mathbf{z}^*) + \frac{1}{h}\mathbf{\Omega}(|\mathbf{x}^{(k)}| - \mathbf{x}^{(k)} - |\mathbf{x}^*| + \mathbf{x}^*). \end{cases} \quad (9)$$

基于式(9),本文建立如下关于算法1的收敛性定理。

定理3 设 $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$ 是矩阵 \mathbf{A} 的一个分裂, $\mathbf{\Omega} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是一个正对角矩阵,映射 φ 满足假设1,其中 $\mathbf{\Psi}$ 是一个非负矩阵,记

$$\mathbf{L} = |\mathbf{M}^{-1}| \cdot (|\mathbf{N}| + |\mathbf{\Omega} - \mathbf{A}| + \mathbf{\Omega}\mathbf{\Psi}).$$

如果 $\rho(\mathbf{L}) < 1$, 则对任意 $\mathbf{z}^{(0)} \in \mathbf{R}^n$, 由算法1产生的序列 $\{\mathbf{z}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛于隐式互补问题(1)的解。

证明 由式(9),可得

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*| &= \frac{h}{2} |(\mathbf{I} - \mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{A})(\mathbf{z}^{(k)} - \mathbf{z}^*) - (\varphi(\mathbf{z}^{(k)}) - \varphi(\mathbf{z}^*))| \\ &\leq \frac{h}{2} [|\mathbf{I} - \mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{z}^{(k)} - \mathbf{z}^*| + \mathbf{\Psi}|\mathbf{z}^{(k)} - \mathbf{z}^*|] \\ &= \frac{h}{2} (|\mathbf{I} - \mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{A}| + \mathbf{\Psi}) \cdot |\mathbf{z}^{(k)} - \mathbf{z}^*|. \end{aligned} \quad (10)$$

对任意的 $u, v \in \mathbf{R}^n$, 有 $\| |u| - |v| \| \leq \| u - v \|$, 根据式(9), 有

$$\begin{aligned} \| z^{(k+1)} - z^* \| &= \left\| M^{-1} \left[N(z^{(k)} - z^*) + \frac{1}{h} \Omega(|x^{(k)}| - |x^{(k)} - |x^*| + x^*) \right] \right\| \\ &\leq \| M^{-1} \| \cdot \left(\| N \| \| z^{(k)} - z^* \| + \frac{2}{h} \Omega \cdot |x^{(k)} - x^*| \right) \\ &\leq \| M^{-1} \| \cdot [\| N \| + \Omega (\| I - \Omega^{-1} A \| + \Psi)] \cdot \| z^{(k)} - z^* \| \\ &= \| M^{-1} \| \cdot (\| N \| + \| \Omega - A \| + \Omega \Psi) \cdot \| z^{(k)} - z^* \| := L \| z^{(k)} - z^* \|. \end{aligned}$$

因此, 如果 $\rho(L) < 1$, 得出 $\| z^{(k+1)} - z^* \| < \| z^{(k)} - z^* \|$, 从而有 $\lim_{k \rightarrow +\infty} \| z^{(k)} - z^* \| = 0$. 证毕。

下面先给出一些证明所需的引理。

引理 1^[29] 设 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是一个 H -矩阵, 那么 $|A^{-1}| \leq \langle A \rangle^{-1}$ 。

引理 2^[30] 设 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是一个非负矩阵, 如果存在两个非负常数 $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ 和一个正向量 $v \in \mathbf{R}^n$ 有 $\alpha v \leq Av \leq \beta v$, 则 $\alpha \leq \rho(A) \leq \beta$ 。特别地, 如果 $\alpha v < Av < \beta v$, 则 $\alpha < \rho(A) < \beta$ 。

接下来讨论当系数矩阵 A 是一个 H_+ -矩阵时, 算法 1 的收敛性。

定理 4 设 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是一个 H_+ -矩阵, $A = M - N$ 是矩阵 A 的 H -相容分裂, $\Omega = \text{diag}(\omega_{11}, \omega_{22}, \dots, \omega_{nn}) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是一个正对角矩阵, 并且有

$$(I - \Psi)e > 0, \quad 2|B_A|e < D_A(I - \Psi)e。$$

以及

$$\frac{2[|B_A|e]_i}{[(I - \Psi)e]_i} < \omega_{ii} < \frac{2[\langle A \rangle e]_i}{[(I + \Psi)e]_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

那么对任意的初始向量 $z^{(0)} \in \mathbf{R}^n$, 由算法 1 产生的序列 $\{z^{(k)}\}_{k=0}^{+\infty} \subseteq \mathbf{R}^n$ 收敛于隐式互补问题(1)的一个解。

证明 因为 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是一个 H_+ -矩阵, $A = M - N$ 是矩阵 A 的 H -相容分裂, 故有 $\langle A \rangle = \langle M \rangle - |N|$ 是一个 M -矩阵。因此, M 是一个 H -矩阵。由引理 1 可得 $|M^{-1}| \leq \langle M \rangle^{-1}$ 。注意到

$$\begin{aligned} L &= \| M^{-1} \| \cdot (\| N \| + \| \Omega - A \| + \Omega \Psi) \\ &\leq \langle M \rangle^{-1} \cdot (\| N \| + \| \Omega - A \| + \Omega \Psi) \\ &= \langle M \rangle^{-1} \cdot (\langle M \rangle - \langle A \rangle + \| \Omega - A \| + \Omega \Psi) \\ &= I - \langle M \rangle^{-1} \cdot (\langle A \rangle - \| \Omega - A \| - \Omega \Psi) \\ &:= I - \langle M \rangle^{-1} J, \end{aligned} \tag{11}$$

其中 $J = \langle A \rangle - \| \Omega - A \| - \Omega \Psi$ 。如果 $Je > 0$, 意味着

$$Le \leq e - \langle M \rangle^{-1} Je < e。$$

从而根据引理 2, 可以得出 $\rho(L) < 1$ 。

下面考虑条件 $Je > 0$ 。假设 $A = D_A - L_A - U_A = D_A - B_A$, $\Omega = \text{diag}(\omega_{11}, \omega_{22}, \dots, \omega_{nn})$, $\Psi = (\Psi_{ij})$, 有

$$(Je)_i = a_{ii} - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| - |\omega_{ii} - a_{ii}| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| - \omega_{ii} \left(\sum_{j=1}^n \Psi_{ij} \right)。$$

情形 1 当 $\omega_{ii} \geq a_{ii}$ 时, 有

$$(Je)_i = 2 \left(a_{ii} - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right) - \omega_{ii} \left(1 + \sum_{j=1}^n \Psi_{ij} \right) > 0,$$

可以得出

$$a_{ii} \leq \omega_{ii} < \frac{2 \left(a_{ii} - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right)}{1 + \sum_{j=1}^n \Psi_{ij}} \tag{12}$$

和

$$a_{ii} < \frac{2 \left(a_{ii} - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right)}{1 + \sum_{j=1}^n \Psi_{ij}} \tag{13}$$

式(13)成立当且仅当如下条件成立:

$$2 \sum_{j \neq i} |a_{ij}| < a_{ii} \left(1 - \sum_{j=1}^n \Psi_{ij}\right), \quad 1 - \sum_{j=1}^n \Psi_{ij} > 0. \quad (14)$$

情形 2 当 $\omega_{ii} < a_{ii}$ 时, 有

$$(\mathbf{J}\mathbf{e})_i = -2 \sum_{j \neq i} |a_{ij}| + \omega_{ii} \left(1 - \sum_{j=1}^n \Psi_{ij}\right) > 0,$$

可以得出

$$1 - \sum_{j=1}^n \Psi_{ij} > 0, \quad \omega_{ii} > \frac{2 \sum_{j \neq i} |a_{ij}|}{1 - \sum_{j=1}^n \Psi_{ij}} \quad (15)$$

和

$$\frac{2 \sum_{j \neq i} |a_{ij}|}{1 - \sum_{j=1}^n \Psi_{ij}} < a_{ii}. \quad (16)$$

根据式(12)、式(14)、式(15)和式(16), 如果条件

$$1 - \sum_{j=1}^n \Psi_{ij} > 0, \quad 2 \sum_{j \neq i} |a_{ij}| < a_{ii} \left(1 - \sum_{j=1}^n \Psi_{ij}\right),$$

$$\frac{2 \sum_{j \neq i} |a_{ij}|}{1 - \sum_{j=1}^n \Psi_{ij}} < \omega_{ii} < \frac{2(a_{ii} - \sum_{j \neq i} |a_{ij}|)}{1 + \sum_{j=1}^n \Psi_{ij}},$$

成立, 则可以得到 $\rho(\mathbf{L}) < 1$ 。证毕。

值得注意的是, 当系统矩阵 \mathbf{A} 是 \mathbf{H}_+ -矩阵时, 定理 1、定理 2 以及定理 4 分别为迭代格式(2)、迭代格式(3)以及算法 1 提供了收敛的充分条件。然而, 定理 4 的条件较容易验证。

3 数值实验

本章将给出一些数值例子来验证算法 1 的有效性。主要是将本文提出的算法(New-MJ、New-MGS、New-MSOR)与修正的 MMS 算法(3)(MJ、MGS、MSOR)从以下三方面进行对比: 迭代步数(IT)、迭代时间(CPU)和残差向量范数(RES)。所有的计算都是在 Intel(R) Core(TM) 上运行的, 其中 CPU 为 2.30 GHz, 内存为 16.00 GB, 编程软件为 MATLAB。当迭代次数大于 1 000 或残余向量满足 $\text{RES}(k) \leq 10^{-6}$, 测试方法停止。本章数值实验定义残差向量范数如下:

$$\text{RES}(k) := \|\min\{\mathbf{z}^{(k)} - \varphi(\mathbf{z}^{(k)}), \mathbf{A}\mathbf{z}^{(k)} + \mathbf{q}\}\|.$$

在下面的数值实验中, 选择正对角矩阵 $\mathbf{\Omega}$ 为 $\mathbf{\Omega} = \omega \mathbf{D}_A$ ($\omega > 0$), 其中 \mathbf{D}_A 是矩阵 \mathbf{A} 的正对角部分, 实验中取初始向量为零和 $h = 1$ 。

例 1 设 m 为给定的正整数且 $n = m^2$ 。考虑隐式互补问题(1),

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{S} & -0.5\mathbf{I}_m & & & \\ -1.5\mathbf{I}_m & \mathbf{S} & -0.5\mathbf{I}_m & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1.5\mathbf{I}_m & \mathbf{S} & -0.5\mathbf{I}_m \\ & & & -1.5\mathbf{I}_m & \mathbf{S} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \vdots \\ (-1)^{n-1} \\ (-1)^n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n,$$

其中 $\mathbf{S} = \text{tridiag}(-1.5, 4 + \mu, -0.5) \in \mathbf{R}^{s \times s}$ ($\mu \geq 0$)。随着不同的 n 和 $\varphi(\mathbf{z})$, 本实验所有算法都收敛。映射 $\varphi: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 设为以下几种情况: (1) $\varphi(\mathbf{z}) = 0.7|\mathbf{z}|$; (2) $\varphi(\mathbf{z}) = 0.9|\mathbf{z}|$; (3) $\varphi(\mathbf{z}) = 0.7 \sin(\mathbf{z})$; (4) $\varphi(\mathbf{z}) = 0.9 \sin(\mathbf{z})$ 。具体数值结果见表 1—4。

表 1 例 1 的数值结果($\mu=4, \varphi(z)=0.7|z|$)
Table 1 Numerical results of Example 1 with $\mu=4$ and $\varphi(z)=0.7|z|$

Ω	方法	$m=60$		$m=100$		$m=140$		$m=180$	
		IT	CPU	IT	CPU	IT	CPU	IT	CPU
D_A	MJ	41	0.450 9	42	1.716 4	43	3.203 3	44	6.251 5
	MGS	37	0.450 2	39	1.373 4	40	3.241 0	40	5.222 2
	New-MJ	10	0.001 6	11	0.006 4	11	0.012 3	11	0.020 3
	New-MGS	31	0.006 3	32	0.021 1	32	0.038 5	33	0.066 9
$2D_A$	MJ	30	0.362 0	31	1.067 9	32	3.213 5	33	5.515 2
	MGS	28	0.470 5	29	0.978 8	30	2.193 0	30	4.262 4
	New-MJ	10	0.002 0	11	0.006 0	11	0.014 3	11	0.030 4
	New-MGS	13	0.004 1	14	0.010 0	14	0.020 0	14	0.034 8
$3D_A$	MJ	28	0.348 4	29	0.993 1	30	2.266 2	30	3.963 0
	MGS	25	0.340 3	26	0.896 8	27	2.136 9	27	3.342 6
	New-MJ	10	0.001 9	11	0.006 3	11	0.014 6	11	0.019 1
	New-MGS	19	0.004 4	19	0.012 4	20	0.024 5	20	0.043 9

表 2 例 1 的数值结果($\mu=4, \varphi(z)=0.9|z|$)
Table 2 Numerical results of Example 1 with $\mu=4$ and $\varphi(z)=0.9|z|$

Ω	方法	$m=60$		$m=100$		$m=140$		$m=180$	
		IT	CPU	IT	CPU	IT	CPU	IT	CPU
D_A	MJ	123	0.768 5	128	2.527 4	131	6.001 4	133	11.838 3
	MGS	115	0.726 3	119	2.374 5	122	5.604 8	124	10.765 1
	New-MJ	10	0.000 8	11	0.002 6	11	0.005 0	11	0.010 1
	New-MGS	92	0.008 7	96	0.027 9	99	0.058 0	101	0.101 8
$2D_A$	MJ	95	0.598 7	98	1.110 0	32	1.955 0	103	9.080 9
	MGS	90	0.567 8	94	1.041 1	30	1.898 8	98	8.451 1
	New-MJ	10	0.000 9	11	0.006 0	11	0.002 7	11	0.008 8
	New-MGS	46	0.004 9	48	0.028 0	49	0.013 9	50	0.051 4
$3D_A$	MJ	85	0.535 8	88	1.777 8	90	4.227 1	92	8.089 5
	MGS	82	0.515 6	85	1.709 3	87	4.046 6	88	7.559 9
	New-MJ	10	0.000 9	11	0.002 4	11	0.005 3	11	0.009 1
	New-MGS	30	0.003 7	31	0.009 3	32	0.017 1	32	0.031 2

表 3 例 1 的数值结果($\mu=4, \varphi(z)=0.7 \sin(z)$)
Table 3 Numerical results of Example 1 with $\mu=4$ and $\varphi(z)=0.7 \sin(z)$

Ω	方法	$m=60$		$m=100$		$m=140$		$m=180$	
		IT	CPU	IT	CPU	IT	CPU	IT	CPU
D_A	MJ	40	0.258 2	41	0.827 2	42	1.927 3	43	3.550 8
	MGS	37	0.245 1	38	0.767 4	39	1.771 0	39	3.196 7
	New-MJ	10	0.001 1	11	0.002 7	11	0.005 2	11	0.010 1
	New-MGS	31	0.004 1	32	0.010 5	32	0.017 8	33	0.032 9
$2D_A$	MJ	27	0.171 1	28	0.557 1	28	1.305 6	29	2.377 0
	MGS	25	0.160 2	26	0.517 2	26	1.205 6	27	2.184 9
	New-MJ	10	0.001 0	11	0.002 8	11	0.004 8	11	0.009 0
	New-MGS	13	0.002 4	14	0.005 5	14	0.008 8	14	0.015 1
$3D_A$	MJ	29	0.195 8	30	0.589 8	31	1.428 2	31	2.522 8
	MGS	27	0.179 0	28	0.561 7	29	1.363 6	29	2.365 3
	New-MJ	10	0.001 0	11	0.002 8	11	0.005 0	11	0.008 6
	New-MGS	8	0.002 0	8	0.005 5	8	0.005 7	8	0.009 9

表4 例1的数值结果($\mu=4, \varphi(z)=0.9 \sin(z)$)
Table 4 Numerical results of Example 1 with $\mu=4$ and $\varphi(z)=0.9 \sin(z)$

Ω	方法	$m=60$		$m=100$		$m=140$		$m=180$	
		IT	CPU	IT	CPU	IT	CPU	IT	CPU
D_A	MJ	122	0.782 5	127	2.530 5	130	6.207 9	133	12.158 0
	MGS	113	0.725 8	117	2.377 3	120	5.650 5	122	10.651 6
	New-MJ	10	0.001 0	11	0.002 9	11	0.005 0	11	0.009 9
	New-MGS	92	0.010 1	96	0.029 7	99	0.058 9	101	0.111 5
$2D_A$	MJ	90	0.547 2	94	1.857 7	96	4.266 4	98	8.569 6
	MGS	85	0.529 7	89	1.765 7	91	4.029 7	93	7.813 5
	New-MJ	10	0.000 9	11	0.002 7	11	0.005 4	11	0.010 2
	New-MGS	46	0.005 4	48	0.013 9	49	0.026 2	50	0.053 2
$3D_A$	MJ	79	0.502 3	82	1.702 9	84	3.912 8	86	7.587 1
	MGS	76	0.500 1	79	1.713 3	81	3.720 2	82	6.971 0
	New-MJ	10	0.000 9	11	0.003 3	11	0.005 4	11	0.008 7
	New-MGS	30	0.004 2	31	0.010 7	32	0.018 9	32	0.034 9

例2 设 m 为给定的正整数且 $n=m^2$ 。考虑隐式互补问题(1), 其中

$$A = \begin{pmatrix} S & -I_s & -I_s & & & \\ & S & -I_s & -I_s & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & S & -I_s & \\ & & & & S & \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n \times n}, \quad q = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \vdots \\ (-1)^{n-1} \\ (-1)^n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n,$$

其中 $S = \text{tridiag}(-1.5, 4+\mu, -0.5) \in \mathbf{R}^{s \times s}$ ($\mu \geq 0$)。随着不同的 n 和 $\varphi(z)$, 本实验所有算法都收敛。映射 $\varphi: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 设为以下几种情况: (1) $\varphi(z) = 0.4 \cos(z) + 0.4|z|$; (2) $\varphi(z) = 0.4 \cos(z) - 0.4|z|$ 。具体数值结果见表5、表6。

表5 例2的数值结果($\varphi(z) = 0.4 \cos(z) + 0.4|z|$)
Table 5 Numerical results of Example 2 with $\varphi(z) = 0.4 \cos(z) + 0.4|z|$

Ω	方法	α	$m=60$		$m=100$		$m=140$		$m=180$	
			IT	CPU	IT	CPU	IT	CPU	IT	CPU
D_A	MSOR	1.20	49	0.015 3	68	0.042 2	77	0.086 8	81	0.207 8
	New-SOR	1.15	48	0.007 5	53	0.016 8	55	0.029 9	56	0.046 8
$2D_A$	MSOR	5.00	62	0.018 1	83	0.055 0	91	0.120 2	95	0.272 9
	New-SOR	1.05	50	0.007 8	57	0.017 5	59	0.029 8	60	0.049 0
$3D_A$	MSOR	5.00	94	0.025 4	122	0.075 9	131	0.173 0	136	0.372 5
	New-SOR	0.70	80	0.011 2	89	0.023 3	92	0.046 7	94	0.076 8

表6 例2的数值结果($\varphi(z) = 0.4 \cos(z) - 0.4|z|$)
Table 6 Numerical results of Example 2 with $\varphi(z) = 0.4 \cos(z) - 0.4|z|$

Ω	方法	α	$m=60$		$m=100$		$m=140$		$m=180$	
			IT	CPU	IT	CPU	IT	CPU	IT	CPU
D_A	MSOR	1.15	52	0.013 8	71	0.046 6	80	0.116 7	84	0.225 3
	New-SOR	1.10	49	0.007 6	54	0.017 3	56	0.031 1	58	0.046 7
$2D_A$	MSOR	0.70	105	0.024 6	139	0.087 9	152	0.233 9	160	0.406 2
	New-SOR	0.60	96	0.012 6	106	0.026 8	110	0.055 2	112	0.093 1
$3D_A$	MSOR	0.50	155	0.035 9	206	0.132 4	225	0.360 9	237	0.586 6
	New-SOR	0.40	149	0.017 1	163	0.045 5	169	0.084 7	173	0.141 8

表1—6给出了例1和例3的数值结果。从这些数值结果中, 可以观察到以下事实。

(1) 随着维数 n 和映射 $\varphi(z)$ 的改变, 所有测试方法都能快速计算出隐式互补问题(1)的近似解。数值

实验表明,与修正的 MMS 算法(3)相比,新的矩阵分裂迭代方法具有更好的数值性能,且计算时间更短。

(2) 在例 2 中,随着维数 n 的增加,所有测试方法的迭代次数也都随之增加。然而,经过实验对比,本文提出的算法在收敛速度上相比修正的算法(3)要快,收敛时间更短。

(3) 图 1 给出了例 2 中迭代次数 IT 和参数 α 之间的关系。图 2 给出了当 $m=180$ 时,例 2 中 MSOR 方法和 New-MSOR 方法的迭代次数和 RES 之间的关系。从这些图中可以看出,New-MSOR 方法产生的误差 $\{RES(k)\}$ 是单调递减的,并且下降速度要比 MSOR 方法快。

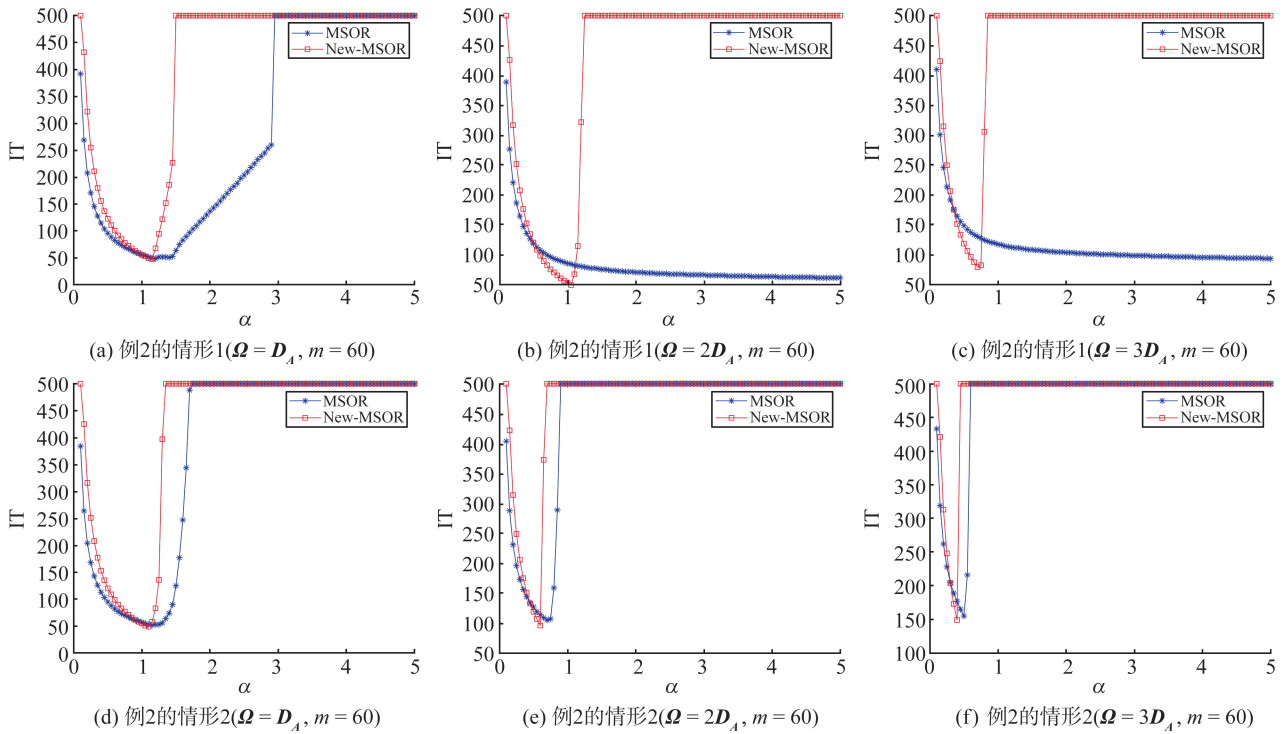


图 1 例 2 中 SOR 方法中参数 α 与迭代次数 IT 的关系
Fig.1 Relationship plot between IT and the parameter α for Example 2

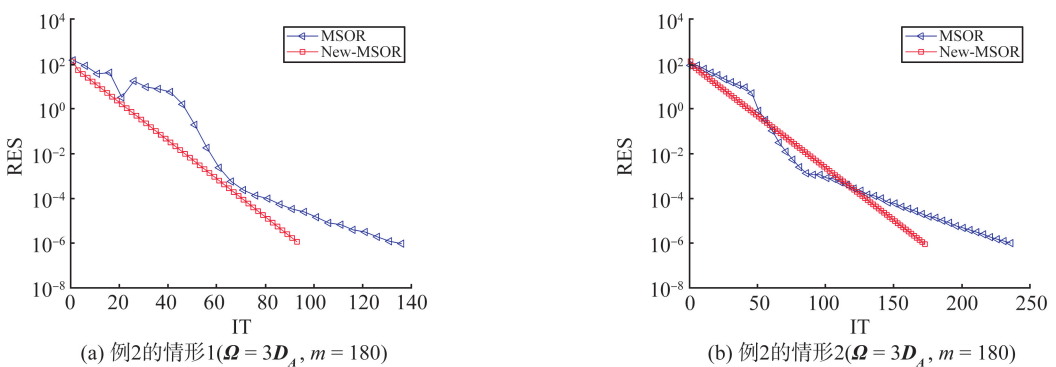


图 2 例 2 中 $m=180$ 时 IT 与 RES 关系
Fig.2 Curve of RES for Example 2 with $m=180$

4 小结

本文提出了一种新的迭代方法求解隐式互补问题(1)。相比于模系矩阵分裂算法(2)和修正的模系矩阵分裂算法(3),所提出的算法初始向量的选取较为自由,并且在每一迭代步仅需求解一个线性方程组。特别地,当系统矩阵 A 是 H_+ -矩阵时,本文给出的收敛性充分条件比较容易验证。进一步,数值实验结果表明,新算法在 CPU 时间和迭代步数方面相比于修正的模系矩阵分裂算法(3),其计算效率更高。此外,是否存在较弱的收敛性充分条件仍是一个值得研究的课题。

参考文献:

- [1] COTTLE R W, PANG J S, STONE R E. The linear complementarity problem[M]. Boston: Academic Press, 1992.
- [2] FERRI M C, PANG J S. Engineering and economic applications of complementarity problems[J]. SIAM Rev, 1997, 39:669-713.
- [3] MURTY K G. Linear complementarity, linear and nonlinear programming[M]. Berlin: Heldermann Verlag, 1988.
- [4] BAI Z Z. Modulus-based matrix splitting iteration methods for linear complementarity problems[J]. Numer Linear Algebra Appl, 2010, 6:917-933.
- [5] ZHANG L L. Two-step modulus-based matrix splitting iteration method for linear complementarity problems[J]. Numer Algorithms, 2011, 57(1):83-99.
- [6] KE Y F, MA C F. On the convergence analysis of two-step modulus-based matrix splitting iteration method for linear complementarity problems[J]. Appl Math Comput, 2014, 243:413-418.
- [7] BAI Z Z, ZHANG L L. Modulus-based synchronous multisplitting iteration methods for linear complementarity problems[J]. Numer Linear Algebra Appl, 2013, 20(3):425-439.
- [8] BAI Z Z, ZHANG L L. Modulus-based synchronous two-stage multisplitting iteration methods for linear complementarity problems[J]. Numer Algorithms, 2013, 62:59-77.
- [9] ZHENG N, YIN J F. Accelerated modulus-based matrix splitting iteration methods for linear complementarity problem[J]. Numer Algorithms, 2013, 64(2):245-262.
- [10] ZHANG Y X, ZHENG H, LU X P, et al. A two-step parallel iteration method for large sparse horizontal linear complementarity problems[J]. Appl Math Comput, 2023, 438:127609.
- [11] ZHENG H, VONG S. On the modulus-based successive overrelaxation iteration method for horizontal linear complementarity problems arising from hydrodynamic lubrication[J]. Appl Math Comput, 2021, 402:126165.
- [12] ZHENG H, VONG S. On convergence of the modulus-based matrix splitting iteration method for horizontal linear complementarity problems of H_+ -matrices[J]. Appl Math Comput, 2020, 369:124890.
- [13] ZHENG H, VONG S, LIU L. A direct preconditioned modulus-based iteration method for solving nonlinear complementarity problems of H -matrices[J]. Appl Math Comput, 2019, 353:396-405.
- [14] ZHENG H, LI W, VONG S. A relaxation modulus-based matrix splitting iteration method for solving linear complementarity problems[J]. Numer Algorithms, 2017, 74:137-152.
- [15] 郑华, 罗静. 一类 H 矩阵线性互补问题的预处理二步模基矩阵分裂迭代方法[J]. 计算数学, 2018, 40(1):24-31.
ZHENG Hua, LUO Jing. A preconditioned two-steps modulus-based matrix splitting iteration method for solving linear complementarity problems of H -matrices[J]. Mathematica Numerica Sinica, 2018, 40(1):24-31.
- [16] 彭小飞. 线性互补问题的广义松弛两步模基矩阵分裂迭代法[J]. 华南师范大学学报(自然科学版), 2019, 51(4):93-99.
PENG Xiaofei. A general relaxation two-sweep modulus-based matrix splitting iteration method for linear complementarity problems[J]. Journal of South China Normal University(Natural Science Edition), 2019, 51(4):93-99.
- [17] HONG J T, LI C L. Modulus-based matrix splitting iteration methods for a class of implicit complementarity problems[J]. Numer Linear Algebra Appl, 2016, 23:629-641.
- [18] LI C L, HONG J T. Modulus-based synchronous multisplitting iteration methods for an implicit complementarity problem[J]. E Asian J Appl Math, 2017, 7(2):363-375.
- [19] ZHENG H, VONG S. A modified modulus-based matrix splitting iteration method for solving implicit complementarity problems[J]. Numer Algorithms, 2019, 82:573-592.
- [20] PANG J S. On the convergence of a basic iterative method for the implicit complementarity problems[J]. Optimiz Theory Appl, 1982, 37:149-162.
- [21] CAO Y, WANG A. Two-step modulus-based matrix splitting iteration methods for implicit complementarity problems[J]. Numer Algorithms, 2019, 82:1377-1394.
- [22] LI N, DING J, YIN J F. Modified relaxation two-sweep modulus-based matrix splitting iteration method for solving a class of implicit complementarity problems[J]. Comput Appl Math, 2022, 413:114370.
- [23] WU S L, LI L. New modulus-based matrix splitting methods for implicit complementarity problem[J]. Numer Algorithms, 2022, 90(4):1735-1754.

- [24] LI Z Z, ZHANG H, OU-YANG L. The selection of the optimal parameter in the modulus-based matrix splitting algorithm for linear complementarity problems[J]. *Comput Optim Appl*, 2021, 80(2):617-638.
- [25] LI Z Z, ZHANG H. On estimation of the optimal parameter of the modulus-based matrix splitting algorithm for linear complementarity problems on second-order cones[J]. *Numer Linear Algebra Appl*, 2023, 30(4):e2480.
- [26] LI Z Z, ZHANG H, OU-YANG L. Anderson accelerating the preconditioned modulus approach for linear complementarity problems on second-order cones[J]. *Numer Algorithms*, 2022, 91(2):803-839.
- [27] LI Z Z, ZHANG H. Anderson acceleration of the modulus-based matrix splitting algorithms for horizontal nonlinear complementarity systems[J]. *Numer Linear Algebra Appl*, 2022, 29(5):e2438.
- [28] 黎科良,柯艺芬,马昌凤. 求解一类隐式互补问题的加速模系矩阵分裂迭代方法[J]. *应用数学*,2023,36(4):1025-1033.
LI Keliang, KE Yifen, MA Changfeng. Accelerated modulus-based matrix splitting iteration method for solving a class of implicit complementarity problems[J]. *Mathematica Applicata*,2023, 36(4):1025-1033.
- [29] FROMMER A, MAYER G. Convergence of relaxed parallel multisplitting methods[J]. *Linear Algebra Appl*, 1989, 119:141-152.
- [30] BERMAN A, PLEMMONS R J. *Nonnegative matrix in the mathematical sciences*[M]. Philadelphia: SIAM Publisher, 1994.
(编辑:胡春燕)

(上接第 54 页)

- [13] LIU Y, LIU B D. A modified uncertain maximum likelihood estimation with applications in uncertain statistics [J]. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 2024, 53(18):6649-6670.
- [14] LIU Y, LIU B D. Estimation of uncertainty distribution function by the principle of least squares[J]. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 2024, 53(21):7624-7641.
- [15] YE T Q, LIU B D. Uncertain hypothesis test with application to uncertain regression analysis[J]. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 2022, 21(2):157-174.
- [16] YE T Q, LIU B D. Uncertain significance test for regression coefficients with application to regional economic analysis[J]. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 2023, 52(20):7271-7288.
- [17] LIU Z. Uncertain growth model for the cumulative number of COVID-19 infections in China[J]. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 2021, 20(2):229-242.
- [18] LIU Y. Moment estimation for uncertain regression model with application to factors analysis of grain yield [J]. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 2024, 53(10):4936-4946.
(编辑:胡春燕)