

# 带时滞项的二阶奇异摄动问题的自适应移动网格算法

许一诺<sup>1</sup>, 刘利斌<sup>1\*</sup>, 杨秀<sup>2</sup>

(1. 南宁师范大学广西应用数学中心, 广西 南宁 530100; 2. 山东大学数学与统计学院, 山东 威海 264209)

**摘要:** 研究一类带时滞项的二阶奇异摄动微分方程的自适应网格算法。首先, 通过积分变换, 得到一个带时滞项的一阶奇异摄动 Volterra 积分微分方程; 其次, 利用向后差分 and 左矩形公式, 在任意网格上构造一个一阶有限差分格式, 利用离散的 Grönwall 不等式, 给出离散格式的先验误差估计, 并基于网格等分布原理设计一个自适应移动网格算法, 在该自适应网格下, 证明离散格式为一阶一致收敛; 最后, 数值实验结果验证理论分析。

**关键词:** 奇异摄动; 时滞微分方程; 控制函数; 误差估计

**中图分类号:** O241 **文献标志码:** A

**引用格式:** 许一诺, 刘利斌, 杨秀. 带时滞项的二阶奇异摄动问题的自适应移动网格算法[J]. 山东大学学报(理学版), 2025, 60(12): 84-93.

## Adaptive moving grid method for a second-order singularly perturbed delay boundary value problem

XU Yinuo<sup>1</sup>, LIU Libin<sup>1\*</sup>, YANG Xiu<sup>2</sup>

(1. Center for Applied Mathematics of Guangxi, Nanning Normal University, Nanning 530100, Guangxi, China; 2. School of Mathematics and Statistics, Shandong University, Weihai 264209, Shandong, China)

**Abstract:** An adaptive grid algorithm for a second-order singularly perturbed delay boundary value problem is studied. Firstly, by integral transformation, the problem is rewritten into a first-order singularly perturbed delay Volterra integral differential equation. Secondly, a first-order finite difference format is constructed on an arbitrary mesh by using the backward difference and left rectangle formula. Using the discrete Grönwall inequality, a prior error estimation of the proposed discretization scheme is derived and an adaptive moving grid algorithm is designed based on the mesh equidistribution principle. It is proved that our proposed adaptive moving grid method is first-order uniformly convergent. Finally, some numerical results are given to support our presented theoretical result.

**Key words:** singularly perturbed; delay differential equation; monitor function; error estimation

## 0 引言

考虑如下带时滞项的二阶奇异摄动微分方程:

$$\begin{cases} Lu(t) := \varepsilon u''(t) + a(t)u'(t) + f(t, u(t), u(t-r)) = 0, & t \in I = (0, T], \\ u(t) = \varphi(t), & t \in I_0 = [-r, 0], \\ u(T) = A, \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $0 < \varepsilon \leq 1$  是摄动参数,  $a(t)$  和  $\varphi(t)$  是充分光滑的函数,  $A$  和  $r$  为常数。设  $f(t, u, v) \in C^1(\bar{I} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ ,  $\bar{I} = [0, T]$ , 那么存在 3 个常数  $\beta, c$  和  $\alpha$ , 使得

收稿日期: 2023-11-08; 网络出版时间: 2025-04-08 15:11:47

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(12361087); 广西科技计划项目(桂科 AD23023003); 广西研究生教育创新计划项目(JGY2024267)

第一作者: 许一诺(2000—), 女, 硕士研究生, 研究方向为微分方程数值解. E-mail: xyn897364770@163.com

\* 通信作者: 刘利斌(1982—), 男, 教授, 博士, 研究方向为微分方程数值解. E-mail: liulibin969@163.com

$$\left| \frac{\partial f}{\partial u} \right| \leq \beta, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial v} \right| \leq c, \quad a(t) \geq \alpha > 0.$$

众所周知,带时滞项的奇异摄动微分方程在生物学、环境、医学和物理学等科学领域被广泛应用<sup>[1-3]</sup>,例如,控制理论中的信号传递<sup>[4]</sup>,神经生物学<sup>[5-6]</sup>和其他模型问题等。这类方程的一个显著特点是最高阶导数乘以一个小的摄动参数  $\varepsilon$  并至少包含一个延迟项<sup>[1,7]</sup>。当  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,方程的精确解就可能具有边界层或内层,因此,针对该问题如何设计一种合适的数值方法非常重要。

文献[8-15]提出一些不同方法来解决不同网格上带时滞项的奇异摄动微分方程问题,并给出一致收敛的结果。特别地,针对带时滞项的二阶奇异摄动微分方程,最常见的两类方法:一是在均匀网格上构造特殊的差分格式;二是在边界层区域构造层适应网格。Amiraliyev 和 Cimen<sup>[16]</sup>在均匀网格上提出了一个指数拟合差分方案,并证明该方案在最大范数下是一阶一致收敛的。Das 和 Natesan<sup>[17]</sup>提出了一种混合差分格式,并推导了 Shishkin 网格上的一致收敛的误差估计。Chakravarthy 等<sup>[18]</sup>提出了均匀网格上的 3 次样条方法,数值例子表明该方法是一致收敛的。Vaid 和 Arora<sup>[19]</sup>提出了在均匀网格上关于一类带时滞项的二阶奇异摄动微分方程的 3 次 B 样条配置法,并证明了该方法对于带有不同边界层的数值例子来说都是二阶一致收敛的。Podila 和 Kumar<sup>[20]</sup>提出了一类关于均匀网格的新型有限差分方案,数值实验证明该方案适用于特殊网格并且是一阶均匀收敛的。Manikandan 等<sup>[21]</sup>在分段均匀的 Shishkin 网格上考虑了一个带时滞项的二阶奇异摄动微分方程,构造了经典的有限差分格式并证明该方法在最大范数下几乎是一阶收敛的。

在构造层适应网格(例如 Shishkin 网格和 Bakhvalov 网格<sup>[22-24]</sup>)时,需要事先知道精确解及其导数的有界性等,如果难以获得精确解的相关先验信息,则需要设计一种后验移动网格算法<sup>[25-26]</sup>。最近,Liu 等<sup>[27]</sup>研究了一种基于后验误差估计的自适应移动网格方法来求解带时滞项的非线性一阶奇异摄动 Volterra 积分微分方程。此外,作者还在文中指出该自适应移动网格算法可以扩展到一类带时滞项的二阶非线性奇异摄动微分方程。综上所述,受文献[27]的启发,本文将研究一种针对问题(1)的自适应移动网格方法。

注 1 在整篇文章中, $C$  表示一个与摄动参数  $\varepsilon$  和网格参数  $N$  都无关的正常数,且在不同的位置取不同的值。

## 1 连续问题

对方程(1)从 0 到  $t$  进行积分,得到如下带参数的一阶奇异摄动 Volterra 积分微分方程:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u(t) := \varepsilon u'(t) + a(t)u(t) + \int_0^t [f(s, u(s), u(s-r)) - a'(s)u(s)] ds = \lambda + a(0)\varphi(0), \\ u(t) = \varphi(t), \quad t \in I_0 = [-r, 0], \\ u(T) = A, \end{cases} \quad (2)$$

其中  $\lambda = \varepsilon u'(0)$ 。

为了方便后续的误差分析,先给出精确解  $u(t)$  及其导数的估计如下。

引理 1 设  $\{u(t), \lambda\}$  是问题(1)的精确解,存在与  $\varepsilon$  和  $N$  无关的常数,对于任意的  $0 \leq k \leq 2$  满足

$$|\lambda| \leq C_0, \quad (3)$$

$$\|u\|_{\infty} \leq C_1, \quad (4)$$

$$|u^{(k)}(t)| \leq C \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon^k} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} \right), \quad t \in (0, T], \quad (5)$$

其中

$$C_0 = C\varphi'(0),$$

$$C_1 = \left\{ |\varphi(0)| + C_0 + \alpha^{-1} \left( a(0)\varphi(0) + \|g\|_{\infty} + c \int_{-r}^0 |\varphi(t)| dt \right) \right\} \exp\left(\frac{\beta+c}{\alpha} t\right),$$

且

$$g(t) = \int_0^t f(s, 0, 0) ds.$$

证明 参见文献[27]引理 2.1 和文献[28]引理 1。

## 2 离散格式

设  $\bar{\Omega}_N \equiv \{0=t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N=T\}$  是区间  $\bar{I}$  上的任意非均匀网格, 网格步长为  $h_i = t_i - t_{i-1}$ ,  $i=1, 2, \dots, N$ 。在该网格下, 利用向后差分格式和左矩形公式分别近似问题(2)的一阶导数和积分项, 可得

$$\varepsilon D^- u(t_i) + a(t_i)u(t_i) + \Phi_i + R_i = \lambda + a(0)\varphi(0), \quad i=1, 2, \dots, N, \quad (6)$$

其中

$$\begin{cases} D^- u(t_i) = \frac{u(t_i) - u(t_{i-1})}{h_i}, & i=1, 2, \dots, N, \\ \Phi_i = \sum_{k=0}^{i-1} h_{k+1} [f(t_k, u(t_k), u(t_k-r)) - a'(t_k)u(t_k)], \\ R_i = R_i^{(1)} + R_i^{(2)} + R_i^{(3)}, \end{cases}$$

且

$$\begin{aligned} R_i^{(1)} &= -h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t-t_{i-1}) \frac{d}{dt} [a(t)u(t)] dt, \\ R_i^{(2)} &= -h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[ (t-t_{i-1}) \frac{d}{dt} \int_0^t [f(s, u(s), u(s-r)) - a'(s)u(s)] ds \right] dt, \\ R_i^{(3)} &= \sum_{j=1}^i \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left[ (t_j-s) \frac{d}{ds} [f(s, u(s), u(s-r)) - a'(s)u(s)] \right] ds. \end{aligned}$$

忽略方程(6)中的截断误差  $R_i$ , 可得方程(1)的离散格式:

$$\begin{cases} \mathcal{L}^N U_i := \varepsilon D^- U_i + a_i U_i + \Phi_i^N = \lambda^N + a(0)\varphi(0), & i=1, 2, \dots, N, \\ U_0 = \varphi(0), \quad U_N = A, \end{cases} \quad (7)$$

其中

$$\Phi_i^N = \sum_{k=0}^{i-1} h_{k+1} [f(t_k, U_k, U_{k-N_0}) - a'_k U_k],$$

且  $U_i$  和  $\lambda^N$  分别为  $u(t_i)$  和  $\lambda$  的数值解。

注2 在此, 假设存在一个正整数  $N_0$ , 使得  $U_{k-N_0}$  为精确解  $u(t_k-r)$  的数值解, 那么在实际计算中, 对于任意的网格点  $t_k$  ( $k=0, \dots, N$ ), 若  $t_k-r \leq 0$ , 则  $\varphi(t_k-r) = u(t_k-r)$ , 否则  $U_{k-N_0} = \tilde{U}(t_k-r)$ , 其中  $\tilde{U}(t)$  是网格节点  $(t_j, U_j)$  的分段二次插值函数。

引理2 对于  $i=1, 2, \dots, N$ , 截断误差  $R_i$  满足

$$|R_i| \leq C \max_{1 \leq i \leq N} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left( 1 + |u'(t)| + \left| \frac{d}{dt} [f(t, u(t), u(t-r)) - a'(t)u(t)] \right| \right) dt. \quad (8)$$

证明 参见文献[27]引理3.2。

引理3 设  $U_i$  是问题(7)的解, 那么它满足

$$\|U\|_\infty \leq \{ |\varphi(0)| + C\varphi'(0) + \alpha^{-1}(a(0)\varphi(0) + \max_{0 \leq k \leq N} |f(t_k, 0, 0)| + c \|\varphi\|_1 \} \exp\left(\frac{\beta+c}{\alpha} T\right). \quad (9)$$

证明 参见文献[27]引理3.1。

## 3 误差估计

对于  $i=1, 2, \dots, N$ , 令  $\mu := \lambda^N - \lambda$  和  $e_i = U_i - u(t_i)$ , 由方程(5)、(6)可得

$$\begin{cases} \mathcal{L}^N e_i = \mu + R_i, & i=1, 2, \dots, N-1, \\ e_0 = 0, \quad e_N = 0. \end{cases} \quad (10)$$

引理4 存在与  $\varepsilon$  和  $N$  无关的常数  $C$ , 对满足方程(10)的误差  $e_i$  和  $\mu$ , 有

$$\| e \|_{\infty} \leq C \| R \|_{\infty}, \tag{11}$$

$$|\mu| \leq C \| R \|_{\infty}. \tag{12}$$

证明 通过泰勒展开,方程(10)可写成如下形式

$$\varepsilon D^- e_i + a_i e_i + \Psi_i = \mu + R_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \tag{13}$$

其中

$$\Psi_i = \sum_{k=0}^{i-1} h_{k+1} [p(t_k) e_k + q(t_k) e_{k-N_0} - a'_k e_k],$$

且

$$p(t_k) = \frac{\partial f}{\partial u^*}(t_k, \xi^* U_k, \eta^* U_{k-N_0}) - \frac{\partial f}{\partial u}(t_k, \xi u(t_k), \eta u(t_k-r)), \quad 0 < \xi < 1, \quad 0 < \eta < 1,$$

$$q(t_k) = \frac{\partial f}{\partial v^*}(t_k, \xi^* U_k, \eta^* U_{k-N_0}) - \frac{\partial f}{\partial v}(t_k, \xi u(t_k), \eta u(t_k-r)), \quad 0 < \xi^* < 1, \quad 0 < \eta^* < 1.$$

进一步,将方程(13)改写成

$$e_i = \frac{\varepsilon h_i^{-1}}{a_i + \varepsilon h_i^{-1}} e_{i-1} + \frac{1}{a_i + \varepsilon h_i^{-1}} \mu - \frac{\Psi_i}{a_i + \varepsilon h_i^{-1}} + \frac{R_i}{a_i + \varepsilon h_i^{-1}}$$

$$= \mu \sum_{j=1}^i \frac{1}{a_j + \varepsilon h_j^{-1}} Q_{i-j} + \sum_{j=1}^i \frac{R_j}{a_j + \varepsilon h_j^{-1}} Q_{i-j} - \sum_{j=1}^i \frac{\Psi_j}{a_j + \varepsilon h_j^{-1}} Q_{i-j},$$

其中

$$Q_{i-j} = \begin{cases} 1, & j=i, \\ \prod_{k=j+1}^i \frac{\varepsilon h_k^{-1}}{a_k + \varepsilon h_k^{-1}}, & 1 \leq j \leq i-1. \end{cases}$$

同时,由  $e_0 = 0$  及  $e_N = 0$ ,可得

$$\mu = \frac{\sum_{j=1}^N \frac{\Psi_j}{a_j + \varepsilon h_j^{-1}} Q_{N-j}}{\sum_{j=1}^N \frac{1}{a_j + \varepsilon h_j^{-1}} Q_{N-j}} - \frac{\sum_{j=1}^N \frac{R_j}{a_j + \varepsilon h_j^{-1}} Q_{N-j}}{\sum_{j=1}^N \frac{1}{a_j + \varepsilon h_j^{-1}} Q_{N-j}}.$$

显然  $a_i + \varepsilon h_i^{-1} > 0 (1 \leq i \leq N)$ ,那么易得

$$|\mu| \leq \| R \|_{\infty} + \| \Psi \|_{\infty}$$

$$\leq \| R \|_{\infty} + \sum_{j=0}^{i-1} h_{j+1} |p(t_j) e_j + q(t_j) e_{j-N_0} - a'_j e_j|$$

$$\leq \| R \|_{\infty} + \sum_{j=1}^{i-1} h_{j+1} (|p(t_j)| + |a'_j|) |e_j| + \sum_{j=1}^{i-1} h_{j+1} |q(t_j)| |e_{j-N_0}|$$

$$\leq \| R \|_{\infty} + \sum_{j=1}^i h_j (|p(t_{j-1})| + |a'_{j-1}|) |e_{j-1}| + \sum_{j=1}^i h_j |q(t_{j-1})| |e_{j-N_0-1}|.$$

令  $j-N_0 = m$ ,则有

$$|\mu| \leq \| R \|_{\infty} + \sum_{j=1}^i h_j (|p(t_{j-1})| + |a'_{j-1}|) |e_{j-1}| + \sum_{m=1-N_0}^{i-N_0} h_{m+N_0} |q(t_{m+N_0-1})| |e_{m-1}|.$$

那么,对于任意的  $i$ ,有

(a)  $i \leq N_0$ ,

$$|\mu| \leq \| R \|_{\infty} + \sum_{j=1}^i h_j (|p(t_{j-1})| + |a'_{j-1}|) |e_{j-1}| + \sum_{m=1-N_0}^0 h_{m+N_0} |q(t_{m+N_0-1})| |e_{m-1}|$$

$$\leq \| R \|_{\infty} + \sum_{j=1}^i h_j (|p(t_{j-1})| + |a'_{j-1}|) |e_{j-1}|;$$

(b)  $i > N_0$ ,

$$|\mu| \leq \| R \|_{\infty} + \sum_{j=1}^i h_j (|p(t_{j-1})| + |a'_{j-1}|) |e_{j-1}| + \sum_{m=1}^i h_{m+N_0} |q(t_{m+N_0-1})| |e_{m-1}|$$

$$\leq \|R\|_{\infty} + \sum_{j=1}^i h_j (|p(t_{j-1})| + |q(t_{j-1})| + |a'_{j-1}|) |e_{j-1}|.$$

因此

$$|\mu| \leq \|R\|_{\infty} + \sum_{j=1}^i h_j (|p(t_{j-1})| + |q(t_{j-1})| + |a'_{j-1}|) |e_{j-1}|. \quad (14)$$

结合式(14),同理可得

$$\begin{aligned} |\mu + R_i - \Psi_i| &\leq |\mu| + \|R\|_{\infty} + \sum_{j=1}^{i-1} h_{j+1} |p(t_j) e_j + q(t_j) e_{j-N_0} - a'_j e_j| \\ &\leq C \|R\|_{\infty} + \sum_{j=1}^i h_j (|p(t_{j-1})| + |q(t_{j-1})| + |a'_{j-1}|) |e_{j-1}| \\ &\quad + \sum_{j=1}^{i-1} h_{j+1} (|p(t_j)| + |a'_j|) |e_j| + \sum_{j=1}^{i-1} h_{j+1} |q(t_j)| |e_{j-N_0}| \\ &\leq C \left[ \|R\|_{\infty} + \sum_{j=1}^i h_j (|p(t_{j-1})| + |q(t_{j-1})| + |a'_{j-1}|) |e_{j-1}| \right]. \end{aligned}$$

再利用文献[30]中的引理1,可以推出

$$|e_i| \leq C \left\{ \alpha^{-1} \|R\|_{\infty} + \alpha^{-1} \sum_{j=1}^i h_j (|p(t_{j-1})| + |q(t_{j-1})| + |a'_{j-1}|) |e_{j-1}| \right\}.$$

接着,由 Grönwall 不等式可得

$$|e_i| \leq C(\alpha^{-1} \|R\|_{\infty}) e^{\alpha^{-1} T}, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (15)$$

那么对于式(15),进一步可得

$$|\mu| \leq C(\alpha^{-1} \|R\|_{\infty}) e^{\alpha^{-1} T}. \quad (16)$$

最后,结合式(15)、(16)可以推出引理3的结论。

#### 4 网格等分布原理及自适应移动网格算法

构造自适应移动网格算法,就是要找到一组非均匀网格  $\bar{\Omega}_N = \{t_i\}_{i=0}^N$ ,使其满足等分布原理:

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} M(t) dt = \frac{1}{N} \int_0^T M(t) dt, \quad (17)$$

其中  $M(t)$  称为控制函数。基于引理2,可以选择如下控制函数:

$$M(t) = 1 + |u'(t)| + \left| \frac{d}{dt} [f(t, u(t), u(t-r)) - a'(t)u(t)] \right|. \quad (18)$$

**引理5** 对于给定的控制函数(18),设网格  $\bar{\Omega}_N = \{t_i\}_{i=0}^N$  满足等分布原理即式(17)。那么,对应的网格步长满足

$$h_i \leq CN^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (19)$$

**证明** 参见文献[29]引理3.2。

**引理6** 对于任意的  $i = 1, 2, \dots, N$ ,截断误差  $R_i$  满足

$$|R_i| \leq CN^{-1}. \quad (20)$$

**证明** 利用引理1、2,并结合等分布原理可以得到式(20)。

基于引理3、5,在自适应网格  $\bar{\Omega}_N = \{t_i\}_{i=0}^N$  上得到下列关于离散格式(7)一致收敛性结果。

**定理1** 设  $\{u(t), \lambda\}$  和  $\{U_i, \lambda^N\}$  分别是网格  $\bar{\Omega}_N = \{t_i\}_{i=0}^N$  上满足方程(6)和(7)的精确解和数值解。那么,存在如下收敛结果:

$$\|u - U\|_{\infty} \leq CN^{-1}, \quad (21)$$

$$|\lambda - \lambda^N| \leq CN^{-1}. \quad (22)$$

**证明** 结合引理3、6,并利用引理5可以得出定理1的结论。

考虑到在实际数值计算中,无法得到精确解的一阶导数,因此在后文计算中,对于任意的  $i=1,2,\dots,N$ ,基于文献[27]选择如下控制函数:

$$\tilde{M}_i = 1 + |D^- U_i| + \frac{\max_{t \in [t_{i-1}, t_i]} |(f(t, \tilde{U}(t), \tilde{U}(t-r)) - a'(t) \tilde{U}(t)) - (f(t_{i-1}, U_{i-1}, \tilde{U}(t_{i-1}-r)) - a'_{i-1} U_{i-1})|}{h_i},$$

其中,  $\tilde{U}(t) = U_i + D^- U_i(t-t_i)$ ,  $t \in [t_{i-1}, t_i]$ 。

为了寻找满足等分布原理的自适应移动网格  $\bar{\Omega}_N$  和计算相应的数值解  $U_i$ , 设计如下算法:

**步骤 1** 给定一个  $N$ , 选取步长为  $\frac{1}{N}$  的初始网格  $\{t_i\}_{i=0}^N$ 。

**步骤 2** 设  $\bar{\Omega}_N^{(k)} = \{t_i^{(k)}\}_{i=0}^N$  且定义  $h_i^{(k)} = t_i^{(k)} - t_{i-1}^{(k)}$  ( $i=1,2,\dots,N$ ) 为网格步长, 并在此网格上计算相应的数值解  $\{U_i^{N,(k)}\}$ 。令  $\Gamma_0^{(k)} = 0$ , 且

$$\Gamma_j^{(k)} = \sum_{i=1}^j h_i^{(k)} \tilde{M}_i^{(k)}, \quad j=1,2,\dots,N,$$

其中,  $\tilde{M}_i^{(k)}$  ( $k=0,1,\dots$ ) 是当前网格中第  $i$  个内部节点计算出的控制函数的值。

**步骤 3** 设  $\tilde{\Gamma}^{(k)}(t)$  是通过节点  $(t_i^{(k)}, \Gamma_i^{(k)})$  得到的分段线性插值函数。对于任意的  $i=1,2,\dots,N$ , 计算出每个节点之间的距离

$$l_i^{(k)} = \sqrt{(h_i^{(k)})^2 + (\Gamma_i^{(k)} - \Gamma_{i-1}^{(k)})^2},$$

以及分段线性函数  $\tilde{\Gamma}^{(k)}(t)$  的总弧长

$$L^{(k)} = \sum_i l_i^{(k)} = \sum_i \sqrt{(h_i^{(k)})^2 + (\Gamma_i^{(k)} - \Gamma_{i-1}^{(k)})^2}.$$

**步骤 4** 设  $C_0 > 1$  为给定的常量, 若

$$\max_{1 \leq i \leq N} \frac{l_i^{(k)}}{L^{(k)}} \leq \frac{C_0}{N}$$

成立, 则跳转到步骤 6, 否则继续进行步骤 5。

**步骤 5** 为了选取新的网格  $\bar{\Omega}_N^{(k+1)} = \{t_i^{(k+1)}\}_{i=0}^N$ , 按照如下公式等分  $\tilde{\Gamma}^{(k)}(t)$  的弧长

$$\int_{t_{i-1}^{(k+1)}}^{t_i^{(k+1)}} \tilde{\Gamma}^{(k)}(t) dt = \frac{L^{(k)}}{N}, \quad i=1,2,\dots,N,$$

并返回步骤 2。

**步骤 6** 将  $\{t_0^*, t_1^*, \dots, t_N^*\} = \{t_i^{(k+1)}\}$  作为最后的计算网格,  $U_i^* = U_i^{N,(k+1)}$  作为相应的数值解, 最后算法迭代终止。

## 5 数值实验

为了说明所提出自适应移动网格算法的有效性, 在第 5.1 节中给出迭代算法近似求解参数  $\lambda$ 。在第 5.2 节中分别考虑了线性和非线性的带时滞项的二阶奇异摄动微分方程。对于下文所有的数值实验, 选取  $C_0 = 1.5$ 。

### 5.1 迭代算法

利用如下迭代算法来求解参数  $\lambda$

$$\lambda^{(n)} = \lambda^{(n-1)} - \frac{F^{(n-1)} - \varepsilon \frac{A - U_{N-1}^{(n)}}{h_N} - a_N A - \sum_{j=0}^{N-1} h_{j+1} [f(t_j, U_j^{(n)}, U_{j-N_0}^{(n)}) - a'_j U_j^{(n)}]}{\frac{\partial F^{(n-1)}}{\partial \lambda}},$$

其中,  $F^{(n-1)} = \lambda^{(n-1)} + a_0 U_0$  ( $n=1,2,\dots$ ), 且在实际计算中选取初始值  $\lambda^{(0)} = 0.01$ 。

## 5.2 数值例子

例 1 考虑如下问题:

$$\begin{cases} \varepsilon u''(t) + 1.5u'(t) + 0.25u(t-1) = 0.25(t-1), & t \in (0, 1.5), \\ u(t) = t, & -1 \leq t \leq 0, \\ u(1.5) = 2. \end{cases} \quad (23)$$

由于难以得到关于问题(23)的精确解,因此计算数值解以及参数  $\lambda$  的绝对误差和收敛阶时,使用以下公式:

$$E_\varepsilon^N = \max_{0 \leq i \leq N} |U_i^N - \tilde{U}_i^{2N}|, \quad r_\varepsilon^N = \log_2 \left( \frac{E_\varepsilon^N}{E_\varepsilon^{2N}} \right), \quad (24)$$

$$E_\lambda^N = \max_{0 \leq i \leq N} |\lambda^N - \lambda^{2N}|, \quad r_\lambda^N = \log_2 \left( \frac{E_\lambda^N}{E_\lambda^{2N}} \right). \quad (25)$$

当分别取  $\varepsilon = 2^{-2k}$  ( $k=2, 3, \dots, 6$ ),  $N = 2^j$  ( $j=6, 7, \dots, 10$ ) 时,例 1 使用上文自适应移动网格算法得到的误差以及收敛阶的数据结果如表 1 和表 2 所示。通过表 1 和表 2 的数据来看,提出的数值方法能够达到一阶收敛,可以验证本文自适应移动网格算法的有效性。

表 1 例 1 的误差  $e_u^{\varepsilon, N}$  和收敛阶  
Table 1 Error  $e_u^{\varepsilon, N}$  and convergence rates for Example 1

| $\varepsilon$ | $N$                   |                       |                       |                       |                       |
|---------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
|               | 64                    | 128                   | 256                   | 512                   | 1 024                 |
| $10^{-4}$     | $1.79 \times 10^{-2}$ | $7.40 \times 10^{-3}$ | $3.50 \times 10^{-3}$ | $1.80 \times 10^{-3}$ | $9.74 \times 10^{-4}$ |
|               | 1.27                  | 1.08                  | 0.96                  | 0.89                  |                       |
| $10^{-6}$     | 1.97                  | $7.20 \times 10^{-3}$ | $3.50 \times 10^{-3}$ | $1.90 \times 10^{-3}$ | $1.00 \times 10^{-3}$ |
|               | 1.45                  | 1.04                  | 0.88                  | 0.93                  |                       |
| $10^{-8}$     | $2.04 \times 10^{-2}$ | $7.10 \times 10^{-3}$ | $3.50 \times 10^{-3}$ | $1.90 \times 10^{-3}$ | $9.69 \times 10^{-4}$ |
|               | 1.52                  | 1.02                  | 0.88                  | 0.97                  |                       |
| $10^{-10}$    | $2.04 \times 10^{-2}$ | $7.00 \times 10^{-3}$ | $3.50 \times 10^{-3}$ | $2.00 \times 10^{-3}$ | $1.20 \times 10^{-3}$ |
|               | 1.54                  | 1.00                  | 0.81                  | 0.74                  |                       |
| $10^{-12}$    | $2.04 \times 10^{-2}$ | $6.90 \times 10^{-3}$ | $3.50 \times 10^{-3}$ | $1.80 \times 10^{-3}$ | $1.30 \times 10^{-3}$ |
|               | 1.56                  | 0.98                  | 0.96                  | 0.47                  |                       |

表 2 例 1 的误差  $e_\lambda^{\varepsilon, N}$  和收敛阶  
Table 2 Error  $e_\lambda^{\varepsilon, N}$  and convergence rates for Example 1

| $\varepsilon$ | $N$                   |                       |                       |                       |                       |
|---------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
|               | 64                    | 128                   | 256                   | 512                   | 1 024                 |
| $10^{-4}$     | $8.24 \times 10^{-2}$ | $4.47 \times 10^{-2}$ | $2.53 \times 10^{-2}$ | $9.60 \times 10^{-3}$ | $4.30 \times 10^{-3}$ |
|               | 0.88                  | 0.82                  | 1.40                  | 1.16                  |                       |
| $10^{-6}$     | $1.16 \times 10^{-1}$ | $3.57 \times 10^{-2}$ | $2.34 \times 10^{-2}$ | $8.90 \times 10^{-3}$ | $4.20 \times 10^{-3}$ |
|               | 1.70                  | 0.61                  | 1.39                  | 1.08                  |                       |
| $10^{-8}$     | $7.09 \times 10^{-2}$ | $3.71 \times 10^{-2}$ | $2.19 \times 10^{-2}$ | $8.50 \times 10^{-3}$ | $4.00 \times 10^{-3}$ |
|               | 0.93                  | 0.76                  | 1.37                  | 1.08                  |                       |
| $10^{-10}$    | $8.14 \times 10^{-2}$ | $3.92 \times 10^{-2}$ | $2.07 \times 10^{-2}$ | $8.40 \times 10^{-3}$ | $4.70 \times 10^{-3}$ |
|               | 1.05                  | 0.92                  | 1.30                  | 0.84                  |                       |
| $10^{-12}$    | $1.14 \times 10^{-1}$ | $4.25 \times 10^{-2}$ | $1.98 \times 10^{-2}$ | $8.60 \times 10^{-3}$ | $4.30 \times 10^{-3}$ |
|               | 1.42                  | 1.10                  | 1.20                  | 1.00                  |                       |

除此之外,当取定  $\varepsilon = 10^{-4}$  和  $N = 64$ ,图 1 表示此时的数值解,图 2 表示此时自适应移动网格算法的连续迭代变化。从图 1 和图 2 可以看出,例 1 的数值解在  $t = 0$  处有一个边界层,并且在  $t = 1$  处有一个转折点。

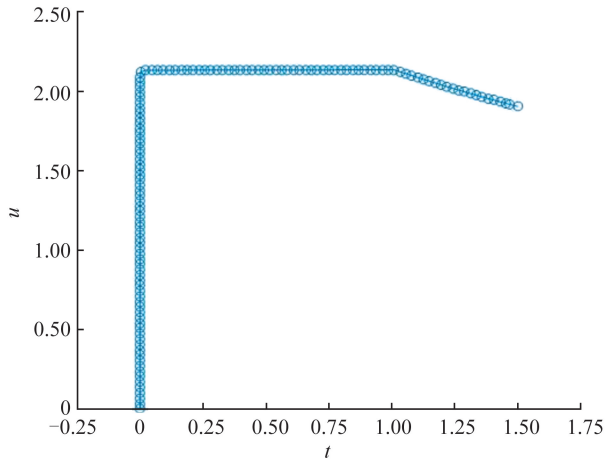


图 1 例 1 的数值解

Fig.1 Numerical solution for Example 1

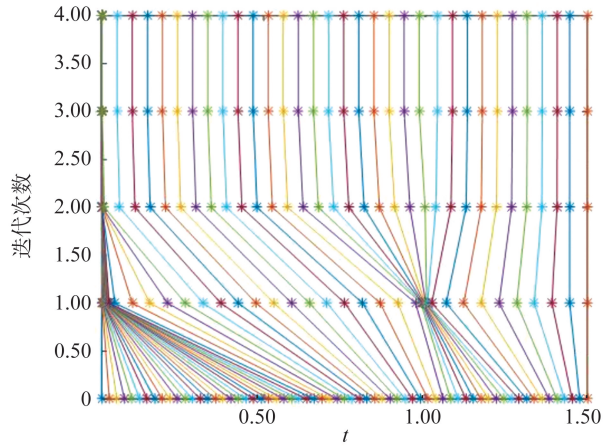


图 2 例 1 自适应移动网格的迭代演变

Fig.2 Evolution of adaptive moving mesh for Example 1

例 2 考虑如下非线性问题:

$$\begin{cases} \varepsilon u''(t) + u'(t) + \tanh(u(t)) - e^{-u(t-1)} = 1 - t^2, & t \in (0, 2), \\ u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}t^2, & -1 \leq t \leq 0, \\ u(2) = 3. \end{cases} \quad (26)$$

同样地,由于例 2 的精确解也难以得到,因此继续使用式(24)、(25)来计算相应的误差和收敛阶。

分别取  $\varepsilon = 2^{-2k}$  ( $k = 2, 3, \dots, 6$ ),  $N = 2^j$  ( $j = 6, 7, \dots, 10$ ) 时,例 2 通过自适应移动网格算法得到的误差以及收敛阶,见表 3 和表 4。数据结果显示,所提出的离散格式在自适应移动网格上达到一阶收敛,验证了该方法的有效性。

表 3 例 2 的误差  $e_u^{\varepsilon, N}$  和收敛阶  
Table 3 Error  $e_u^{\varepsilon, N}$  and convergence rates for Example 2

| $\varepsilon$ | $N$                   |                       |                       |                       |                       |
|---------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
|               | 64                    | 128                   | 256                   | 512                   | 1 024                 |
| $10^{-4}$     | $1.59 \times 10^{-2}$ | $8.62 \times 10^{-3}$ | $4.86 \times 10^{-3}$ | $2.64 \times 10^{-3}$ | $1.35 \times 10^{-3}$ |
|               | 0.89                  | 0.83                  | 0.88                  | 0.97                  |                       |
| $10^{-6}$     | $1.66 \times 10^{-2}$ | $8.43 \times 10^{-3}$ | $4.40 \times 10^{-3}$ | $2.44 \times 10^{-3}$ | $1.18 \times 10^{-3}$ |
|               | 0.98                  | 0.94                  | 0.85                  | 1.05                  |                       |
| $10^{-8}$     | $1.66 \times 10^{-2}$ | $8.79 \times 10^{-3}$ | $4.72 \times 10^{-3}$ | $2.43 \times 10^{-3}$ | $1.19 \times 10^{-3}$ |
|               | 0.91                  | 0.90                  | 0.96                  | 1.03                  |                       |
| $10^{-10}$    | $1.63 \times 10^{-2}$ | $8.45 \times 10^{-3}$ | $4.65 \times 10^{-3}$ | $2.42 \times 10^{-3}$ | $1.21 \times 10^{-3}$ |
|               | 0.95                  | 0.86                  | 0.94                  | 1.01                  |                       |
| $10^{-12}$    | $1.57 \times 10^{-2}$ | $8.45 \times 10^{-3}$ | $4.42 \times 10^{-3}$ | $2.42 \times 10^{-3}$ | $1.22 \times 10^{-3}$ |
|               | 0.89                  | 0.93                  | 0.89                  | 0.97                  |                       |

表 4 例 2 的误差  $e_\lambda^{\varepsilon, N}$  和收敛阶  
Table 4 Error  $e_\lambda^{\varepsilon, N}$  and convergence rates for Example 2

| $\varepsilon$ | $N$                   |                       |                       |                       |                       |
|---------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
|               | 64                    | 128                   | 256                   | 512                   | 1 024                 |
| $10^{-4}$     | $5.49 \times 10^{-2}$ | $3.09 \times 10^{-2}$ | $1.17 \times 10^{-2}$ | $5.76 \times 10^{-3}$ | $3.38 \times 10^{-3}$ |
|               | 0.83                  | 1.40                  | 1.02                  | 0.77                  |                       |
| $10^{-6}$     | $4.39 \times 10^{-2}$ | $2.49 \times 10^{-2}$ | $1.28 \times 10^{-2}$ | $5.44 \times 10^{-3}$ | $3.00 \times 10^{-3}$ |
|               | 0.82                  | 0.96                  | 1.24                  | 0.86                  |                       |
| $10^{-8}$     | $4.51 \times 10^{-2}$ | $2.25 \times 10^{-2}$ | $1.09 \times 10^{-2}$ | $5.47 \times 10^{-3}$ | $2.92 \times 10^{-3}$ |
|               | 1.00                  | 1.05                  | 0.99                  | 0.90                  |                       |
| $10^{-10}$    | $4.69 \times 10^{-2}$ | $2.92 \times 10^{-2}$ | $1.13 \times 10^{-2}$ | $5.53 \times 10^{-3}$ | $2.88 \times 10^{-3}$ |
|               | 0.68                  | 1.37                  | 1.03                  | 0.94                  |                       |
| $10^{-12}$    | $4.94 \times 10^{-2}$ | $2.42 \times 10^{-2}$ | $1.25 \times 10^{-2}$ | $5.62 \times 10^{-3}$ | $2.83 \times 10^{-3}$ |
|               | 1.03                  | 0.95                  | 1.15                  | 0.99                  |                       |

此外,当取定  $\varepsilon=10^{-4}$  和  $N=64$  时,例 2 的数值解以及自适应移动网格的变化过程如图 3 和图 4 所示。可以看出,例 2 的数值解在  $t=0$  处有一个边界层,并且在  $t=1$  处有一个转折点。

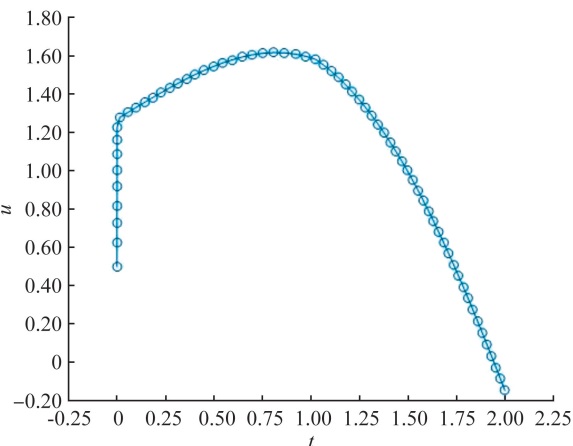


图 3 例 2 的数值解

Fig.3 Numerical solution for Example 2

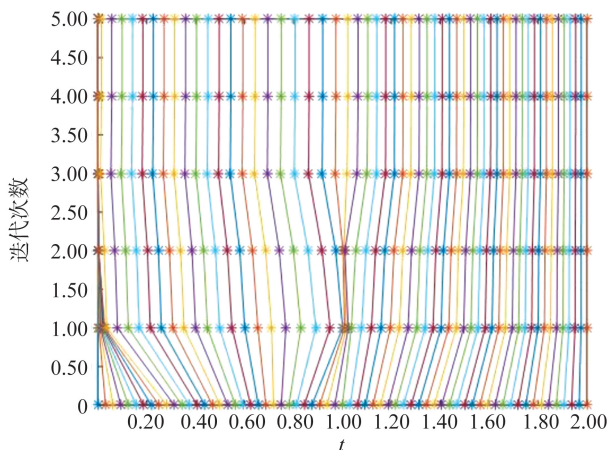


图 4 例 2 自适应移动网格的迭代演变

Fig.4 Evolution of adaptive moving mesh for Example 2

## 6 结论

本文主要分析了带时滞项的二阶奇异摄动问题。通过对方程进行积分变换,将其转化为一个带有时滞项的具有一个新参数的的一阶奇异摄动 Volterra 积分微分方程,提出了一种基于误差估计和等分布原理的自适应移动网格算法。数值结果表明,所提出的离散格式在最大范数下对于摄动参数以及新参数都是一阶一致收敛的。

### 参考文献:

- [1] BELLMAN R, COOKE K L. Differential-difference equations[M]. New York: Academic Press, 1963:155-171.
- [2] DRIVER R D. Ordinary and Delay Differential Equations[M]. New York: Springer, 1977.
- [3] BELLEN A, ZENNARO M. Numerical methods for delay differential equations[M]. Oxford: Clarendon Press, 2003.
- [4] ÉL'SGOL'TS L É. Qualitative methods in mathematical analysis[M]. Providence: American Mathematical Society, 1964.
- [5] STEIN R B. A theoretical analysis of neuronal variability[J]. Biophysical Journal, 1965, 5(2):173-194.
- [6] TUCKWELL H C. On the first-exit time problem for temporally homogeneous Markov processes[J]. Journal of Applied Probability, 1976, 13(1):39-48.
- [7] MCCARTIN B J. Exponential fitting of the delayed recruitment/renewal equation[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2001, 136(1/2):343-356.
- [8] AMIRALIYEV G M, ERDOGAN F. Uniform numerical method for singularly perturbed delay differential equations[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2007, 53(8):1251-1259.
- [9] ERDOGAN F. An exponentially fitted method for singularly perturbed delay differential equations[J]. Advances in Difference Equations, 2009, (1):781579.
- [10] AMIRALIYEVA I G, ERDOGAN F, AMIRALIYEV G M. A uniform numerical method for dealing with a singularly perturbed delay initial value problem[J]. Applied Mathematics Letters, 2010, 23(10):1221-1225.
- [11] KADALBAJOO M K, SHARMA K K. Numerical treatment of boundary value problems for second order singularly perturbed delay differential equations[J]. Comput Appl Math, 2005, 24(2):151-172.
- [12] KADALBAJOO M K, SHARMA K K. A numerical method based on finite difference for boundary value problems for singularly perturbed delay differential equations[J]. Applied Mathematics and Computation, 2008, 197(2):692-707.
- [13] KADALBAJOO M K, GUPTA V. A parameter uniform B-spline collocation method for solving singularly perturbed turning point problem having twin boundary layers[J]. International Journal of Computer Mathematics, 2010, 87(14):3218-3235.
- [14] RAI P, SHARMA K K. Numerical analysis of singularly perturbed delay differential turning point problem[J]. Applied Mathematics and Computation, 2011, 218(7):3483-3498.

- [15] PODILA R C, GUPTA T, RAO N. A numerical scheme for singularly perturbed delay differential equations of convection-diffusion type on an adaptive grid[J]. *Mathematical Modelling and Analysis*, 2018, 23(4):686-698.
- [16] AMIRALIYEV G M, CIMEN E. Numerical method for a singularly perturbed convection-diffusion problem with delay[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2010, 216(8):2351-2359.
- [17] DAS A, NATESAN S. Uniformly convergent hybrid numerical scheme for singularly perturbed delay parabolic convection-diffusion problems on Shishkin mesh[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2015, 271:168-186.
- [18] PRAMOD CHAKRAVARTHY P, DINESH KUMAR S, NAGESHWAR RAO R. Numerical solution of second order singularly perturbed delay differential equations via cubic spline in tension [J]. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 2017, 3(3):1703-1717.
- [19] VAID M K, ARORA G. Solution of second order singular perturbed delay differential equation using trigonometric B-spline[J]. *International Journal of Mathematical, Engineering and Management Sciences*, 2019, 4(2):349-360.
- [20] PODILA P C, KUMAR K. A class of finite difference schemes for singularly perturbed delay differential equations of second order[J]. *Turkish Journal of Mathematics*, 2019, 43(3):1061-1079.
- [21] MANIKANDAN M, SHIVARANJANI N, MILLER J J H, et al. A parameter-uniform numerical method for a boundary value problem for a singularly perturbed delay differential equation[M] // *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*. Cham: Springer, 2014:71-88.
- [22] DOOLAN E R, MILLER J J H, SCHILDERS W H A. Uniform numerical methods for problems with initial and boundary layers[M]. Dublin: Boole Press, 1980.
- [23] FARRELL P, HEGARTY A, MIUER J M, et al. Robust computational techniques for boundary layers[M]. New York: Chapman & Hall/CRC, 2000:37-55.
- [24] MILLER J H, O'RIORDAN E, SHISHKIN G I. Fitted numerical methods for singular perturbation problems[M]. Singapore: World Scientific Press, 1996:11-24.
- [25] KOPTEVA N. Maximum norm a posteriori error estimates for a one-dimensional convection-diffusion problem[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2001, 39(2):423-441.
- [26] KOPTEVA N, STYNES M. A robust adaptive method for a quasi-linear one-dimensional convection-diffusion problem[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2001, 39(4):1446-1467.
- [27] LIU L B, CHEN Y P, LIANG Y. Numerical analysis of a nonlinear singularly perturbed delay Volterra integro-differential equation on an adaptive grid[J]. *Journal of Computational Mathematics*, 2022, 40(2):258-274.
- [28] YAPMAN Ö, KUDU M, AMIRALIYEV G M. Method of exact difference schemes for the numerical solution of parameterized singularly perturbed problem[J]. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 2023, 20(3):146.
- [29] LONG G Q, LIU L B, HUANG Z T. Richardson extrapolation method on an adaptive grid for singularly perturbed Volterra integro-differential equations[J]. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 2021, 42(7):739-757.
- [30] YAPMAN Ö, AMIRALIYEV G M, AMIRALI I. Convergence analysis of fitted numerical method for a singularly perturbed nonlinear Volterra integro-differential equation with delay[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2019, 355:301-309.

(编辑:胡春燕)