山东大学学报(理学版)2026 年 2 月 第 61 卷 第 2 期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.61, No.2, 2026 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2026)02-0020-06 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2024.392

∗-Sylvester 矩阵方程转换为广义 Sylvester 矩阵方程的方法

汪秋分,马昌凤*

(厦门工学院人工智能学院, 福建 厦门 361021)

摘要:研究∗-Sylvester 矩阵方程 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{X}^{*}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{D}$ 的等价转换形式。利用 Kronecker 积和向量化算子以及置换矩阵的基本性质,分离了矩阵的实部和虚部,在两种不同的情况下得到了∗-Sylvester 矩阵方程的等价转换形式,并证明了在满足一定条件下其可以等价转换为广义 Sylvester 矩阵方程。

关键词:∗-Sylvester 矩阵方程;广义 Sylvester 矩阵方程;Kronecker 积;向量化;等价转换

中图分类号:O241 **文献标志码**:A

引用格式:汪秋分,马昌凤. ∗-Sylvester 矩阵方程转换为广义 Sylvester 矩阵方程的方法[J]. 山东大学学报(理学版),2026,61(2):20-25.

Method of transforming the ∗-Sylvester matrix equation into the generalized Sylvester matrix equation

WANG Qiufen, MA Changfeng*

(School of Artificial Intelligence, Xiamen Institute of Technology, Xiamen 361021, Fujian, China)

Abstract: The equivalent transformation form of the ∗-Sylvester matrix equation $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{X}^{*}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{D}$ is studied. Using the basic properties of Kronecker product, vectorization operator and permutation matrix, and separating the real and imaginary parts of the matrix, we obtain the equivalent transformation form of the ∗-Sylvester matrix equation in two different cases. It is proved that it can be equitably converted to generalized Sylvester matrix equation under certain conditions.

Key words: ∗-Sylvester matrix equation; generalized Sylvester matrix equation; Kronecker product; vectorization; equivalent transformation

0 引言

考虑下面的★-Sylvester 矩阵方程:

$$\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{X}^{\star}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{D},\tag{1}$$

其中,$\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{B}\in\mathbf{C}^{n\times m}$, $\boldsymbol{D}\in\mathbf{C}^{m\times m}$,均为给定已知矩阵,$\boldsymbol{X}\in\mathbf{C}^{n\times m}$是待定需求的未知矩阵,$\mathbf{C}$ 表示复数域,算子$(\cdot)^{\star}$表示矩阵的转置或共轭转置。

当$(\cdot)^{\star}$表示矩阵的转置时,方程(1)称为 T-Sylvester 矩阵方程,即

$$\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{D}。\tag{2}$$

当$(\cdot)^{\star}$表示矩阵的共轭转置时,方程(1)称为∗-Sylvester 矩阵方程,即

$$\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{X}^{*}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{D}。\tag{3}$$

众所周知,Sylvester 矩阵方程在许多方面有着广泛且重要的应用,包括工业[1-2]、观测器设计[3]、系统控制[4]、故障检测[5]等。近十几年来,许多学者对★-Sylvester 矩阵方程(1)以及更一般的矩阵方程的可解性

收稿日期:2024-11-16; 网络出版时间:2025-12-25

基金项目:国家自然科学基金资助项目(12371378); 福建省自然科学基金项目(2023J011127); 厦门工学院基于大数据的模糊系统理论及其应用科研创新团队项目(KYTD202005)

第一作者:汪秋分(1987—),男,副教授,硕士,研究方向数值代数. E-mail:356672150@qq.com

∗通信作者:马昌凤(1962—),男,教授,博士,研究方向数值代数及其应用. E-mail:mcf@fzfu.edu.cn

和数值方法进行了大量研究[6-11]。并且，许多求解其他 Sylvester 型矩阵方程的数值算法已经被提出。例如，针对耦合 Sylvester 矩阵方程[12]和广义 Sylvester 矩阵方程[13]的梯度(或最小二乘)算法。

2018 年，Oozawa 等[14]在假设矩阵均为方阵的条件下，提出一种新的变换，可用于将 T-Sylvester 矩阵方程(2)转换为目前已被研究更充分的 Lyapunov 方程。2019 年，Satake 等[15]在此基础上推广并得出更一般的结果，证明在矩阵不是方阵的条件下，方程(2)亦可等价转化为广义 Sylvester 矩阵方程。2024 年，马昌凤等[16]进一步研究广义★-Sylvester 矩阵方程，证明在满足一定条件下其可以等价转换为广义 Sylvester 矩阵方程。

本文主要研究∗-Sylvester 矩阵方程(3)转换为广义 Sylvester 矩阵方程的方法。基于文献[16]提出的分离矩阵的实部和虚部的思想，将∗-Sylvester 矩阵方程(3)等价转换为广义 Sylvester 矩阵方程。由于文献[14]和文献[15]均考虑的是 T-Sylvester 矩阵方程(方程含有矩阵的转置)，而本文研究的∗-Sylvester 矩阵方程(含有矩阵的共轭转置)，考虑了共轭转置，使用范围更广，这一结果可以看作是文献[14]和文献[15]中相应结果的推广。本文中 $\lambda(\boldsymbol{A})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱集，即 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的集合，$\overline{\boldsymbol{A}}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的共轭，$\boldsymbol{I}_m$ 表示 m 阶单位矩阵，$(\cdot)_R$ 和 $(\cdot)_I$ 分别表示矩阵的实部和虚部，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$。

1 预备知识

下面介绍本文所用到的一些定义及引理。

定义 1[17]　给定矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})\in\mathbf{C}^{p\times q}$，则 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}\in\mathbf{C}^{mp\times nq}$ 表示它们的 Kronecker 积，定义为

$$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}:=\begin{bmatrix} a_{11}\boldsymbol{B} & a_{12}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{1n}\boldsymbol{B} \\ a_{21}\boldsymbol{B} & a_{22}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{2n}\boldsymbol{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\boldsymbol{B} & a_{m2}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{mn}\boldsymbol{B} \end{bmatrix}。$$

Kronecker 积具有以下基本性质：

(1) $(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；

(2) $(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})(\boldsymbol{C}\otimes\boldsymbol{D})=(\boldsymbol{AC})\otimes(\boldsymbol{BD})$，$\forall\,\boldsymbol{C}\in\mathbf{C}^{n\times l}$，$\boldsymbol{D}\in\mathbf{C}^{q\times r}$。

定义 2[17]　设矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n]\in\mathbf{C}^{m\times n}$，$\boldsymbol{a}_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列。定义向量化算子 vec：$\mathbf{C}^{m\times n}\to\mathbf{C}^{mn}$ 为

$$\mathrm{vec}(\boldsymbol{A})=[\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{a}_n^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$$

其逆算子 $\mathrm{vec}^{-1}:\mathbf{C}^{mn}\to\mathbf{C}^{m\times n}$ 定义为

$$\mathrm{vec}^{-1}(\mathrm{vec}(\boldsymbol{A}))=\boldsymbol{A}。$$

定义 3[18]　设集合 $\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}\subset\mathbf{C}\cup\{\infty\}$。若 $\lambda_i\neq 1/\overline{\lambda_j}$，$\forall\,1\leqslant i,\ j\leqslant n$，则称该集合是★-非互倒的，其中 $\bar{\lambda}$ 表示 λ 的共轭。

引理 1[17]　设矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{m\times n}$，$\boldsymbol{B}\in\mathbf{C}^{n\times p}$，$\boldsymbol{C}\in\mathbf{C}^{p\times q}$，则

$$\mathrm{vec}(\boldsymbol{ABC})=(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{A})\,\mathrm{vec}(\boldsymbol{B})。$$

引理 2[17]　设 $\boldsymbol{e}_{in}$ 表示一个 n 维列向量，它的第 i 个位置是 1，其余均为 0，记

$$\boldsymbol{e}_{in}=[0,0,\cdots,0,1,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}}\in\mathbf{C}^{n}。$$

若矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{m\times n}$，$\boldsymbol{B}\in\mathbf{C}^{p\times q}$，则置换矩阵

$$\boldsymbol{P}_{mn}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{e}_{1n}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{e}_{2n}^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{e}_{nn}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\in\mathbf{C}^{mn\times mn}$$

具有下列性质：

（1） $\boldsymbol{P}_{mn}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}_{nm}$；

（2） $\boldsymbol{P}_{mn}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{mn}=\boldsymbol{P}_{mn}\boldsymbol{P}_{mn}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}_{mn}$；

（3） $\mathrm{vec}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{P}_{mn}\mathrm{vec}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$；

（4） $\boldsymbol{P}_{mp}(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})\boldsymbol{P}_{nq}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{A})$。

引理 3[9,16]　设矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{E}\in\mathbf{C}^{n\times m}$，则★-Stein 矩阵方程 $\boldsymbol{AXB}+\boldsymbol{X}^{*}=\boldsymbol{E}$ 存在唯一解的充分必要条件是对任意右端项 $\boldsymbol{E}$，谱集 $\lambda(\boldsymbol{AB}^{*})$ 是★-非互倒的。

2　主要结果

为了讨论 ∗-Sylvester 矩阵方程(3)的等价形式，本文将 vec 算子应用于方程(3)，利用引理 1 和引理 2 可得

$$(\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{A})\mathrm{vec}(\boldsymbol{X})+\boldsymbol{P}_{mm}(\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{B})\mathrm{vec}(\overline{\boldsymbol{X}})=\mathrm{vec}(\boldsymbol{D})。\tag{4}$$

分离矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{X}$ 的实部和虚部，得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_R+\mathrm{i}\boldsymbol{A}_I,\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_R+\mathrm{i}\boldsymbol{B}_I,$$
$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}_R+\mathrm{i}\boldsymbol{D}_I,\quad \boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_R+\mathrm{i}\boldsymbol{X}_I。$$

记 $\boldsymbol{x}_R=\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}_R)$，$\boldsymbol{x}_I=\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}_I)$，$\boldsymbol{d}_R=\mathrm{vec}(\boldsymbol{D}_R)$，$\boldsymbol{d}_I=\mathrm{vec}(\boldsymbol{D}_I)$，则方程(4)等价于

$$\mathcal{A}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\mathcal{A}_{11}&\mathcal{A}_{12}\\\mathcal{A}_{21}&\mathcal{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_R\\\boldsymbol{x}_I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}_R\\\boldsymbol{d}_I\end{bmatrix},\tag{5}$$

其中

$$\mathcal{A}_{11}=\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{A}_R+\boldsymbol{P}_{mm}\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{B}_R^{\mathrm{T}},\quad \mathcal{A}_{12}=-\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{A}_I+\boldsymbol{P}_{mm}\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}},$$
$$\mathcal{A}_{21}=\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{A}_I+\boldsymbol{P}_{mm}\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}},\quad \mathcal{A}_{22}=\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{A}_R-\boldsymbol{P}_{mm}\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{B}_R^{\mathrm{T}}。$$

下面给出 ∗-Sylvester 矩阵方程(3)等价转换为广义 Sylvester 矩阵方程的定理结论。我们考虑两种不同的情形：(1) $m\geqslant n$，(2) $m\leqslant n$。

在 $m\geqslant n$ 的情形下，得到了如下结果。

定理 1　设 $m\geqslant n$，$\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{m\times n}$，$\boldsymbol{B}\in\mathbf{C}^{n\times m}$，$\boldsymbol{D}\in\mathbf{C}^{m\times m}$。若存在矩阵 $\boldsymbol{S}\in\mathbf{C}^{m\times m}$满足 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{S}\overline{\boldsymbol{A}}$，$\lambda(\boldsymbol{S})$是★-非互倒的，则 ∗-Sylvester 矩阵方程(3)等价于广义 Sylvester 矩阵方程

$$\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{XS}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}^{*}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}。\tag{6}$$

证明　令矩阵

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{P}_{mm}\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{S}_R&-\boldsymbol{P}_{mm}\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{S}_I\\-\boldsymbol{P}_{mm}\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{S}_I&\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{I}_m+\boldsymbol{P}_{mm}\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{S}_R\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{11}&\boldsymbol{K}_{12}\\\boldsymbol{K}_{21}&\boldsymbol{K}_{22}\end{bmatrix},$$

其中，$\boldsymbol{K}_{11}=\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{P}_{mm}\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{S}_R$，$\boldsymbol{K}_{12}=-\boldsymbol{P}_{mm}\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{S}_I$，$\boldsymbol{K}_{21}=-\boldsymbol{P}_{mm}\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{S}_I$，$\boldsymbol{K}_{22}=\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{I}_m+\boldsymbol{P}_{mm}\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{S}_R$。下证矩阵 $\boldsymbol{K}$ 是非奇异的。

构造下面的线性方程组

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{P}_{mm}\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{S}_R&-\boldsymbol{P}_{mm}\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{S}_I\\-\boldsymbol{P}_{mm}\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{S}_I&\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{I}_m+\boldsymbol{P}_{mm}\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{S}_R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_R\\\boldsymbol{y}_I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}_R\\\boldsymbol{f}_I\end{bmatrix}。\tag{7}$$

易知方程组(7)等价于★-Stein 矩阵方程

$$\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Y}^{*}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{F},\tag{8}$$

其中，$\mathrm{vec}(\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{y}_R+\mathrm{i}\boldsymbol{y}_I$，$\mathrm{vec}(F)=\boldsymbol{f}_R+\mathrm{i}\boldsymbol{f}_I$。因此，矩阵 $\boldsymbol{K}$ 是非奇异的充分必要条件是方程(8)对任意右端项 $\boldsymbol{F}$ 均有唯一解。由引理 3 可得，方程(8)对任意右端项 $\boldsymbol{F}$ 均有唯一解的充要条件是谱集 $\lambda(\boldsymbol{S})$ 是★-非互倒的。因此，矩阵 $\boldsymbol{K}$ 是非奇异的。

由条件 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{S}\overline{\boldsymbol{A}}$，可得

$$\boldsymbol{B}_R^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{S}_R\boldsymbol{A}_R+\boldsymbol{S}_I\boldsymbol{A}_I,\tag{9}$$
$$\boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{S}_I\boldsymbol{A}_R-\boldsymbol{S}_R\boldsymbol{A}_I。\tag{10}$$

在方程(5)的两边同时乘以非奇异阵 $\boldsymbol{K}$，再结合等式(9)和(10)可得

$$\boldsymbol{KAx}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{11}\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{K}_{12}\boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{K}_{11}\boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{K}_{12}\boldsymbol{A}_{22}\\ \boldsymbol{K}_{21}\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{K}_{22}\boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{K}_{21}\boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{K}_{22}\boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_R\\ \boldsymbol{x}_I\end{bmatrix}=\boldsymbol{K}\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}_R\\ \boldsymbol{d}_I\end{bmatrix},\tag{11}$$

其中

$$\begin{gathered}\boldsymbol{K}_{11}\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{K}_{12}\boldsymbol{A}_{21}=\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{A}_R-\boldsymbol{S}_R\otimes\boldsymbol{B}_R^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{S}_I\otimes\boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}},\\ \boldsymbol{K}_{11}\boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{K}_{12}\boldsymbol{A}_{22}=-\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{A}_I-\boldsymbol{S}_R\otimes\boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{S}_I\otimes\boldsymbol{B}_R^{\mathrm{T}},\\ \boldsymbol{K}_{21}\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{K}_{22}\boldsymbol{A}_{21}=\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{A}_I+\boldsymbol{S}_R\otimes\boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{S}_I\otimes\boldsymbol{B}_R^{\mathrm{T}},\\ \boldsymbol{K}_{21}\boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{K}_{22}\boldsymbol{A}_{22}=\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{A}_R-\boldsymbol{S}_R\otimes\boldsymbol{B}_R^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{S}_I\otimes\boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}},\\ \boldsymbol{K}\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}_R\\ \boldsymbol{d}_I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}_R-\boldsymbol{P}_{mm}(\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{S}_R)\boldsymbol{d}_R-\boldsymbol{P}_{mm}(\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{S}_I)\boldsymbol{d}_I\\ \boldsymbol{d}_I-\boldsymbol{P}_{mm}(\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{S}_I)\boldsymbol{d}_R+\boldsymbol{P}_{mm}(\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{S}_R)\boldsymbol{d}_I\end{bmatrix}。\end{gathered}$$

在方程(6)两边同时应用 vec 算子,利用上述性质可得

$$\begin{aligned}\mathrm{vec}(\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{XS}^{\mathrm{T}})=&(\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{A}_R-\boldsymbol{S}_R\otimes\boldsymbol{B}_R^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{S}_I\otimes\boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}_R\\ &+(-\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{A}_I-\boldsymbol{S}_R\otimes\boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{S}_I\otimes\boldsymbol{B}_R^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}_I\\ &+\mathrm{i}(\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{A}_I+\boldsymbol{S}_R\otimes\boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{S}_I\otimes\boldsymbol{B}_R^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}_R\\ &-\mathrm{i}(\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{A}_R-\boldsymbol{S}_R\otimes\boldsymbol{B}_R^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{S}_I\otimes\boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}_I,\end{aligned}\tag{12}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{vec}(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}^*\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}})=&\boldsymbol{d}_R-\boldsymbol{P}_{mm}(\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{S}_R)\boldsymbol{d}_R-\boldsymbol{P}_{mm}(\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{S}_I)\boldsymbol{d}_I\\ &+\mathrm{i}[\boldsymbol{d}_I-\boldsymbol{P}_{mm}(\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{S}_I)\boldsymbol{d}_R+\boldsymbol{P}_{mm}(\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{S}_R)\boldsymbol{d}_I]。\end{aligned}\tag{13}$$

根据式(11)、(12)及(13)可知,方程(6)与方程组(11)等价,亦等价于方程(3)。证毕。

当 $m\leqslant n$ 时,结果如下。

定理 2　设 $m\leqslant n$, $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{B}\in\mathbf{C}^{n\times m}$, $\boldsymbol{D}\in\mathbf{C}^{m\times m}$。若存在矩阵 $\boldsymbol{H}\in\mathbf{C}^{n\times m}$ 及 $\boldsymbol{S}\in\mathbf{C}^{m\times m}$ 满足 $\boldsymbol{I}_m=\boldsymbol{AH}$, $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{H}}$, $\lambda(\boldsymbol{S})$ 是★-非互倒的,则 ∗-Sylvester 矩阵方程(3)等价于广义 Sylvester 矩阵方程

$$\boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{B}^*\widetilde{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{D},\tag{14}$$

其中 $\boldsymbol{X}=\widetilde{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{H}\widetilde{\boldsymbol{X}}^*\boldsymbol{B}$。

证明　令矩阵

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{Q}_1 & -\boldsymbol{Q}_2\\ -\boldsymbol{Q}_2 & \boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{Q}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_{11} & \boldsymbol{Q}_{12}\\ \boldsymbol{Q}_{21} & \boldsymbol{Q}_{22}\end{bmatrix},$$

其中,$\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{P}_{nm}(\boldsymbol{H}_R\otimes\boldsymbol{B}_R^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{H}_I\otimes\boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}})$, $\boldsymbol{Q}_2=\boldsymbol{P}_{nm}(\boldsymbol{H}_R\otimes\boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{H}_I\otimes\boldsymbol{B}_R^{\mathrm{T}})$, $\boldsymbol{Q}_{11}=\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{Q}_1$, $\boldsymbol{Q}_{12}=\boldsymbol{Q}_{21}=-\boldsymbol{Q}_2$, $\boldsymbol{Q}_{22}=\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{Q}_1$。

类似地,构造下面的线性方程组:

$$\boldsymbol{Qy}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{Q}_1 & -\boldsymbol{Q}_2\\ -\boldsymbol{Q}_2 & \boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{Q}_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_R\\ \boldsymbol{y}_I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}_R\\ \boldsymbol{f}_I\end{bmatrix}。\tag{15}$$

易知方程组(15)等价于★-Stein 矩阵方程:

$$\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{HY}^*\boldsymbol{B}=\boldsymbol{F},\tag{16}$$

其中,$\mathrm{vec}(\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{y}_R+\mathrm{i}\boldsymbol{y}_I$, $\mathrm{vec}(\boldsymbol{F})=\boldsymbol{f}_R+\mathrm{i}\boldsymbol{f}_I$。因此,矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 是非奇异的充分必要条件是方程(16)对任意右端项 $\boldsymbol{F}$ 均有唯一解。由 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{H}}$ 及引理 3 可得,方程(16)对任意右端项均有唯一解的充要条件是谱集 $\lambda(\boldsymbol{S})$ 是★-非互倒的。因此,矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 是非奇异的。

由条件 $\boldsymbol{I}_m=\boldsymbol{AH}$,可得

$$\boldsymbol{A}_R\boldsymbol{H}_R-\boldsymbol{A}_I\boldsymbol{H}_I=\boldsymbol{I}_m,\tag{17}$$

$$\boldsymbol{A}_I\boldsymbol{H}_R+\boldsymbol{A}_R\boldsymbol{H}_I=0。\tag{18}$$

令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{x}}$,结合等式(17)和(18),则方程(5)可写为

$$\boldsymbol{AQ}\tilde{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{Q}_{11}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{Q}_{21} & \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{Q}_{12}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{Q}_{22}\\ \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{Q}_{11}+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{Q}_{21} & \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{Q}_{12}+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{Q}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}}_R\\ \tilde{\boldsymbol{x}}_I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}_R\\ \boldsymbol{d}_I\end{bmatrix},\tag{19}$$

其中

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{Q}_{11}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{Q}_{21}=\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{A}_R-(\boldsymbol{B}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_R+\boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_I)\otimes\boldsymbol{B}_R^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{B}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_I-\boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_R)\otimes\boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}},\\
\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{Q}_{12}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{Q}_{22}=-\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{A}_I-(\boldsymbol{B}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_I-\boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_R)\otimes\boldsymbol{B}_R^{\mathrm{T}}-(\boldsymbol{B}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_R-\boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_I)\otimes\boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}},\\
\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{Q}_{11}+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{Q}_{21}=\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{A}_I+(\boldsymbol{B}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_I-\boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_R)\otimes\boldsymbol{B}_R^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{B}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_R+\boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_I)\otimes\boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}},\\
\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{Q}_{12}+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{Q}_{22}=\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{A}_R-(\boldsymbol{B}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_R+\boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_I)\otimes\boldsymbol{B}_R^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{B}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_I-\boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_R)\otimes\boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}},\\
\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}}_R\\ \tilde{\boldsymbol{x}}_I\end{bmatrix}=\boldsymbol{Q}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_R\\ \boldsymbol{x}_I\end{bmatrix}。
\end{gathered}
\tag{20}
$$

记 $\tilde{\boldsymbol{x}}_R=\mathrm{vec}(\widetilde{\boldsymbol{X}}_R)$, $\tilde{\boldsymbol{x}}_I=\mathrm{vec}(\widetilde{\boldsymbol{X}}_I)$。分离矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{X}}=\widetilde{\boldsymbol{X}}_R+\mathrm{i}\widetilde{\boldsymbol{X}}_I$,在方程(14)两边同时应用 vec 算子,利用上述性质可得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{vec}(\boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{B}^*\widetilde{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}})=&[\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{A}_R-(\boldsymbol{B}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_R+\boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_I)\otimes\boldsymbol{B}_R^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{B}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_I-\boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_R)\otimes\boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}}]\tilde{\boldsymbol{x}}_R\\
&-[\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{A}_I+(\boldsymbol{B}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_I-\boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_R)\otimes\boldsymbol{B}_R^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{B}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_R+\boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_I)\otimes\boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}}]\tilde{\boldsymbol{x}}_I\\
&+\mathrm{i}[\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{A}_I+(\boldsymbol{B}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_I-\boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_R)\otimes\boldsymbol{B}_R^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{B}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_R+\boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_I)\otimes\boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}}]\tilde{\boldsymbol{x}}_R\\
&+\mathrm{i}[\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{A}_R-(\boldsymbol{B}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_R+\boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_I)\otimes\boldsymbol{B}_R^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{B}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_I-\boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_R)\otimes\boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}}]\tilde{\boldsymbol{x}}_I,
\end{aligned}
\tag{21}
$$

$$
\mathrm{vec}(\boldsymbol{D})=\boldsymbol{d}_R+\mathrm{i}\boldsymbol{d}_I。\tag{22}
$$

根据式(19)、(21)及(22)可知,方程(14)与方程组(19)等价,亦等价于方程(3)。

利用 vec 算子,可得

$$
\mathrm{vec}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{x}_R+\mathrm{i}\boldsymbol{x}_I,\tag{23}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{vec}(\widetilde{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{H}\widetilde{\boldsymbol{X}}^*\boldsymbol{B})=&[\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{P}_{nm}(\boldsymbol{H}_R\otimes\boldsymbol{B}_R^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{H}_I\otimes\boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}})]\tilde{\boldsymbol{x}}_R\\
&-\boldsymbol{P}_{nm}(\boldsymbol{H}_R\otimes\boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{H}_I\otimes\boldsymbol{B}_R^{\mathrm{T}})\tilde{\boldsymbol{x}}_I\\
&-\mathrm{i}\boldsymbol{P}_{nm}(\boldsymbol{H}_R\otimes\boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{H}_I\otimes\boldsymbol{B}_R^{\mathrm{T}})\tilde{\boldsymbol{x}}_R\\
&+\mathrm{i}[\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{P}_{nm}(\boldsymbol{H}_R\otimes\boldsymbol{B}_R^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{H}_I\otimes\boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}})]\tilde{\boldsymbol{x}}_I=\boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{x}}。
\end{aligned}
\tag{24}
$$

由等式(20)、(23)及(24)可知,$\boldsymbol{X}=\widetilde{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{H}\widetilde{\boldsymbol{X}}^*\boldsymbol{B}$。证毕。

本文的主要结果详见表 1。

表 1 ∗-Sylvester 矩阵方程 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{B}=\boldsymbol{D}$ 的等价矩阵方程

Table 1 Equivalent equation of ∗-Sylvester matrix equation $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{B}=\boldsymbol{D}$

情况	条件	结论
$m\geqslant n$	$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{S}\bar{\boldsymbol{A}}$ $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{S})$是★-非互倒的	广义 Sylvester 矩阵方程 $\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{XS}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}^*\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}$
$m<n$	$\boldsymbol{I}_m=\boldsymbol{AH}$, $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{H}}$ $\lambda(\boldsymbol{S})$是★-非互倒的	广义 Sylvester 矩阵方程 $\boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{B}^*\widetilde{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{D}$

3 结论

本文得到∗-Sylvester 矩阵方程的等价转换形式,并证明其可以等价转换为广义 Sylvester 矩阵方程。目前,有关广义 Sylvester 矩阵方程的直接求解法和迭代求解法以及数值算法已大量存在,本文的结果有助于我们今后进一步研究∗-Sylvester 矩阵方程的数学特征和求解方法,并为∗-Sylvester 矩阵方程构造合适的数值算法提供思路。

参考文献:

[1] HOFER M, FINGER N, KOVACS G, et al. Finite-element simulation of wave propagation in periodic piezoelectric SAW structures[J]. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, 2006, 53(6):1192-1201.

[2] BYERS R, KRESSNER D. Structured condition numbers for invariant subspaces[J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 2006, 28(2):326-347.

[3] DAI Liyi. Singular Control Systems[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1989.

[4] DUAN Guangren. The solution to the matrix equation $\boldsymbol{AV}+\boldsymbol{BW}=\boldsymbol{EVJ}+\boldsymbol{R}$[J]. Applied Mathematics Letters, 2004, 17(10): 1197-1202.

[5] FRANK P M. Fault diagnosis in dynamic systems using analytical and knowledge-based redundancy: a survey and some new

results[J]. Automatica, 1990, 26(3):459-474.
[6] CHIANG C Y, CHU E K W, LIN W W. On the ★-Sylvester equation $\boldsymbol{AX} \pm \boldsymbol{X}^{\star} \boldsymbol{B}^{\star} = \boldsymbol{C}$[J]. Applied Mathematics and Computation, 2012, 218(17):8393-8407.
[7] KE Yifen, MA Changfeng. The alternating direction methods for solving the Sylvester-type matrix equation $\boldsymbol{AXB}+\boldsymbol{CXD}=\boldsymbol{E}$[J]. Journal of Computational Mathematics, 2017, 35(5):620-641.
[8] DE TERÁN F, DOPICO F. Consistency and efficient solution of the Sylvester equation for ∗-congruence[J]. The Electronic Journal of Linear Algebra, 2011, 22:849-863.
[9] DE TERÁN F, IANNAZZO B. Uniqueness of solution of a generalized ∗-Sylvester matrix equation[J]. Linear Algebra and its Applications, 2016, 493:323-335.
[10] 吴玉玲,郑佳莉,柯艺芬,等. 求解四元数矩阵方程 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{XB}=\boldsymbol{C}$ 的全局拟极小残量法[J]. 山东大学学报(理学版),2025, 60(12):60-74.
WU Yuling, ZHENG Jiali, KE Yifen, et al. Global quasi-minimal residual method for solving quaternion matrix equation $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{XB}=\boldsymbol{C}$[J]. Journal of Shandong University(Natural Science), 2025, 60(12):60-74.
[11] ZHANG Huamin, YIN Hongcai. New proof of the gradient-based iterative algorithm for a complex conjugate and transpose matrix equation[J]. Journal of the Franklin Institute, 2017, 354(16):7585-7603.
[12] DING Feng, CHEN Tongwen. On iterative solutions of general coupled matrix equations[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2006, 44(6):2269-2284.
[13] DING F, PETER X L, DING J. Iterative solutions of the generalized Sylvester matrix equations by using the hierarchical identification principle[J]. Applied Mathematics and Computation, 2008, 197(1):41-50.
[14] OOZAWA M, SOGABE T, MIYATAKE Y, et al. On a relationship between the T-congruence Sylvester equation and the Lyapunov equation[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2018, 329:51-56.
[15] SATAKE Y, OOZAWA M, SOGABE T, et al. Relation between the T-congruence Sylvester equation and the generalized Sylvester equation[J]. Applied Mathematics Letters, 2019, 96:7-13.
[16] 马昌凤,柯艺芬,谢亚君. 广义★-Sylvester 矩阵方程的重新表述[J]. 山西大学学报(自然科学版),2025,48(4):700-704
MA Changfen, KE Yifen, XIE Yajun. The reformulation of a generalized ★-Sylvester matrix equation[J]. Journal of Shanxi University (Natural Science Edition), 2025, 48(4):700-704.
[17] ZHANG Huamin, DING Feng. On the Kronecker products and their applications[J]. Journal of Applied Mathematics, 2013, 1:1-8.
[18] KRESSNER D, SCHRÖDER C, WATKINS D S. Implicit QR algorithms for palindromic and even eigenvalue problems[J]. Numerical Algorithms, 2009, 51(2):209-238.

(编辑:胡春燕)

(上接第 19 页)

[19] DENG S N, FEI C, FEI W Y, et al. Stability equivalence between the stochastic differential delay equations driven by G-Brownian motion and the Euler−Maruyama method[J]. Applied Mathematics Letters, 2019, 96:138-146.
[20] YUAN H Y. Convergence and asymptotical stability of numerical solutions for semi linear stochastic delay differential equations driven by G-Brownian motion[EB/OL]. (2024-01-01)[2025-05-15]. https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2024esoar.62810906Y/abstract.
[21] PENG S G. G-expectation, G-Brownian motion and related stochastic calculus of Itô type[C]//Stochastic Analysis and Application. Berlin: Springer, 2007:541-567.
[22] DENIS L, HU M S, PENG S G. Function spaces and capacity related to a sublinear expectation: application to G-Brownian motion paths[J]. Potential Analysis, 2011, 34(2):139-161.
[23] PENG S G. Nonlinear expectations and stochastic calculus under uncertainty: with robust CLT and G-Brownian motion[M]. Berlin: Springer, 2019:49-89.
[24] 王丙均,袁明霞,张慧. 局部非利普希茨条件下 G-随机微分方程的解的逼近[J]. 南京师大学报(自然科学版),2016,39(3):26-32.
WANG Bingjun, YUAN Mingxia, ZHANG Hui. Successive approximation to solutions of G-stochastic differential equations with local non-Lipschitz conditions[J]. Journal of Nanjing normal University (Natural Science Edition), 2016, 39(3):26-32.

(编辑:胡春燕)