

二维非线性对流扩散方程基于梯度重构的自适应有限元方法

苗菁菁,孙同军*

(山东大学数学学院,山东 济南 250100)

摘要:对一类二维非线性对流扩散方程提出一种自适应有限元方法。采用特征线法处理方程对流项,有效解决因对流占优性而产生的数值震荡和数值弥散等问题。设计了一种基于梯度重构型后验误差估计的自适应有限元算法,在标准有限元方法的基础上进一步调整网格、提高精度。最后进行数值实验,验证方法的有效性。

关键词:非线性对流扩散方程;特征线法;梯度重构;自适应有限元方法

中图分类号:O241 **文献标志码:**A

引用格式:苗菁菁,孙同军.二维非线性对流扩散方程基于梯度重构的自适应有限元方法[J].山东大学学报(理学版),2026,61(2):1-9.

Adaptive finite element method for two-dimensional nonlinear convection-diffusion equations based on gradient reconstruction

MIAO Jingjing, SUN Tongjun*

(School of Mathematics, Shandong University, Jinan 250100, Shandong, China)

Abstract: An adaptive finite element method is proposed for a class of two-dimensional nonlinear convection-diffusion equations. The characteristic method is used to deal with the convection term of the equation, and the numerical oscillation and numerical dispersion caused by the convection dominant are effectively solved. An adaptive finite element algorithm based on a posterior error estimates of gradient reconstruction type is designed to further adjust the mesh and improve the precision on the basis of standard finite element method. Finally, numerical experiments are carried out to verify the effectiveness of the proposed method.

Key words: the nonlinear convection-diffusion equation; the characteristic method; gradient reconstruction; adaptive finite element method

0 引言

对流扩散方程作为偏微分方程中的重要模型,对于解决许多实际问题有着非常重要的意义,如多孔介质中多层流体运动、地下水蓄水层多孔介质中的溶质迁移、油藏开采等。自适应有限元方法的系统理论与数值方法可参考文献[1-2]。有很多文章研究对流扩散方程的数值方法,但研究二维非线性对流扩散方程基于梯度重构型后验误差估计的自适应有限元方法的文章还比较少。

在本文中,考虑二维非线性对流扩散方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c - \nabla \cdot (D \nabla c) = f, & (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T], \\ D \nabla c \cdot \mathbf{n} = 0, & \mathbf{x} \in \partial \Omega, t \in (0, T], \\ c(\mathbf{x}, 0) = c_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega. \end{cases} \quad (1)$$

其中, Ω 为 \mathbf{R}^2 上的有界区域, \mathbf{n} 为 $\partial \Omega$ 的单位外法向量, c 为物质浓度, \mathbf{u} 为流体速度, D 为扩散系数,本文只考虑分子扩散的情况,故取 D 为常数, $f=f(\mathbf{x}, t, c)$ 为给定非线性函数。

收稿日期:2024-04-02;网络出版时间:2025-06-04

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11871312);山东省自然科学基金资助项目(ZR2023MA086)

第一作者:苗菁菁(2001—),女,硕士研究生,研究方向为偏微分方程最优控制问题的数值解法。E-mail:202311824@mail.sdu.edu.cn

*通信作者:孙同军(1970—),男,教授,博士生导师,博士,研究方向为偏微分方程最优控制问题的数值解法。E-mail:tjsun@sdu.edu.cn

自适应有限元方法由 Babuška 提出^[1],在解决科学计算和工程问题方面有显著成效。对于某些问题的解存在奇性时,使用有限元方法求解时数值解精度往往较低,而自适应有限元方法在常规有限元方法的基础上,增加了后验误差估计和网格自适应调整的过程,能在奇性解的区域进行局部网格加密,在保证较高精度数值解的同时尽可能减少计算量和求解时间。

标准的自适应有限元方法一般包括求解、误差估计、标记和网格调整 4 个步骤。其中后验误差估计是根据数值解和已知数据来估计误差,以此来调整网格,使得新网格上近似解的误差尽可能均匀分布,数值解尽可能收敛到近似解^[1-2]。

在物理过程中,与对流相比,当扩散现象比较微弱时,方程(1)的对流项占主导地位,即存在对流占优,在数学模型中表现为扩散系数 D 远小于流体速度 u 。此时采用标准有限元法求解将出现数值震荡和数值弥散等问题,而特征线法^[3]就是解决上述问题的一类重要方法,考虑沿特征线方向的离散,处理原方程使其形式上不含对流项,能够有效增强稳定性,得到效果较好的数值解。文献[4]构造了向前追踪的特征线方法(method of characteristic, MOC),虽然这类方法较容易实现,但会扭曲原有空间网格,导致计算难度增大。Douglas 等^[5]提出了沿特征线向后追踪的修正特征线法(modified method of characteristic, MMOC),克服了原有特征线法的缺点,得到了广泛的应用,如将特征线法与有限元、差分法等方法结合来处理多孔介质混溶驱动问题^[6],运用 MMOC 求解对流扩散方程^[7]。但是该方法并不能满足质量守恒,于是 Douglas 等^[8]又构造了校正对流项的特征线法(modified method of characteristic with adjusted advection, MMOC AA)。

1 模型描述

本文将采用 Lebesgue 空间和 Sobolev 空间的标准记号^[9]。应用特征线法处理方程(1),令 $\psi = \psi(\mathbf{x}, t) = \sqrt{1 + |\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|^2}$, $\tau = \tau(\mathbf{x}, t)$ 表示与算子 $\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c$ 相伴的特征方向,则沿特征方向的导数可以写成

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{1}{\psi} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right),$$

故方程(1)的第一式可以转化为特征形式

$$\psi(\mathbf{x}, t) \frac{\partial c}{\partial t} - \nabla \cdot (D \nabla c) = f, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T]. \quad (2)$$

记无限维空间

$$\begin{aligned} H^1(\Omega) &= \{v \mid v \in L^2(\Omega), v' \in L^2(\Omega)\}, \\ H_0^1(\Omega) &= \{v \mid v \in H^1(\Omega), v|_{\partial\Omega} = 0\}, \end{aligned}$$

定义函数内积

$$(f, g) = \int_{\Omega} fg dx,$$

则方程(2)的变分形式为:对每个固定的 t , 求 $c \in H^1(\Omega)$, 使得

$$\begin{cases} \left(\psi(\mathbf{x}, t) \frac{\partial c}{\partial \tau}, v \right) + (D \nabla c, \nabla v) = (f, v), & v \in H_0^1(\Omega), \\ c(\mathbf{x}, 0) = c_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega. \end{cases} \quad (3)$$

对时间段 $(0, T)$ 进行等距剖分: $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$, 时间步长 $\Delta t = T/N$, $t^n = n\Delta t$ ($n = 0, 1, \dots, N$)。在时刻 $t = t^n$ 处采用向后差商来逼近特征方向导数, 则有

$$\left(\psi \frac{\partial c}{\partial \tau} \right)^n \approx \psi(\mathbf{x}, t^n) \frac{c(\mathbf{x}, t^n) - c(\bar{\mathbf{x}}, t^n - 1)}{\sqrt{(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^2 + (\Delta t)^2}} = \psi(\mathbf{x}, t^n) \frac{c(\mathbf{x}, t^n) - c(\bar{\mathbf{x}}, t^n - 1)}{\sqrt{(\mathbf{u}^n \Delta t)^2 + (\Delta t)^2}} = \frac{c(\mathbf{x}, t^n) - c(\bar{\mathbf{x}}, t^n - 1)}{\Delta t},$$

其中, $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{u}^n \Delta t$ 为经过第 n 时间层 \mathbf{x} 处的特征线与第 $n-1$ 时间层的交点^[10]。

对区域 Ω 进行三角剖分, 记为 \mathcal{T}_h , 记任意一个三角形剖分单元为 K , 单元 K 的直径为 h_K , 网格尺寸 $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$, 假设这种剖分是正则的。记 U_h 为由定义在 Ω 上分片线性函数组成的有限维空间

$$U_h = \{v \in H_0^1(\Omega) : v|_K \in P_1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\},$$

其中 $P_1(K)$ 表示剖分单元 K 上次数不超过 1 的多项式集合。

若已知 $t=t^{n-1}$ 时刻的数值解 $c_h^{n-1} \in U_h$, 需要求解下一时刻的数值解 c_h^n , 为了简化计算, 这里对 f 进行显式化处理, 于是方程 (1) 的特征有限元格式定义如下: 对于 $n=0, 1, \dots, N$, 求解 $c_h^n \in U_h$, 使得

$$\begin{cases} \left(\frac{c_h^n - \bar{c}_h^{n-1}}{\Delta t}, v \right) + (D\nabla c_h^n, \nabla v) = (f_h^{n-1}, v), & \forall v \in U_h, \\ (c_h^n - c_0, v) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

其中, $c_h^n = c_h(\mathbf{x}, t^n)$, $\bar{c}_h^{n-1} = c_h^{n-1}(\bar{\mathbf{x}}, t^{n-1})$, $f_h^{n-1} = f(\mathbf{x}, t^{n-1}, c_h^{n-1})$ 。整理可得

$$\begin{cases} (c_h^n, v) + \Delta t (D\nabla c_h^n, \nabla v) = \Delta t (f_h^{n-1}, v) + (\bar{c}_h^{n-1}, v), & \forall v \in U_h, \\ (c_h^n - c_0, v) = 0, \end{cases} \quad (5)$$

利用 c_0 在 U_h 中的近似可以得到 c_h^0 , 则方程 (5) 的解就可以唯一确定。

由于可能出现 $\bar{\mathbf{x}} \notin \Omega$ 的情况, 做如下延拓处理^[11]。记 \mathbf{x} 到 $\partial\Omega$ 上的投影算子 $F: \Omega \rightarrow \partial\Omega$, $\bar{\mathbf{x}}$ 是关于 $F(\bar{\mathbf{x}})$ 的对称点, 令

$$\bar{c}_h^{n-1} = \begin{cases} c_h^{n-1}(\bar{\mathbf{x}}), & \bar{\mathbf{x}} \in \Omega, \\ 2c_h^{n-1}(F(\bar{\mathbf{x}})) - c_h^{n-1}(\mathbf{x}_s), & \bar{\mathbf{x}} \notin \Omega, \end{cases}$$

对于 $\mathbf{x} \in \Omega$, 若 $\bar{\mathbf{x}} \notin \Omega$, 当 Δt 充分小时, 总有 $\bar{\mathbf{x}}_s \in \Omega$, 故该延拓是合理的。

2 基于梯度重构的自适应有限元方法

上一章已对方程进行了离散, 得到特征有限元格式, 求解就能得到初始网格上的数值解, 故接下来介绍其他 3 个步骤, 在空间上进行自适应。

2.1 后验误差估计

讨论重构型后验误差估计中的一种方法——梯度重构法。梯度重构是通过某种后处理方法, 根据有限元解重新构造有限元梯度逼近, 以此来代替精确解的梯度, 从而使得数值解精度更高。这种方法不仅可以得到好的梯度逼近, 还可以获得好的后验误差估计。

分别记 $\mathcal{N}, \mathcal{N}_h$ 为剖分 \mathcal{T}_h 和单元 $K \in \mathcal{T}_h$ 中所有顶点的集合。重构空间为 $W_h = U_h \times U_h$, 重构后的梯度记为 $R_h c_h$, 其中 $R_h: U_h \rightarrow W_h$ 表示重构算子, 只需确定 $R_h c_h$ 在节点处的值, 便可得到重构的梯度为

$$R_h c_h = \sum_{z \in \mathcal{N}_h} (R_h c_h)(z) \phi_z,$$

其中, $z \in \mathcal{N}_h$ 表示节点, ϕ_z 为有限元空间 U_h 的节点基函数。

梯度重构的方法有简单平均法、加权平均法、调和平均法等。这里主要讨论加权平均法, 即定义节点 z 处的梯度为

$$R_h c_h = \sum_{z \in K, K \in \mathcal{T}_z} \omega_K \nabla c_h(z) |_K,$$

其中, ω_K 表示 K 所占的权重, \mathcal{T}_z 表示节点 z 的单元片, 即 \mathcal{T}_h 中以 z 为顶点的单元集合。取不同的 ω_K 就可以得到不同的加权平均格式。考虑面积平均格式, 按照如下定义构造后验误差估计子。

定义 2.1.1 面积平均梯度重构型后验误差估计子^[12]

$$\eta_K = \| R_h c_h(t) - \nabla c_h(t) \|_{L^2(K)},$$

其中

$$R_h c_h = \sum_{z \in K, K \in \mathcal{T}_z} \frac{|K|}{|\mathcal{T}_z|} \nabla c_h(z) |_K.$$

2.2 标记

构造出后验误差估计子后, 需要根据计算得到的误差, 确定网格中哪些三角单元需要加密或粗化, 这个过程就是标记。误差的范围如何选取是标记过程中的关键, 需要有一定的标准, 即标记策略。基于误差均匀分布原则, 本文采取最大值准则^[13]对网格单元进行标记:

记 $\eta_{\max} = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K$, 设 $\theta \in (0, 1)$ 为一预设常数(一般取 0.5), 需要标记的单元集合为 $\mathcal{M} \subset \mathcal{T}_h$, 若网格中的某一单元 K 满足 $\eta_K > \theta \eta_{\max}$, 则该单元就被标记, 即 $K \in \mathcal{M}$.

2.3 网格调整

自适应方法的效率不仅取决于后验误差估计子, 还取决于自适应网格调整算法。确定好标记单元集合后, 需要根据网格调整算法, 对其中的单元进行加密或粗化, 本文选用二分加密法^[14]和三角网粗化算法^[15]。

二分加密法是在每个被标记单元的最长边中点和其对角顶点之间插入一条新边。该方法能够保证网格的正则性, 但加密过程中常常会出现悬点, 产生不协调的网格, 这时需要采取适当措施去掉悬点, 如将相邻三角形再次剖分来去掉悬点, 以保证新网格的协调性。图 1、2 为上述加密以及悬点处理方法的示意图。

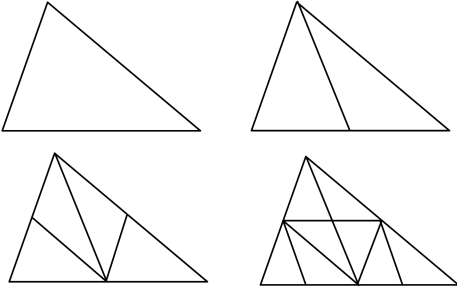


图 1 二分加密法产生的子单元

Fig.1 Subunit produced by bi-partition refined method

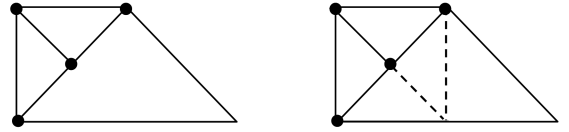


图 2 悬点的协调性恢复

Fig.2 Coordination recovery of the hanging node

粗化可以看作加密的反过程, 若被标记的三角单元有一条边为该三角单元与其相邻三角单元组成的大三角形的中线, 则将这条边删除, 使得该单元与相邻单元合并。

按照上述过程可以给出以下自适应算法。

- 步骤 1 给定初始三角网格剖分 \mathcal{T}_h^0 , 以及网格节点上的值 $c_h^{(0)}$, 迭代步数 $k=0$;
- 步骤 2 在 \mathcal{T}_h^k 上求出数值解 $c_h^{(k)}$;
- 步骤 3 计算各单元的面积平均梯度重构型后验误差估计子 η_K ;
- 步骤 4 选定参数 $\theta=0.5$, 若 $\eta_K > \theta \eta_{\max}$, 则将该单元 K 标记, 并执行下一步, 否则, 停止计算;
- 步骤 5 采用二分加密法对 \mathcal{T}_h^k 中被标记单元 K 加密, 并采用三角网粗化算法局部网格粗化, 得到 \mathcal{T}_h^{k+1} ;
- 步骤 6 令 $k=k+1$, 转到步骤 2, 继续计算。

3 误差分析

本章对梯度重构型后验误差估计子进行理论分析, 在给出最终的主要结果之前, 首先给出以下对后续分析有所帮助的引理。

引理 3.1.1^[16] 设 $c \in H^1(\Omega)$ 为原方程(1)的解, 有限元逼近 $c_h \in U_h$ 为方程(5)固定在第 k 个时间层的解, 则存在与 h 无关的常数 C , 使得

$$\|c - c_h\|_{1, \Omega} \leq C \eta_j + C \bar{\epsilon}, \quad (6)$$

$$\eta_j \leq C \|c - c_h\|_{1, \Omega} + C \bar{\epsilon}, \quad (7)$$

其中, η_j 表示单元边界上的残量型后验误差估计子, 定义为

$$\eta_j^2 = \sum_{l \cap \partial \Omega \neq \emptyset} h \int_l [(A \nabla c_h) \cdot \mathbf{n}]^2,$$

A 为常数矩阵, l 表示 2 个相邻三角单元边界 \bar{K}^1, \bar{K}^2 的交集, \mathbf{n} 为 K^1 的外法向量, $[v(x)]$ 表示跨过单元边界的“跳跃”, 定义为

$$[v(x)] = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} (v(x + \delta \mathbf{n}) - v(x - \delta \mathbf{n})), \quad x \in l,$$

且有

$$\bar{\epsilon}^2 = \sum_{z \in N_h} h^2 \int_{\sigma_z} (f - \bar{f}_z)^2, \quad \bar{f}_z|_{\sigma_z} = \frac{\int_{\sigma_z} f}{\int_{\sigma_z} 1}, \quad \sigma_z = \text{supp}\{\phi_z(x)\}, \quad \epsilon^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h^k} h^2 \int_K (f - \bar{f})^2, \quad \bar{f}|_K = \frac{\int_K f}{\int_K 1}.$$

结合上述引理可得如下有关梯度重构型后验误差估计子的结论。

定理 3.1.2^[16] 设 $c \in H^1(\Omega)$ 为原方程(1)的解,有限元逼近 $c_h \in U_h$ 为方程(5)固定在第 k 个时间层的解,则存在与 h 无关的常数 C ,使得

$$\|c - c_h\|_{1,\Omega} \leq C\eta_K + C\bar{\epsilon}, \quad (8)$$

$$\eta_K \leq C \|c - c_h\|_{1,\Omega} + C\epsilon, \quad (9)$$

其中, η_K 表示梯度重构型后验误差估计子, $\bar{\epsilon}, \epsilon$ 由引理 3.1.1 定义。

证明 注意到 $R_h c_h \in W_h = U_h \times U_h$ 在单元边界上连续,且 $R_h c_h, \nabla c_h$ 均为单元 $K \in \mathcal{T}_h^k$ 上的多项式,结合逆不等式

$$h \int_{\partial K} (\nabla c_h - R_h c_h)^2 \leq C \int_K (\nabla c_h - R_h c_h)^2,$$

可得 η_j 与 η_K 之间的关系如下:

$$\begin{aligned} \eta_j^2 &= \sum_{l \cap \partial\Omega \neq \emptyset} h \int_l [(A \nabla c_h) \cdot \mathbf{n}]^2 = \sum_{l \cap \partial\Omega \neq \emptyset} h \int_l [(A(\nabla c_h - R_h c_h)) \cdot \mathbf{n}]^2 \leq C \sum_{l \cap \partial\Omega \neq \emptyset} h \int_l [(\nabla c_h - R_h c_h)]^2 \\ &\leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h^k} h \int_{\partial K} (\nabla c_h - R_h c_h)^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h^k} \int_K (\nabla c_h - R_h c_h)^2 = C \|\nabla c_h - R_h c_h\|_{0,\Omega}^2 = C\eta_K^2, \end{aligned} \quad (10)$$

结合引理 3.1.1 中误差关系式(6),可以得到定理 3.1.2 中误差关系式(8)成立。

下面考虑误差关系式(9)的证明。考虑重构后节点 z 处的梯度

$$(R_h c_h)(z) = \sum_{j=1}^{J_z} \omega_z^j (\nabla c_h)_{K_z^j}, \quad \sum_{j=1}^{J_z} \omega_z^j = 1,$$

其中, J_z 表示以 z 为顶点的单元数量, K_z^j 表示第 j 个以 z 为顶点的单元, ω_z^j 表示单元 K_z^j 所占的权重。

注意到,在某三角单元 $K \in \mathcal{T}_h^k$ 上,有

$$\sum_{z \cap K \neq \emptyset} \phi_z = 1,$$

则

$$\begin{aligned} |\nabla c_h - R_h c_h|^2 &= \left| (\nabla c_h)_K - \sum_{z \cap K \neq \emptyset} \phi_z (R_h c_h)(z) \right|^2 = \left| (\nabla c_h)_K - \sum_{z \cap K \neq \emptyset} \phi_z \left(\sum_{j=1}^{J_z} \omega_z^j (\nabla c_h)_{K_z^j} \right) \right|^2 \\ &= \left| \sum_{z \cap K \neq \emptyset} \phi_z \left(\sum_{j=1}^{J_z} \omega_z^j ((\nabla c_h)_K - (\nabla c_h)_{K_z^j}) \right) \right|^2 \leq C \sum_{K' \subset \mu_K} |(\nabla c_h)_K - (\nabla c_h)_{K'}|^2, \end{aligned} \quad (11)$$

其中

$$\mu_K = \bigcup_{K' \cap K \neq \emptyset} K'$$

表示 \mathcal{T}_h^k 中与单元 K 有公共边界的单元 K' 的并集。

给定 \mathcal{T}_h^k 中某一单元的边界 l , 设 \mathbf{n}_l 为 l 的单位法向量, 定义 $[w]_l$ 为跨过 l 的跳跃。注意到, $\forall K, K' \subset \mu_K$, 存在与 h 无关的有限个正整数 m_r 以及单元 $K_i \subset \mu_K$, $i=0, 1, \dots, m_r$, 使得 $\bar{K}_{i-1} \cap \bar{K}_i = l_i$, $i=0, 1, \dots, m_r$, 其中, $l_i \subset \mu_K$ 为单元边界, $l_i \cap \partial\mu_K = \emptyset$, $K=K_0$, $K'=K_{m_r}$ 。

因此有

$$|(\nabla c_h)_K - (\nabla c_h)_{K'}| = \left| \sum_{i=1}^{m_r} [\nabla c_h]_{l_i} \right| \leq \sum_{i=1}^{m_r} |[\nabla c_h]_{l_i}| \leq \sum_{l \subset \mu_K \cap \partial\mu_K} |[\nabla c_h]_l|, \quad (12)$$

又 c_h 在 Ω 中连续, 若 $l \cap \partial\Omega = \emptyset$, $\left[\frac{\partial c_h}{\partial t} \right]_l = 0$, 其中 $\frac{\partial c_h}{\partial t}$ 为 c_h 的切线导数, 则 $|[\nabla c_h]_l| = \left| \left[\frac{\partial c_h}{\partial t} \right]_l \right| = |[\nabla c_h]_l \cdot \mathbf{n}|$,

因此, $\mathbf{n} = k[c_h]_l$, $k = \pm 1/[\nabla c_h]_l$ 。再由矩阵 \mathbf{A} 的正定性, 可得

$$\begin{aligned} [\nabla c_h \cdot \mathbf{n}]_l^2 &= k^2 |[\nabla c_h]_l|^4 \leq Ck^2 ((A[\nabla c_h]_l) \cdot [\nabla c_h]_l)^2 = C((A[\nabla c_h]_l) \cdot k[\nabla c_h]_l)^2 \\ &= C((A[\nabla c_h]_l) \cdot \mathbf{n})^2 = C[(A \nabla c_h) \cdot \mathbf{n}]_l^2, \end{aligned} \quad (13)$$

从而

$$\|R_h c_h - \nabla c_h\|_{0,K}^2 \leq Ch^2 \sum_{l \subset \mu_K \cap \partial\mu_K} |[(A \nabla c_h) \cdot \mathbf{n}]_l|^2 \leq C \sum_{l \subset \mu_K \cap \partial\mu_K} h \int_l [(A \nabla c_h) \cdot \mathbf{n}]^2. \quad (14)$$

不等式^[14]对所有单元 K 求和, 得到

$$\begin{aligned} \eta_K^2 &= \|R_h c_h - \nabla c_h\|_{0,\Omega}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h^k} \|R_h c_h - \nabla c_h\|_{0,K}^2 \\ &\leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h^k} \sum_{l \subset \mu_K \setminus \partial \mu_K} h \int_l [(A \nabla c_h) \cdot \mathbf{n}]^2 \leq C \sum_{l \cap \partial \Omega \neq \emptyset} h \int_l [(A \nabla c_h) \cdot \mathbf{n}]^2 = C \eta_f^2, \end{aligned} \quad (15)$$

结合引理 3.1.1 中误差关系式(7),可以得到定理 3.1.2 中误差关系式(9)成立。

4 数值算例

这一章中,建立 3 个数值算例来验证上述自适应算法的有效性。数值实验基于 MATLAB 软件包 iFEM^[17]实现。

例 1 考虑边值问题

$$\begin{cases} -\Delta y = f, & \text{in } \Omega, \\ y = g_D, & \text{on } \partial \Omega, \end{cases} \quad (16)$$

其中, $\Omega = (-1, 1)^2 \setminus \{[0, 1) \times (-1, 0]\}$, 选取适当的 f 和 g_D , 使得方程有真解

$$y = r^\beta \sin\left(\frac{2}{3}\theta\right).$$

采用自适应算法求解该问题,取初始空间步长 $h=0.5$,经过自适应调整的过程,得到加密后的网格(图 3)和误差曲线(图 4)。

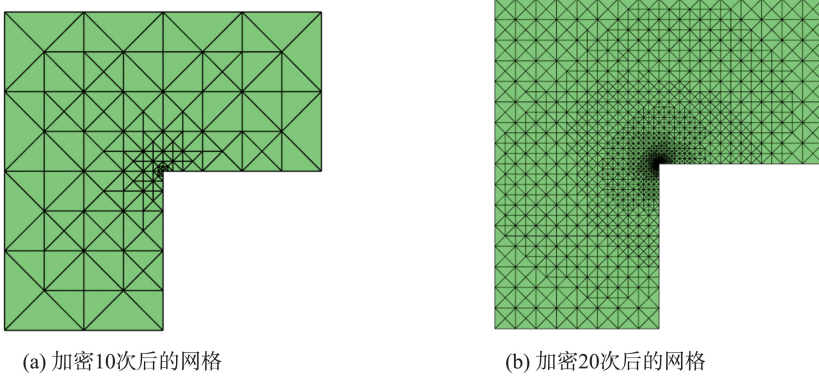


图 3 算例 1 的二分法网格加密
Fig.3 Refined mesh of bi-partition method for example 1

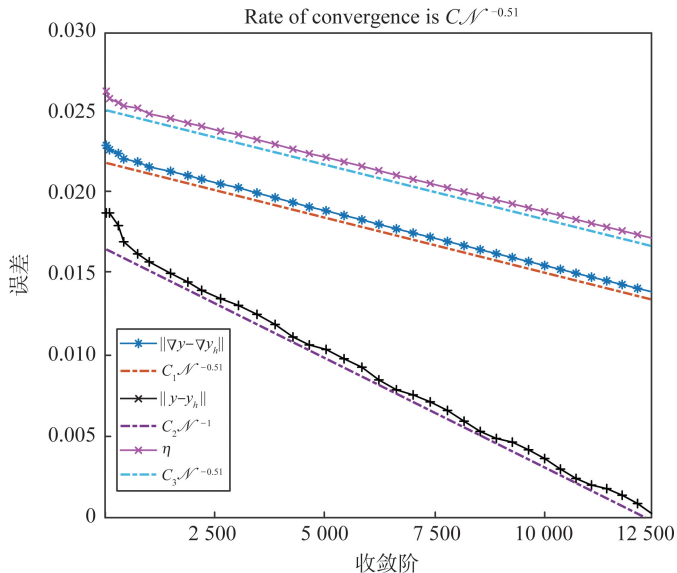


图 4 算例 1 的误差曲线
Fig.4 Error plot for example 1

图 3 给出了方程 (16) 经过自适应算法调整后的网格,其真解在 (0,0) 处具有奇异性,且网格在奇点附近进行加密。图 4 表示三角网格剖分中误差及其收敛阶,虚线从上到下分别表示收敛阶为一阶、一阶及二阶,折线从上到下分别表示误差估计子,误差的能量范数 $\|\nabla y - \nabla y_h\|$ 和 L^2 范数 $\|y - y_h\|$ 随网格节点增多而变化的情况,可见能量范数和误差估计子一阶收敛, L^2 范数二阶收敛。

例 2 在方程 (1) 中,取 $\Omega = [0, 1]^2$, $J = (0, 1]$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$, $\mathbf{u} = (1, 1)^T$, $D = 1 \times 10^{-3}$, 选取适当的右端项 f 和初边值,使得方程存在精确解

$$c = \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) e^{-t}.$$

取时间步长 $\Delta t = 0.1$, 初始空间步长 $\Delta x_1 = \Delta x_2 = h = 0.1$ 。

图 5 给出了求解例 2 方程所得的数值解与精确解的对比,图 6 给出了误差曲线及其收敛阶,虚线从上到下分别表示收敛阶为一阶、一阶及二阶,折线从上到下分别表示误差估计子,误差的能量范数 $\|\nabla c - \nabla c_h\|$ 和 L^2 范数 $\|c - c_h\|$ 和随网格节点增多而变化的情况,体现出误差估计子曲线的下降趋势与误差的能量范数以及 L^2 范数基本一致,且能量范数和误差估计子一阶收敛, L^2 范数二阶收敛。

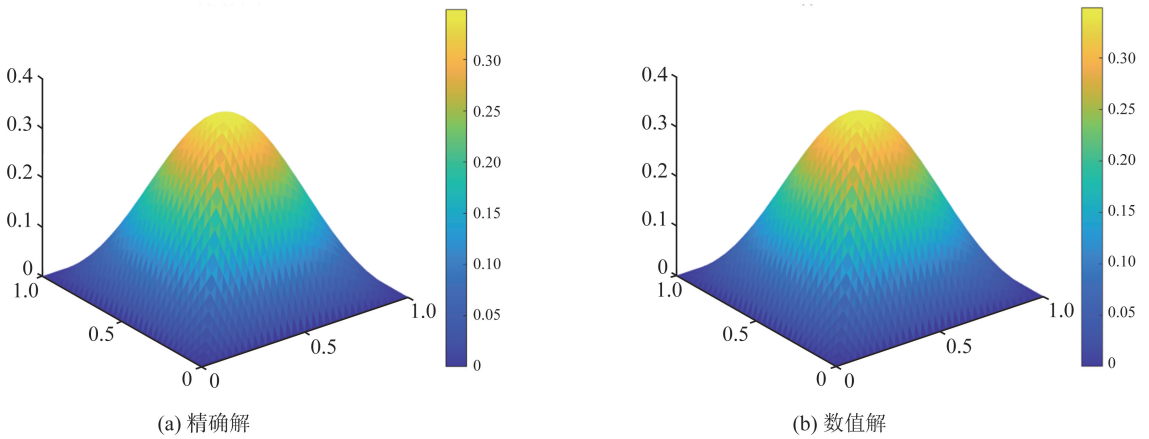


图 5 算例 2 在 $t=0.5$ 时精确解与数值解的对比
Fig.5 Comparison of exact solution and approximate solution at $t=0.5$ for example 2

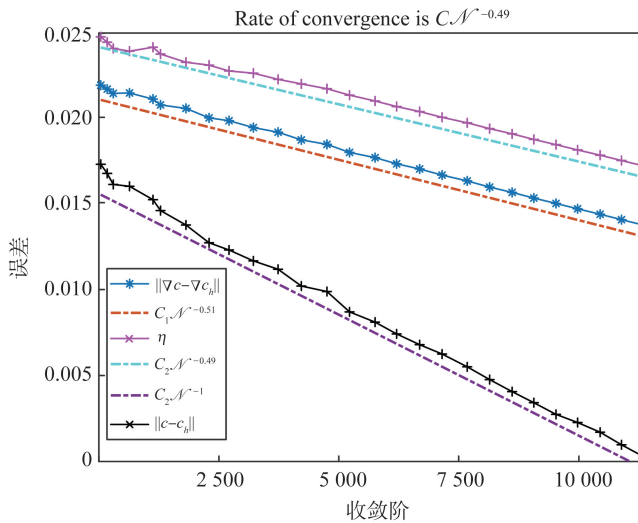


图 6 算例 2 的误差曲线
Fig.6 Error plot for example 2

例 3 在方程 (1) 中,取 $\Omega = [-1, 1]^2$, $J = (0, 1]$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$, $\mathbf{u} = (1, 1)^T$, $D = \varepsilon = 1 \times 10^{-3}$ 选取适当的右端项 f 和初边值,使得方程存在精确解

$$c = \begin{cases} \frac{1}{e^{\varepsilon(x_1-x_2)^2}} \cdot e^{-t}, & x_1 = x_2, \\ 0, & x_1 \neq x_2, \end{cases}$$

该问题在区域内部有一个内界面 $x_1 = x_2$, 当 x_1, x_2 的取值趋于该内界面时,精确解间断。取时间步长 $\Delta t =$

0.001, 初始空间步长 $\Delta x_1 = \Delta x_2 = h = 0.5$ 。

图7展示了求解例3方程的过程中经过自适应算法调整后的网格, 网格加密能够体现出加密区域附近数值解的震荡较为剧烈, 而图中的加密区域正是真解变化剧烈的内界面 $x_1 = x_2$ 附近, 故本数值算例能够验证网格加密方法的正确性。图8表示三角网格剖分中的误差及其收敛阶, 虚线从上到下分别表示收敛阶为一阶、一阶及二阶, 折线从上到下分别表示误差的能量范数 $\|\nabla c - \nabla c_h\|$, 误差估计子和 L^2 范数 $\|c - c_h\|$ 随网格节点增多而变化的情况, 可见能量范数和误差估计子一阶收敛, L^2 范数二阶收敛。

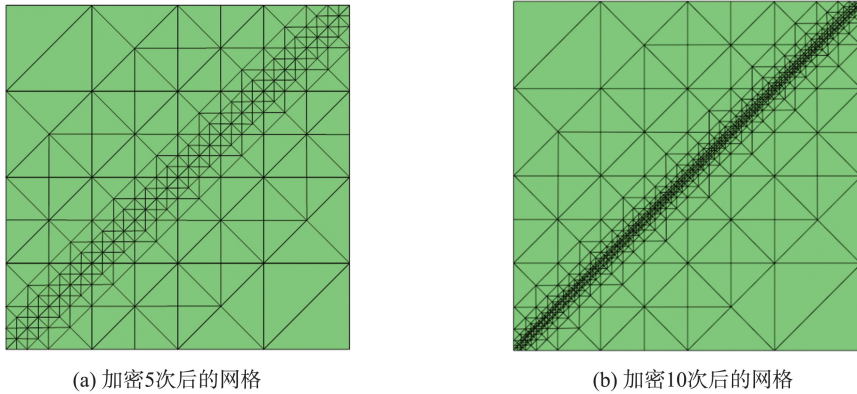


图7 算例3的自适应网格加密

Fig.7 Refined mesh of adaptive method for example 3

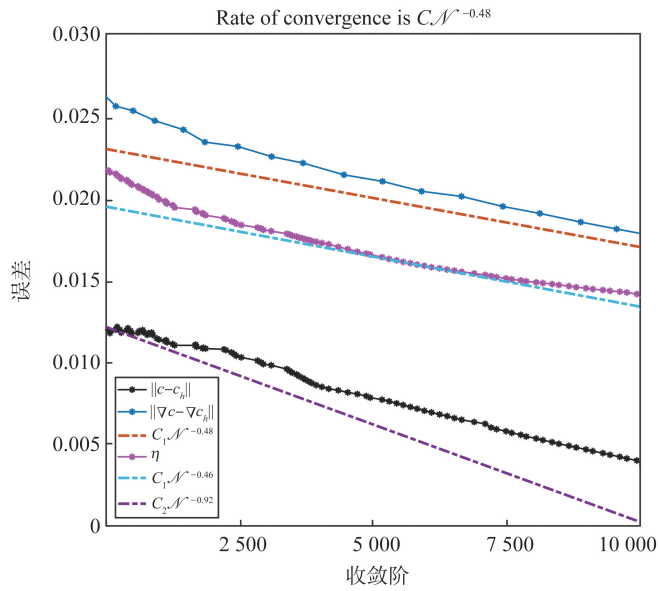


图8 算例3的误差曲线

Fig.8 Error plot for example 3

以上的数值实验表明, 采用自适应算法能够得到比较好的效果, 且通过特征线方法处理对流项, 使得结果中未出现数值震荡和数值弥散等现象, 体现了本文所研究的自适应有限元方法求解对流扩散方程的有效性。

5 结语

本文针对二维非线性对流扩散方程提出了一种基于梯度重构的自适应有限元方法。对于对流占优的对流扩散方程采用特征线方法处理其对流项, 设计了基于面积平均梯度重构型后验误差估计子的自适应算法, 并进行数值实验证明方法的有效性和可行性。本文首先利用特征线方法处理方程, 得到离散格式, 并根据求解得到的数值解构造面积平均梯度重构型后验误差估计子, 然后基于误差估计子, 选取最大值准则为标记策略对网格进行标记, 再采用二分加密法和三角网粗化算法对被标记的网格进行调整, 得到了完整的自适应算

法,进而给出梯度重构型后验误差估计子的理论分析。最后进行数值实验,结果表明,数值解与精确解之间的误差在 L^2 范数意义下二阶收敛,在能量范数意义下一阶收敛,误差估计子一阶收敛,且未出现数值震荡和数值弥散等现象。

参考文献:

- [1] BABUŠKA I, RHEINBOLDT W C. Error estimates for adaptive finite element computations[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1978, 15(4):736-754.
- [2] BABUŠKA I, RHEINBOLDT W C. A-posteriori error estimates for the finite element method[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1978, 12(10):1597-1615.
- [3] STANFORTH A, CÔTÉ J. Semi-Lagrangian integration schemes for atmospheric models: a review[J]. *Monthly Weather Review*, 1991, 119(9):2206-2223.
- [4] GARDER A O Jr, PEACEMAN D W, POZZI A L Jr. Numerical calculation of multidimensional miscible displacement by the method of characteristics[J]. *Society of Petroleum Engineers Journal*, 1964, 4(1):26-36.
- [5] DOUGLAS J J, RUSSELL T F. Numerical methods for convection-dominated diffusion problems based on combining the method of characteristics with finite element or finite difference procedures[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1982, 19(5):871-885.
- [6] PIRONNEAU O, LIOU J, TEZDUYAR T. Characteristic-Galerkin and Galerkin/least-squares space-time formulations for the advection-diffusion equation with time-dependent domains[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1992, 100(1):117-141.
- [7] EWING R E, RUSSELL T F, WHEELER M F. Convergence analysis of an approximation of miscible displacement in porous media by mixed finite elements and a modified method of characteristics[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1984, 47(1/2):73-92.
- [8] DOUGLAS J, HUANG C S, PEREIRA F. The modified method of characteristics with adjusted advection[J]. *Numerische Mathematik*, 1999, 83(3):353-369.
- [9] ADAMS R. Sobolev spaces[M]. New York: Academic Press, 1975.
- [10] 陆瑶. 二维非线性对流扩散方程的特征有限元分析[C]//中国数学力学物理学高新技术交叉研究会第十二届学术年会论文集. 乐山:中国数学力学物理学高新技术交叉研究会,2008,12:357-365.
LU Yao. Characteristic finite element analysis for 2D nonlinear convection-dominated diffusion problem[C]//Proceedings of the 12th Annual Conference of the Chinese Society for Interdisciplinary Research in Mathematics, Mechanics, and Physics High-Tech. Leshan: Chinese Society for Interdisciplinary Research in Mathematics, Mechanics, and Physics, 2008, 12:357-365.
- [11] 秦新强,党发宁,龚春琼,等. 二维非线性对流扩散方程的特征混合有限元两重网格算法[J]. *工程数学学报*,2009, 26(5):906-916.
QIN Xinqiang, DANG Fanning, GONG Chunqiong, et al. Two-grid method for the characteristic mixed finite element approximations of 2D nonlinear convection diffusion problems[J]. *Chinese Journal of Engineering Mathematics*, 2009, 26(5):906-916.
- [12] 易年余. 基于梯度重构的后验误差估计及自适应有限元方法[D]. 湘潭:湘潭大学,2011.
YI Nianyu. Posterior error estimation and adaptive finite element method based on gradient reconstruction[D]. Xiangtan: Xiangtan University, 2011.
- [13] DÖRFLER W. A convergent adaptive algorithm for Poisson's equation[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1996, 33(3):1106-1124.
- [14] RIVARA M C. Mesh refinement processes based on the generalized bisection of simplices[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1984, 21(3):604-613.
- [15] 武海军,李永海,李荣华. 二维非线性抛物方程广义差分法/有限体积分法的自适应计算[J]. *计算物理*,2003,20(4):298-306.
WU Haijun, LI Yonghai, LI Ronghua. Adaptive generalized difference/finite volume computations for two dimensional nonlinear parabolic equation[J]. *Chinese Journal of Computation Physics*, 2003, 20(4):298-306.
- [16] LIU Wenbin, YAN Ningning. Adaptive finite element methods for optimal control governed by PDEs[M]. Beijing: Science Press, 2008.
- [17] CHEN Long, ZHANG Chensong. A coarsening algorithm on adaptive grids by newest vertex bisection and its application[J]. *Journal of Computational Mathematics*, 2010, 28(6):767-789.