

求解四元数矩阵方程 $AX+XB=C$ 的全局拟极小残量法

吴玉玲¹, 郑佳莉¹, 柯艺芬^{1,2,3*}, 许小芳¹

(1. 福建师范大学数学与统计学院, 福建 福州 350117; 2. 福建师范大学分析数学及应用教育部重点实验室, 福建 福州 350117; 3. 福建省应用数学中心, 福建 福州 350117)

摘要: 提出四元数体上的非对称 Lanczos 方法, 基于此, 给出求解 Sylvester 四元数矩阵方程 $AX+XB=C$ 的全局四元数拟极小残量法。该方法能够有效降低算法执行过程中的存储空间, 进一步, 通过数值算例验证所提算法的可行性和有效性。

关键词: 四元数; Sylvester 矩阵方程; 非对称 Lanczos 方法; 全局四元数拟极小残量法

中图分类号: O241 **文献标志码:** A

引用格式: 吴玉玲, 郑佳莉, 柯艺芬, 等. 求解四元数矩阵方程 $AX+XB=C$ 的全局拟极小残量法 [J]. 山东大学学报(理学版), 2025, 60(12): 66-74, 102.

Global quasi-minimal residual method for solving quaternion matrix equation $AX+XB=C$

WU Yuling¹, ZHENG Jiali¹, KE Yifen^{1,2,3*}, XU Xiaofang¹

(1. School of Mathematics and Statistics, Fujian Normal University, Fuzhou 350117, Fujian, China; 2. Key Laboratory of Analytical Mathematical and Applications (Ministry of Education), Fujian Normal University, Fuzhou 350117, Fujian, China; 3. Center for Applied Mathematics of Fujian province (FJNU), Fuzhou 350117, Fujian, China)

Abstract: In this paper, the quaternion nonsymmetric Lanczos method is proposed. Based on this method, the global quaternion quasi-minimum residual method is established for solving the Sylvester quaternion matrix equation $AX+XB=C$, which can effectively reduce the storage space during algorithm execution. Further, some numerical examples are presented to demonstrate the feasibility and effectiveness of the proposed method.

Key words: quaternion; Sylvester matrix equation; nonsymmetric Lanczos method; global quaternion quasi-minimal residual method

0 引言

四元数自 1843 年被哈密顿发现之后, 就引起学者的关注。近十多年来, 四元数以及四元数矩阵得到了很好的发展, 特别是在量子力学、人脸识别、信号和图像处理等方面发挥着重要作用^[1-4]。

求解四元数矩阵方程组的数值算法是关于四元数研究的一个重要课题。目前, 为研究四元数矩阵方程组解的问题, 人们发展了许多新的数值方法, 其中常用的策略是借助于四元数矩阵的实表示或复表示, 将四元数矩阵方程组转化为等价的实矩阵方程组或复矩阵方程组。随之而来的问题是方程组的规模增加到原来的 4 倍或 2 倍, 增加了计算量和存储空间。因此, 需要寻找更加有效的数值算法求解大型的四元数矩阵方程组。

众所周知, Krylov 子空间方法是求解大规模稀疏实(复)线性方程组 $Ax=b$ 最流行和最有效的方法之一。例如: 双共轭梯度法(bi-conjugate gradient method, BCG)^[5]、完全正交法(full orthogonalization method,

收稿日期: 2023-10-26; 网络出版时间: 2024-11-08 15:36:29

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(12371378, 11901098); 福建省自然科学基金项目(2023J011127, 2023J01955, 2020J05034)

第一作者: 吴玉玲(1999—), 女, 硕士研究生, 研究方向为数值代数及其应用。E-mail: wuyl0310@163.com

* 通信作者: 柯艺芬(1989—), 女, 副研究员, 博士, 研究方向为数值代数及其应用。E-mail: keyifen@fjnu.edu.cn

FOM)^[6]、广义极小残量法 (generalized minimal residual method, GMRES)^[7] 以及拟极小残量法 (quasi-minimal residual method, QMR)^[8] 等。一些学者将 Krylov 子空间方法应用于求解矩阵方程,例如:文献[9]提出了求解实矩阵方程 $AX=B$ 的全局 FOM 方法和 GMRES 方法;文献[10]中研究了复矩阵方程 $X+A\bar{X}B=C$ 的全局 QMR 方法。

除此之外,一些学者将 Krylov 子空间方法推广到四元数体上,基于保结构的四元数 Arnoldi 方法,文献[11-12]先后提出了求解四元数线性方程组 $Ax=b$ 的四元数广义极小残量法 (quaternion generalized minimal residual method, QGMRES) 和四元数完全正交方法 (quaternion full orthogonalization method, QFOM)。随后,文献[13]进一步提出求解四元数矩阵方程 $AX=B$ 的全局四元数完全正交方法 (global quaternion full orthogonalization method, GI-QFOM) 和全局四元数广义极小残量法 (global quaternion generalized minimum residual method, GI-QGMRES),并将其推广到求解 Sylvester 四元数矩阵方程。注意到, QGMRES 方法和 QFOM 方法都需要计算 Krylov 子空间 $K_m(A, v)$ 的一组正交基,因此需要把这组基存储起来。然而,随着迭代次数的增加,需要更多的储存空间。为了降低存储空间,需要寻求更加有效的数值解法。

本文主要研究 Sylvester 四元数矩阵方程

$$AX+XB=C, \quad (1)$$

其中 $A \in \mathbf{Q}^{n \times n}$, $B \in \mathbf{Q}^{s \times s}$, $C \in \mathbf{Q}^{n \times s}$ 为已知矩阵, $X \in \mathbf{Q}^{n \times s}$ 为未知矩阵。当 A 和 B 没有公共的右特征值时,方程(1)有唯一解^[14]。基于全局四元数非对称 Lanczos 过程,本文提出求解矩阵方程(1)的全局四元数拟极小残量法 (global quaternion quasi-minimal residual method, GI-QQMR),该方法能够有效地减少计算过程中的存储量。

符号说明: \mathbf{R}/\mathbf{Q} 分别表示实数域和四元数体, $\mathbf{R}^n/\mathbf{Q}^n$ 分别表示 n 维实向量和四元数向量的集合, $\mathbf{R}^{n \times m}/\mathbf{Q}^{n \times m}$ 分别表示是实数域上和四元数体上的全体 $n \times m$ 阶矩阵的集合。 \bar{A} 、 A^T 、 A^* 、 $\text{tr}(A)$ 、 $\text{Re}(A)$ 分别表示矩阵 A 的共轭、转置、共轭转置、迹以及实部。 I_n 表示 n 阶的单位矩阵, e_i 表示 n 阶单位矩阵的第 i 列。若 $V \in \mathbf{Q}^{n \times n}$ 满足 $V^*V=I_n$, 则称 V 为正交矩阵。符号 \otimes 表示矩阵的 Kronecker 积。

1 预备知识

本章主要回顾四元数以及四元数矩阵的相关结论。

四元数 $q \in \mathbf{Q}$ 可以表示为

$$q=q_0+q_1i+q_2j+q_3k,$$

其中, $q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbf{R}$, i, j 和 k 为虚数单位并且满足关系式

$$i^2=j^2=k^2=ijk=-1, \quad ij=-ji=k, \quad jk=-kj=i, \quad ki=-ik=j.$$

四元数 q 的共轭定义为 $\bar{q}=q_0-q_1i-q_2j-q_3k$, 范数定义为 $|q|=\sqrt{q\bar{q}}=\sqrt{q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2}$ 。

四元数矩阵 $Y \in \mathbf{Q}^{n \times m}$ 可以表示为

$$Y=Y_0+Y_1i+Y_2j+Y_3k,$$

其中 $Y_0, Y_1, Y_2, Y_3 \in \mathbf{R}^{n \times m}$, 其共轭矩阵定义为 $\bar{Y}=Y_0-Y_1i-Y_2j-Y_3k$, 共轭转置矩阵定义为 $Y^* = Y_0^T - Y_1^T i - Y_2^T j - Y_3^T k \in \mathbf{Q}^{m \times n}$ 。

下面介绍四元数体上向量内积和矩阵内积的定义。

定义 1^[11] 设四元数向量 $a=(a_i)$, $b=(b_i) \in \mathbf{Q}^n$, 两个四元数向量的内积定义为

$$\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^n b_i^* a_i.$$

设四元数矩阵 $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij}) \in \mathbf{Q}^{m \times n}$, 其实内积定义为

$$\langle A, B \rangle_F = \text{Re}[\text{tr}(B^*A)] = \text{Re}\left[\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m b_{ij}^* a_{ij}\right].$$

定义 2 四元数向量 $x=(x_i) \in \mathbf{Q}^n$ 的 2-范数和矩阵 $X=(x_{ij}) \in \mathbf{Q}^{m \times n}$ 的 F -范数分别定义为

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad \|X\|_F = \sqrt{\langle X, X \rangle_F}.$$

由文献[15]可知,根据定义1, $\mathbf{Q}^{n \times n}$ 关于该四元数矩阵内积构成一个四元数 Hilbert 空间,并且其实内积满足以下性质:

- (1) $\langle X\alpha + Y\beta, Z \rangle_F = \langle X, Z \rangle_F \alpha + \langle Y, Z \rangle_F \beta$, 其中 $X, Y, Z \in \mathbf{Q}^{n \times n}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$;
- (2) $\langle X, Y\alpha + Z\beta \rangle_F = \langle X, Y \rangle_F \alpha + \langle X, Z \rangle_F \beta$, 其中 $X, Y, Z \in \mathbf{Q}^{n \times n}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$;
- (3) $\langle X, Y \rangle_F = \langle Y, X \rangle_F$, 其中 $X, Y \in \mathbf{Q}^{n \times n}$;
- (4) $\langle X, X \rangle_F \geq 0$, 若 $\langle X, X \rangle_F = 0$, 则 $X = \mathbf{O}$;
- (5) $X, Y \in \mathbf{Q}^{n \times n}$, 则它们之间的距离定义为

$$D(X, Y) := \sqrt{\langle X - Y, X - Y \rangle_F}.$$

定义 3^[11] 给定四元数向量 $u \in \mathbf{Q}^n$ 以及 $v_1, v_2, \dots, v_m \in \mathbf{Q}^n$ 。若

$$u = v_1 a_1 + v_2 a_2 + \dots + v_m a_m,$$

其中 a_1, a_2, \dots, a_m 为四元数, 则称 u 为 v_1, v_2, \dots, v_m 的一个右线性组合, 或者称 u 可由 v_1, v_2, \dots, v_m 线性表出。

四元数体上的右线性组合与实数域上的线性组合有类似的性质。若存在不全为零的四元数 a_1, a_2, \dots, a_m 使得 $v_1 a_1 + v_2 a_2 + \dots + v_m a_m = \mathbf{0}$, 则称 v_1, v_2, \dots, v_m 是线性相关的; 否则, 称其为线性无关的。对于任意一个向量组, 这个向量组中所有线性无关的向量组成的集合称为这个向量组的极大线性无关组, 极大线性无关组所包含向量的个数称为这个向量组的秩。

定义 4 在向量空间 \mathbf{Q}^n 中, v_1, v_2, \dots, v_n 为向量空间 \mathbf{Q}^n 的一组基, 称 n 为向量空间 \mathbf{Q}^n 的维数。如果存在四元数向量 v_1, v_2, \dots, v_n 满足

- (1) v_1, v_2, \dots, v_n 是线性无关的;
- (2) \mathbf{Q}^n 中的每一元素都可以由 v_1, v_2, \dots, v_n 右线性表示。

将文献[16]中的定义2推广到四元数体上, 得到一个新的矩阵积 \diamond_F , 其定义如下。

定义 5 设 $A = (A_1, A_2, \dots, A_p) \in \mathbf{Q}^{n \times ps}$, $B = (B_1, B_2, \dots, B_q) \in \mathbf{Q}^{n \times qs}$, 其中 $A_i, B_j \in \mathbf{Q}^{n \times s}$ ($i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, q$), 则矩阵 $A^* \diamond_F B \in \mathbf{R}^{p \times q}$ 定义如下:

$$A^* \diamond_F B = \begin{pmatrix} \langle B_1, A_1 \rangle_F & \langle B_2, A_1 \rangle_F & \cdots & \langle B_q, A_1 \rangle_F \\ \langle B_1, A_2 \rangle_F & \langle B_2, A_2 \rangle_F & \cdots & \langle B_q, A_2 \rangle_F \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle B_1, A_p \rangle_F & \langle B_2, A_p \rangle_F & \cdots & \langle B_q, A_p \rangle_F \end{pmatrix}.$$

注 1 (1) 若满足 $A^* \diamond_F A = I_p$, 则称矩阵 $A = (A_1, A_2, \dots, A_p)$ 为 F -正交的;

(2) 设 $X \in \mathbf{Q}^{n \times s}$, 则 $X^* \diamond_F X = \|X\|_F^2$ 。

根据定义5, 给出有关 \diamond_F 的一些性质。

定理 1 设 $A, B, C \in \mathbf{Q}^{n \times ps}$, $\alpha \in \mathbf{R}$, 则有

- (1) $(A+B)^* \diamond_F C = A^* \diamond_F C + B^* \diamond_F C$;
- (2) $A^* \diamond_F (B+C) = A^* \diamond_F B + A^* \diamond_F C$;
- (3) $A^* \diamond_F (C\alpha) = (A^* \diamond_F C)\alpha$ 。

证明 设 $A = (A_1, A_2, \dots, A_p)$, $B = (B_1, B_2, \dots, B_p)$, $C = (C_1, C_2, \dots, C_p)$ 。根据内积的性质, 得

$$\begin{aligned} (A+B)^* \diamond_F C &= \begin{pmatrix} \langle C_1, A_1+B_1 \rangle_F & \langle C_2, A_1+B_1 \rangle_F & \cdots & \langle C_p, A_1+B_1 \rangle_F \\ \langle C_1, A_2+B_2 \rangle_F & \langle C_2, A_2+B_2 \rangle_F & \cdots & \langle C_p, A_2+B_2 \rangle_F \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle C_1, A_p+B_p \rangle_F & \langle C_2, A_p+B_p \rangle_F & \cdots & \langle C_p, A_p+B_p \rangle_F \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle C_1, A_1 \rangle_F & \langle C_2, A_1 \rangle_F & \cdots & \langle C_p, A_1 \rangle_F \\ \langle C_1, A_2 \rangle_F & \langle C_2, A_2 \rangle_F & \cdots & \langle C_p, A_2 \rangle_F \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle C_1, A_p \rangle_F & \langle C_2, A_p \rangle_F & \cdots & \langle C_p, A_p \rangle_F \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \begin{pmatrix} \langle C_1, B_1 \rangle_F & \langle C_2, B_1 \rangle_F & \cdots & \langle C_p, B_1 \rangle_F \\ \langle C_1, B_2 \rangle_F & \langle C_2, B_2 \rangle_F & \cdots & \langle C_p, B_2 \rangle_F \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle C_1, B_p \rangle_F & \langle C_2, B_p \rangle_F & \cdots & \langle C_p, B_p \rangle_F \end{pmatrix} \\
 & = A^* \diamond_F C + B^* \diamond_F C.
 \end{aligned}$$

同理,结论(2)和结论(3)通过直接计算即可得到,证毕。

接下来,为了叙述方便,定义两个算子

$$\mathcal{A}: X \rightarrow AX+XB, \quad \mathcal{A}^*: X \rightarrow A^*X+XB^*. \tag{2}$$

于是,方程(1)等价于

$$\mathcal{A}(X) = C. \tag{3}$$

进一步,定义 2 个四元数 Krylov 子空间为

$$K_m(\mathcal{A}, V) := \text{span} \{ V, \mathcal{A}(V), \dots, \mathcal{A}^{m-1}(V) \}, \tag{4}$$

$$K_m(\mathcal{A}^*, W) := \text{span} \{ W, \mathcal{A}^*(W), \dots, \mathcal{A}^{*m-1}(W) \}, \tag{5}$$

其中 $V, W \in \mathbb{Q}^{n \times s}$ 是两个给定的矩阵, $\mathcal{A}^i(V) = \mathcal{A}(\mathcal{A}^{i-1}(V))$, $\mathcal{A}^{*i}(W) = \mathcal{A}^*(\mathcal{A}^{*i-1}(W))$ 。

2 四元数非对称 Lanczos 方法

这一章将非对称 Lanczos 方法推广到四元数体上,给出四元数非对称 Lanczos 方法。同时,计算子空间 $K_m(\mathcal{A}, V)$ 和 $K_m(\mathcal{A}^*, W)$ 的基矩阵 V_1, V_2, \dots, V_m 和 W_1, W_2, \dots, W_m 。

下面给出四元数非对称 Lanczos 方法。

算法 1 (四元数非对称 Lanczos 方法)

步骤 1 选取矩阵 V_1 和 W_1 使满足 $\langle V_1, W_1 \rangle_F = 1$ 。

步骤 2 令 $\beta_0 = \gamma_0 = 0, W_0 = V_0 = O$ 。

步骤 3 对 $j=1, 2, \dots, m$, 计算 $\alpha_j = \langle \mathcal{A}(V_j), W_j \rangle_F$ 。

步骤 4 计算

$$\begin{cases} \hat{V}_{j+1} = \mathcal{A}(V_j) - V_j \alpha_j - V_{j-1} \gamma_{j-1}, \\ \hat{W}_{j+1} = \mathcal{A}^*(W_j) - W_j \alpha_j - W_{j-1} \beta_{j-1}. \end{cases}$$

步骤 5 令 $\omega_j = \langle \hat{V}_{j+1}, \hat{W}_{j+1} \rangle_F$, 若 $|\omega_j| = 0$, 则停算; 否则, 计算 $\beta_j = \sqrt{|\omega_j|}, \gamma_j = \omega_j / \beta_j$ 。

步骤 6 计算 $V_{j+1} = \hat{V}_{j+1} / \beta_j, W_{j+1} = \hat{W}_{j+1} / \gamma_j$ 。

由算法 1, 有

$$\begin{cases} V_{j+1} \beta_j = \mathcal{A}(V_j) - V_j \alpha_j - V_{j-1} \gamma_{j-1}, \\ W_{j+1} \gamma_j = \mathcal{A}^*(W_j) - W_j \alpha_j - W_{j-1} \beta_{j-1}. \end{cases} \tag{6}$$

算法 1 在执行过程中,若存在某个数 j 使得 $\langle \hat{V}_{j+1}, \hat{W}_{j+1} \rangle_F = 0$, 此时算法将发生中断,这时可以采用 Look-ahead 技术继续进行,更多的信息可以参考文献[8]。

定理 2 假设算法 1 已经进行了 m 步没有发生中断,则由算法 1 得到的一系列四元数矩阵 V_1, V_2, \dots, V_m 和 W_1, W_2, \dots, W_m 是相互正交的,即满足关系式:

$$\langle V_i, W_j \rangle_F = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, m. \tag{7}$$

记 $\mathcal{V}_m = (V_1, V_2, \dots, V_m), \mathcal{W}_m = (W_1, W_2, \dots, W_m)$, 则有 $\mathcal{V}_m^* \diamond_F \mathcal{W}_m = I_m$ 。

证明 用数学归纳法进行证明。当 $i=1$ 时,有 $\langle V_1, W_1 \rangle_F = 1$ 成立。假设 V_1, V_2, \dots, V_j 和 W_1, W_2, \dots, W_j 是正交的。下证当 $i \leq j$ 时, $\langle V_{j+1}, W_i \rangle_F = 0$ 成立。

当 $i=j$ 时,有

$$\langle V_{j+1}, W_j \rangle_F = \langle (\mathcal{A}(V_j) - V_j \alpha_j - V_{j-1} \gamma_{j-1}) / \beta_j, W_j \rangle_F$$

$$\begin{aligned} &= (\langle \mathcal{A}(\mathbf{V}_j), \mathbf{W}_j \rangle_F - \langle \mathbf{V}_j \alpha_j, \mathbf{W}_j \rangle_F - \langle \mathbf{V}_{j-1} \gamma_{j-1}, \mathbf{W}_j \rangle_F) / \beta_j \\ &= (\alpha_j - \alpha_j) / \beta_j = 0. \end{aligned}$$

当 $i=j-1$ 时,有

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{V}_{j+1}, \mathbf{W}_{j-1} \rangle_F &= \langle (\mathcal{A}(\mathbf{V}_j) - \mathbf{V}_j \alpha_j - \mathbf{V}_{j-1} \gamma_{j-1}) / \beta_j, \mathbf{W}_{j-1} \rangle_F \\ &= (\langle \mathcal{A}(\mathbf{V}_j), \mathbf{W}_{j-1} \rangle_F - \langle \mathbf{V}_j \alpha_j, \mathbf{W}_{j-1} \rangle_F - \langle \mathbf{V}_{j-1} \gamma_{j-1}, \mathbf{W}_{j-1} \rangle_F) / \beta_j \\ &= (\langle \mathcal{A}(\mathbf{V}_j), \mathbf{W}_{j-1} \rangle_F - \gamma_{j-1}) / \beta_j \\ &= (\langle \mathbf{V}_j, \mathcal{A}^*(\mathbf{W}_{j-1}) \rangle_F - \gamma_{j-1}) / \beta_j \\ &= (\langle \mathbf{V}_j, \mathbf{W}_j \gamma_{j+1} + \mathbf{W}_{j-1} \alpha_{j-1} + \mathbf{W}_{j-2} \beta_{j-2} \rangle_F - \gamma_{j-1}) / \beta_j \\ &= (\langle \mathbf{V}_j, \mathbf{W}_j \gamma_{j-1} \rangle_F + \langle \mathbf{V}_j, \mathbf{W}_{j-1} \alpha_{j-1} \rangle_F + \langle \mathbf{V}_j, \mathbf{W}_{j-2} \beta_{j-2} \rangle_F - \gamma_{j-1}) / \beta_j \\ &= (\gamma_{j-1} - \gamma_{j-1}) / \beta_j = 0. \end{aligned}$$

当 $i < j-1$ 时,有

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{V}_{j+1}, \mathbf{W}_i \rangle_F &= \langle (\mathcal{A}(\mathbf{V}_j) - \mathbf{V}_j \alpha_j - \mathbf{V}_{j-1} \gamma_{j-1}) / \beta_j, \mathbf{W}_i \rangle_F \\ &= (\langle \mathcal{A}(\mathbf{V}_j), \mathbf{W}_i \rangle_F - \langle \mathbf{V}_j \alpha_j, \mathbf{W}_i \rangle_F - \langle \mathbf{V}_{j-1} \gamma_{j-1}, \mathbf{W}_i \rangle_F) / \beta_j \\ &= \langle \mathcal{A}(\mathbf{V}_j), \mathbf{W}_i \rangle_F / \beta_j \\ &= \langle \mathbf{V}_j, \mathcal{A}^*(\mathbf{W}_i) \rangle_F / \beta_j \\ &= \langle \mathbf{V}_j, \mathbf{W}_{i+1} \gamma_i + \mathbf{W}_i \alpha_i + \mathbf{W}_{i-1} \beta_{i-1} \rangle_F / \beta_j \\ &= (\langle \mathbf{V}_j, \mathbf{W}_{i+1} \gamma_i \rangle_F + \langle \mathbf{V}_j, \mathbf{W}_i \alpha_i \rangle_F + \langle \mathbf{V}_j, \mathbf{W}_{i-1} \beta_{i-1} \rangle_F) / \beta_j \\ &= 0. \end{aligned}$$

当 $i=j+1$ 时,由算法 1,有

$$\langle \mathbf{V}_{j+1}, \mathbf{W}_{j+1} \rangle_F = 1,$$

进一步根据实内积的性质,有 $\langle \mathbf{W}_i, \mathbf{V}_{j+1} \rangle_F = \langle \mathbf{V}_{j+1}, \mathbf{W}_i \rangle_F = 0$, 故结论成立。

将算法 1 中得到的 $(m+1) \times m$ 阶实三对角矩阵记为 $\tilde{\mathbf{T}}_m$, 将 $\tilde{\mathbf{T}}_m$ 除去最后一行, 得到的 $m \times m$ 阶矩阵, 记为 \mathbf{T}_m ,

$$\tilde{\mathbf{T}}_m = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & & & & \\ \beta_1 & \alpha_2 & \gamma_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \beta_{m-2} & \alpha_{m-1} & \gamma_{m-1} & \\ & & & \beta_{m-1} & \alpha_m & \\ & & & & \beta_m & \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathbf{T}_m \\ \beta_m \mathbf{e}_m^T \end{pmatrix},$$

这里 $\mathbf{e}_m = (0, \dots, 0, 1)^T \in \mathbf{R}^m$ 。

由上述讨论, 有下面的结论成立。

定理 3 记 $\mathcal{V}_m := (\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_m)$ 和 $\mathcal{A}(\mathcal{V}_m) = (\mathcal{A}(\mathbf{V}_1), \mathcal{A}(\mathbf{V}_2), \dots, \mathcal{A}(\mathbf{V}_m))$, 则由算法 1 可得如下关系式:

$$\mathcal{A}(\mathcal{V}_m) = \mathcal{V}_{m+1} (\tilde{\mathbf{T}}_m \otimes \mathbf{I}_s) = \mathcal{V}_m (\mathbf{T}_m \otimes \mathbf{I}_s) + \mathbf{V}_{m+1} (\beta_m \mathbf{e}_m^T \otimes \mathbf{I}_s); \quad (8)$$

$$\mathcal{V}_m^{**} \diamond_F \mathcal{A}(\mathcal{V}_m) = \mathbf{T}_m. \quad (9)$$

证明 根据算法 1, 有

$$\mathcal{A}(\mathbf{V}_j) = \mathbf{V}_{j+1} \beta_j + \mathbf{V}_j \alpha_j + \mathbf{V}_{j-1} \gamma_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

于是

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathcal{V}_m) &= (\mathcal{A}(\mathbf{V}_1), \dots, \mathcal{A}(\mathbf{V}_j), \dots, \mathcal{A}(\mathbf{V}_m)) \\ &= (\mathbf{V}_1 \alpha_1 + \mathbf{V}_2 \beta_1, \dots, \mathbf{V}_{j-1} \gamma_{j-1} + \mathbf{V}_j \alpha_j + \mathbf{V}_{j+1} \beta_j, \dots, \mathbf{V}_{m-1} \gamma_{m-1} + \mathbf{V}_m \alpha_m + \mathbf{V}_{m+1} \beta_m) \\ &= \mathbf{V}_{m+1} (\tilde{\mathbf{T}}_m \otimes \mathbf{I}_s). \end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{V}_1\alpha_1+\mathbf{V}_2\beta_1, \dots, \mathbf{V}_{j-1}\gamma_{j-1}+\mathbf{V}_j\alpha_j+\mathbf{V}_{j+1}\beta_j, \dots, \mathbf{V}_{m-1}\gamma_{m-1}+\mathbf{V}_m\alpha_m+\mathbf{V}_{m+1}\beta_m) \\
 = & (\mathbf{V}_1\alpha_1+\mathbf{V}_2\beta_1, \dots, \mathbf{V}_{j-1}\gamma_{j-1}+\mathbf{V}_j\alpha_j+\mathbf{V}_{j+1}\beta_j, \dots, \mathbf{V}_{m-1}\gamma_{m-1}+\mathbf{V}_m\alpha_m) \\
 & + (\mathbf{O}, \mathbf{O}, \dots, \mathbf{O}, \mathbf{V}_{m+1}\beta_m) \\
 = & \mathcal{F}_m(\mathbf{T}_m \otimes \mathbf{I}_s) + \mathbf{V}_{m+1}(\beta_m \mathbf{e}_m^T \otimes \mathbf{I}_s),
 \end{aligned}$$

从而式(8)成立。

令 $\mathbf{T}_m = (t_{ij}) \in \mathbf{R}^{m \times m}$ 。将 \mathcal{W}^* 同时与式(8)两边做 \diamond_F 积,利用定理 1 和定理 2 的结论,可得

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}_m^* \diamond_F \mathcal{A}(\mathcal{F}_m) &= \mathcal{W}_m^* \diamond_F [\mathcal{F}_m(\mathbf{T}_m \otimes \mathbf{I}_s) + \mathbf{V}_{m+1}(\beta_m \mathbf{e}_m^T \otimes \mathbf{I}_s)] \\
 &= \mathcal{W}_m^* \diamond_F \left(\sum_{i=1}^m \mathbf{V}_i t_{i1}, \sum_{i=1}^m \mathbf{V}_i t_{i2}, \dots, \sum_{i=1}^m \mathbf{V}_i t_{im} \right) + \mathcal{W}_m^* \diamond_F (\mathbf{O}, \mathbf{O}, \dots, \mathbf{O}, \mathbf{V}_{m+1}\beta_m) \\
 &= \begin{pmatrix} \langle \sum_{i=1}^m \mathbf{V}_i t_{i1}, \mathbf{W}_1 \rangle_F & \langle \sum_{i=1}^m \mathbf{V}_i t_{i2}, \mathbf{W}_1 \rangle_F & \dots & \langle \sum_{i=1}^m \mathbf{V}_i t_{im}, \mathbf{W}_1 \rangle_F \\ \langle \sum_{i=1}^m \mathbf{V}_i t_{i1}, \mathbf{W}_2 \rangle_F & \langle \sum_{i=1}^m \mathbf{V}_i t_{i2}, \mathbf{W}_2 \rangle_F & \dots & \langle \sum_{i=1}^m \mathbf{V}_i t_{im}, \mathbf{W}_2 \rangle_F \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \sum_{i=1}^m \mathbf{V}_i t_{i1}, \mathbf{W}_m \rangle_F & \langle \sum_{i=1}^m \mathbf{V}_i t_{i2}, \mathbf{W}_m \rangle_F & \dots & \langle \sum_{i=1}^m \mathbf{V}_i t_{im}, \mathbf{W}_m \rangle_F \end{pmatrix} \\
 &+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \langle \mathbf{V}_{m+1}\beta_m, \mathbf{W}_1 \rangle_F \\ 0 & 0 & \dots & \langle \mathbf{V}_{m+1}\beta_m, \mathbf{W}_2 \rangle_F \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \langle \mathbf{V}_{m+1}\beta_m, \mathbf{W}_m \rangle_F \end{pmatrix} = \mathbf{T}_m,
 \end{aligned}$$

故式(9)成立。

3 全局四元数拟极小残量法

本章将给出求解矩阵方程(3)的全局四元数拟极小残量方法。给定初始值 \mathbf{X}_0 ,记 $\mathbf{R}_0 \neq \mathbf{O}$ 为对应残差矩阵,根据四元数非对称 Lanczos 方法,得到四元数 Krylov 子空间为

$$\mathbf{K}_m(\mathcal{A}, \mathbf{R}_0) = \text{span}\{\mathbf{R}_0, \mathcal{A}(\mathbf{R}_0), \dots, \mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{R}_0)\}.$$

令 $\beta = \|\mathbf{R}_0\|_F$, $\mathbf{V}_1 = \mathbf{R}_0/\beta$,则第 m 步的近似解可表示为

$$\mathbf{X}_m = \mathbf{X}_0 + \mathcal{F}_m(\mathbf{y}_m \otimes \mathbf{I}_s), \tag{10}$$

其中, $\mathcal{F}_m = (\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_m) \in \mathbf{Q}^{n \times ms}$, $\mathbf{y}_m \in \mathbf{R}^m$ 。于是,对应的残差矩阵为

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_m &= \mathbf{C} - \mathcal{A}(\mathbf{X}_m) \\
 &= \mathbf{C} - \mathcal{A}(\mathbf{X}_0 + \mathcal{F}_m(\mathbf{y}_m \otimes \mathbf{I}_s)) \\
 &= \mathbf{R}_0 - \mathcal{A}(\mathcal{F}_m(\mathbf{y}_m \otimes \mathbf{I}_s)) \\
 &= \beta \mathbf{V}_1 - \mathcal{A}(\mathcal{F}_m)(\mathbf{y}_m \otimes \mathbf{I}_s) \\
 &= \beta \mathbf{V}_1 - \mathcal{F}_{m+1}(\tilde{\mathbf{T}}_m \otimes \mathbf{I}_s)(\mathbf{y}_m \otimes \mathbf{I}_s) \\
 &= \mathcal{F}_{m+1}((\beta \mathbf{e}_1 - \tilde{\mathbf{T}}_m \mathbf{y}_m) \otimes \mathbf{I}_s),
 \end{aligned} \tag{11}$$

这里 $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbf{R}^{m+1}$,从而得到残差矩阵的范数为

$$\|\mathbf{R}_m\|_F = \|\mathcal{F}_{m+1}[(\beta \mathbf{e}_1 - \tilde{\mathbf{T}}_m \mathbf{y}_m) \otimes \mathbf{I}_s]\|_F. \tag{12}$$

关于 $\|\mathbf{R}_m\|_F$ 的极小化问题求解 \mathbf{y}_m ,由于大多数情况下 \mathcal{F}_{m+1} 不是 F -正交的,从而导致求解 $\|\mathbf{R}_m\|_F$ 的极小化问题变得困难。但当 $\|\mathcal{F}_{m+1}\|_F$ 很小时,则只需要求 \mathbf{y}_m 满足 $\|\beta \mathbf{e}_1 - \tilde{\mathbf{T}}_m \mathbf{y}_m\|_2$ 达到极小即可,令

$$J(\mathbf{y}) = \|\beta \mathbf{e}_1 - \tilde{\mathbf{T}}_m \mathbf{y}\|_2, \tag{13}$$

于是求解方程(3)的近似解就转换为求解最小二乘解问题(13)的最优解 \mathbf{y}_m ,这就是拟极小残量法。

注意到矩阵 $\tilde{\mathbf{T}}_m$ 为实三对角矩阵,这促使想到的解决方法是应用 Givens 变换,对 $\tilde{\mathbf{T}}_m$ 进行 QR 分解使其

约化为上三角矩阵。记第 i 个 Givens 实变换矩阵为 Ω_i , 当 GI-QQMR 算法进行了第 m 次迭代, 将 m 个 Givens 实变换矩阵的乘积记为 Q_m , 即 $Q_m = \Omega_1 \Omega_2 \cdots \Omega_m$, 则 $\hat{R}_{m+1} = Q_m \tilde{T}_m$ 为一个实上三角矩阵, 记 $\hat{\xi}_m = Q_m(\beta e_1) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m+1})^T \in \mathbf{R}^{m+1}$ 。于是最小二乘问题(13)约化为实上三角最小二乘问题

$$y_m = \arg \min_y \|\hat{\xi}_m - \hat{R}_{m+1} y\|_2. \quad (14)$$

将除去 \hat{R}_{m+1} 最后一行以及 $\hat{\xi}_m$ 最后一个分量得到矩阵和向量分别记为 \tilde{R}_m 和 $\tilde{\xi}_m$, 可得 $y_m = \tilde{R}_m^{-1} \tilde{\xi}_m$ 。

下面给出 GI-QQMR 的实施步骤。

算法 2 GI-QQMR 方法求解 Sylvester 四元数矩阵方程 $AX + XB = C$

步骤 1 给定 $A \in \mathbf{Q}^{n \times n}$, $B \in \mathbf{Q}^{s \times s}$, $C \in \mathbf{Q}^{n \times s}$ 。选取初始四元数矩阵 $X_0 \in \mathbf{Q}^{n \times s}$ 和允许误差 $0 < \varepsilon \ll 1$ 。

步骤 2 计算初始残差矩阵 $R_0 = C - \mathcal{A}(X_0)$ 。令 $\beta = \|R_0\|_F$, $V_1 = R_0/\beta$, 选取 W_1 使得 $\langle V_1, W_1 \rangle_F = 1$ (如 $W_1 = V_1$)。置 $j := 1$ 。

步骤 3 令 $\beta_0 = \gamma_0 = 0$, $P_{-1} = P_0 = V_0 = W_0 = O \in \mathbf{Q}^{n \times s}$ 。

步骤 4 对 $j = 1, 2, \dots, n$, 用算法 1 计算 V_{j+1}, W_{j+1} 和 $\alpha_j, \beta_j, \gamma_{j-1}$, 定义 $(j+1) \times j$ 阶矩阵 \tilde{T}_j 。

步骤 5 对 $i = \max\{1, j-2\}, \dots, j-1$, 对 \tilde{T}_j 进行 Givens 变换

$$\begin{pmatrix} t_{ij} \\ t_{i+1,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_i & s_i \\ -s_i & c_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{ij} \\ t_{i+1,j} \end{pmatrix}.$$

步骤 6 计算第 j 次 Givens 变换 Ω_j 中的 c_j, s_j , 其中

$$c_j = \frac{t_{jj}}{\sqrt{t_{jj}^2 + t_{j+1,j}^2}}, \quad s_j = \frac{t_{j+1,j}}{t_{jj}} c_j.$$

步骤 7 对 $j+1$ 实维向量 $\hat{\xi}_j$ 的最后两个分量和矩阵 \tilde{T}_j 的最后一列分别作用第 j 次 Givens 变换 Ω_j :

$$\begin{pmatrix} t_{jj} \\ t_{j+1,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_j & s_j \\ -s_j & c_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{jj} \\ t_{j+1,j} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \xi_j \\ \xi_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_j & s_j \\ -s_j & c_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_j \\ 0 \end{pmatrix}.$$

步骤 8 计算 $P_j = (V_j - P_{j-1} t_{j-1,j} - P_{j-2} t_{j-2,j})/t_{jj}$ 。

步骤 9 计算 $X_j = X_{j-1} + P_j \xi_j$ 。若 $|\xi_{j+1}|/\beta \leq \varepsilon$, 停止计算, 令 $m := j$; 否则, 置 $j := j+1$, 转步 4。

由算法 2 可得如下关于残差矩阵的有关结论。

定理 4 设 X_m 是由算法 2 计算得到的关于方程(3)的一个近似解, R_m 为对应的残差矩阵, 则有

$$\|R_m\|_F \leq \|\mathcal{V}_{m+1}\|_F |s_m s_{m-1} \cdots s_2 s_1| \|R_0\|_F. \quad (15)$$

证明 根据式(11)得

$$R_m = C - \mathcal{A}(X_m) = \mathcal{V}_{m+1} [(\beta e_1 - \tilde{T}_m y_m) \otimes I_s],$$

对上式两边同时取范数, 有

$$\|R_m\|_F \leq \|\mathcal{V}_{m+1}\|_F \|\beta e_1 - \tilde{T}_m y_m\|_2. \quad (16)$$

根据求解最小二乘问题的过程, 有

$$\begin{aligned} \|\beta e_1 - \tilde{T}_m y_m\|_2 &= \|Q_m^* (\hat{\xi}_m - \hat{R}_{m+1} y_m)\|_2 \\ &= \left\| Q_m^* \begin{pmatrix} \tilde{\xi}_m \\ \xi_{m+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{R}_m \\ 0 \end{pmatrix} y_m \right\|_2 \\ &= |\xi_{m+1}|. \end{aligned}$$

又因为根据算法 2, 有 $\xi_{m+1} = (-1)^m s_m s_{m-1} \cdots s_2 s_1 \|R_0\|_F$, 故定理得证。

4 数值实验

本章给出 2 个例子来验证所提出算法的可行性, 并将所提算法与现有的方法进行比较, 从而体现该方法的优越性。在数值实验中, 算法的迭代终止条件为相对误差 $\text{Res} \leq 1.0 \times 10^{-8}$, 即

$$\text{Res} = \|C - AX_m - X_m B\|_F / \|R_0\|_F \leq 1.0 \times 10^{-8}.$$

所有实验均在 MATLAB-R2021a 软件中进行。

例 1 考虑 Sylvester 四元数矩阵方程

$$AX+XB=C,$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} 7+5i+9k & 9+i+2j & 2k & 1+2i+k \\ 3-i+j-2k & 2+2i+k & 1+3i+4j & 2+4j+3k \\ 4i-2k & i-j+3k & 1+9i+7k & 9+3i-5j \\ 1+4k & 4i & 2i+j+2k & 5+9i+j \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1+5i+2j & 3+3j-k & i+2k & 2+j+k \\ 3-i-2k & -2+2j+k & 1+3i-4j & 2+4j+3k \\ 4i-2k & 1+i-j & -1+j+8k & 2+3i+5k \\ 1+k & 2j+6k & -3+2i+2k & 9i+j+k \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -5+47i+20j+15k & -1+35i+16j+16k & 45+17i-21j+7k & 5+46i+41j+49k \\ -35+43i+43j+10k & -37+29i+13j+48k & -22-28j-16k & -7+33i+9j+22k \\ -61+46i+40j+73k & -20+2i-14j+49k & -3-i+18j-22k & -83-14i+j+8k \\ -7+6i+22j+4k & 37i+16j+26k & 10+17i-14j+5k & -3+i+30j+22k \end{pmatrix},$$

选取初始值 $X_0 = O_{4 \times 4}$, 当算法 2 满足终止条件时, 得到四元数矩阵方程 (1) 的近似解, 算法的数值结果和收敛曲线如图 1 所示。

在下面这个例子中, 分别求解几个稀疏 Sylvester 四元数矩阵方程, 同时将本文所提算法与 GI-QFOM、GI-QGMRES^[13] 进行对比。

例 2 考虑四元数矩阵方程 (1), 系数矩阵满足 $A = A_0 + A_1i + A_2j + A_3k \in Q^{n \times n}$, $B = B_0 + B_1i + B_2j + B_3k \in Q^{s \times s}$, 其中 $A_i, B_i, i=0, 1, 2, 3$ 为实矩阵, 并且

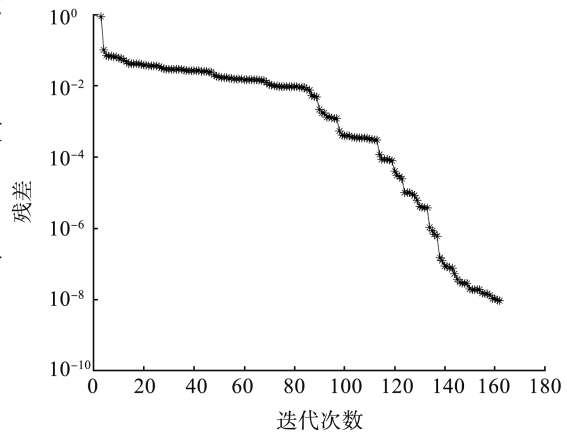


图 1 例 1 的数值结果

Fig.1 Numerical results of Example 1

$$B_0 = \text{tri diag}(s, 9, 23, -3), \quad B_1 = \text{tri diag}(s, 5, 4, 11),$$

$$B_2 = \text{tri diag}(s, -7, 9, -4), \quad B_3 = \text{tri diag}(s, -4, 11, -2).$$

对于系数矩阵 A , 考虑以下几种情况:

情况 1 $A_0 = \text{west0067}, A_1 = -A_0, A_2 = 2A_0, A_3 = 1.5A_0$ 。

情况 2 $A_0 = \text{pde225}, A_1 = 2A_0, A_2 = -A_0, A_3 = 2A_0$ 。

情况 3 $A_0 = \text{bfw398b}, A_1 = A_0, A_2 = 3A_0, A_3 = 2A_0$ 。

情况 4 $A_0 = \text{gre}_512, A_1 = 2A_0, A_2 = A_0, A_3 = 2A_0$ 。

以上所用到的 4 个稀疏实矩阵 (west0067、pde225、bfw398b、gre_512) 均来自 Davis 收集的矩阵, 数据来源于 HB (Harwell-Boeing) group^[17], 它们所具有的性质如表 1 所示。

表 1 例 2 测试矩阵的性质

Table 1 Properties of the test matrices of Example 2

矩阵	行数	列数	结构	非零个数	条件数
west0067	67	67	非对称	294	130.217 0
pde225	225	225	非对称	1 065	39.003 8
bfw398b	398	398	对称	2 910	21.130 4
gre_512	512	512	对称	1 976	158.318 0

四元数矩阵 C 的选取使得方程组 (1) 有精确解

$$X^* = \text{ones}(n, s) + \text{eye}(n, s)i + \text{eye}(n, s)j + \text{ones}(n, s)k.$$

选择初始值 $X_0 = O_{n \times s}$, 在不同的情况中, n, s 有不同的取值。在这个例子中, 应用算法 2 以及 GI-QFOM、GI-QGMRES 3 个方法求解不同的四元数矩阵方程 (1), 相应的数值结果如表 2 所示。实验数值结果验证了算法 2 对于求解稀疏四元数矩阵方程的有效性和优越性。

表2 例2的数值结果
Table 2 Numerical results of Example 2

情况	维数 $[n,s]$	算法	时间	迭代次数	相对误差
west0067	[67,5]	GI-QFOM	0.114 0	44	$6.922\ 56\times 10^{-9}$
		GI-QGMRES	0.208 9	59	$8.148\ 45\times 10^{-9}$
		GI-QQMR	0.035 6	39	$8.154\ 52\times 10^{-9}$
pde225	[225,5]	GI-QFOM	0.299 0	59	$4.802\ 04\times 10^{-9}$
		GI-QGMRES	0.437 0	78	$7.216\ 31\times 10^{-9}$
		GI-QQMR	0.059 9	55	$7.186\ 23\times 10^{-9}$
bfw398b	[398,4]	GI-QFOM	0.085 5	17	$2.928\ 13\times 10^{-10}$
		GI-QGMRES	0.075 3	17	$1.889\ 62\times 10^{-10}$
		GI-QQMR	0.038 5	12	$7.107\ 62\times 10^{-9}$
gre_512	[512,7]	GI-QFOM	0.209 8	29	$8.023\ 85\times 10^{-9}$
		GI-QGMRES	0.318 4	40	$8.712\ 36\times 10^{-9}$
		GI-QQMR	0.063 9	26	$9.851\ 45\times 10^{-9}$

5 结论

本文通过推广实数域上的非对称 Lanczos 方法,提出了四元数非对称 Lanczos 方法。进一步,建立了求解 Sylvester 四元数矩阵方程 $\mathbf{AX}+\mathbf{XB}=\mathbf{C}$ 的全局拟极小残量法。通过几个例子验证所提算法的有效性以及数值实验结果表明了该方法的可行性。

参考文献:

- [1] SUN Y F, CHEN S Y, YIN B C. Color face recognition based on quaternion matrix representation[J]. Pattern Recognition Letters, 2011, 32(4):597-605.
- [2] ZOU C M, KOU K I, WANG Y L. Quaternion collaborative and sparse representation with application to color face recognition [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2016, 25(7):3287-3302.
- [3] JIANG T S. An algorithm for quaternionic linear equations in quaternionic quantum theory[J]. Journal of Mathematical Physics, 2004, 45(11):4218-4222.
- [4] CHEN Y Y, XIAO X L, ZHOU Y C. Low-rank quaternion approximation for color image processing[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2019, 29:1426-1439.
- [5] LANCZOS C. Solution of systems of linear equations by minimized iterations[J]. Journal of Research of the National Bureau of Standards, 1952, 49(1):33-53.
- [6] SAAD Y. Practical use of some Krylov subspace methods for solving indefinite and nonsymmetric linear systems[J]. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 1984, 5(1):203-228.
- [7] SAAD Y, SCHULTZ M H. GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems[J]. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 1986, 7:856-869.
- [8] FREUND R W, NACHTIGAL N M. QMR: a quasi-minimal residual method for non-Hermitian linear systems[J]. Numerische Mathematik, 1991, 60(1):315-339.
- [9] JBILOU K, MESSAOUDI A, SADOK H. Global FOM and GMRES algorithms for matrix equations[J]. Applied Numerical Mathematics, 1999, 31(1):49-63.
- [10] LI S K, HUANG T Z. A shifted complex global Lanczos method and the quasi-minimal residual variant for the Stein-conjugate matrix equation $\mathbf{X}+\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B}=\mathbf{C}$ [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2019, 357:1-11.
- [11] JIA Z G, NG M K. Structure preserving quaternion generalized minimal residual method[J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 2021, 42(2):616-634.
- [12] LI T, WANG Q W. Structure preserving quaternion full orthogonalization method with applications[J]. Numerical Linear Algebra with Applications, 2023:e2495.