山东大学学报(理学版)2026 年 2 月 第 61 卷 第 2 期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.61, No.2, 2026 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2026)02-0037-06 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2024.194

闭值域算子的 Moore-Penrose 逆的谱分解

庞永锋,杜亚伟,岳慧慧
(西安建筑科技大学理学院, 陕西 西安 710055)

摘要:首先证明算子 Moore-Penrose 逆的几种定义之间的等价性。其次利用自伴算子的谱分解,给出闭值域算子 Moore-Penrose逆的谱分解。最后利用算子 Moore-Penrose 逆给出最佳逼近集的一般表示,证明最佳逼近集是一个仿射流形。
关键词:算子 Moore-Penrose 逆;谱分解;仿射流形
中图分类号:O177 **文献标志码**:A
引用格式:庞永锋,杜亚伟,岳慧慧. 闭值域算子的 Moore-Penrose 逆的谱分解[J]. 山东大学学报(理学版),2026,61(2):37-42.

Spectral decomposition of the Moore-Penrose inverse of operator with closed range

PANG Yongfeng, DU Yawei, YUE Huihui
(School of Science, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055, Shaanxi, China)

Abstract: First, this paper proves the equivalence among several definitions of the Moore-Penrose inverse of an operator. Second, by utilizing the spectral decomposition of a self-adjoint operator, we provide the spectral decomposition of the Moore-Penrose inverse of an operator with a closed range. Finally, by employing the Moore-Penrose inverse of an operator, we offer a general representation of the best approximation set, thereby proving that the best approximation set is an affine manifold.
Key words: Moore-Penrose inverse of operator; spectral decomposition; affine manifolds

1 引言和算子 Moore-Penrose 逆的定义

设 $\mathscr{H}$ 是一个 Hilbert 空间,$\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 是 $\mathscr{H}$ 上的所有有界线性算子构成的代数,I 表示 $\mathscr{H}$ 上的恒等算子。设 $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$,用 $\mathscr{N}(T)$ 和 $\mathscr{R}(T)$ 分别表示算子 T 的核空间与像空间,T^* 表示算子 T 的伴随算子。设 V_λ 表示算子 T 的特征值 λ 所对应的特征子空间。

设 V 是 Hilbert 空间的一个线性子空间,$\bar{V}$ 和 $V^\perp$ 分别表示 V 的正交补子空间和闭包。

1903 年,Fredholm 在研究积分算子的时候提出积分算子的广义逆。1920 年,Moore[1] 利用投影算子给出了复矩阵上的广义逆。1955 年,Penrose[2] 提出广义逆矩阵的概念且证明 Moore 提出的广义逆,用下面 4 个矩阵方程的唯一解 X 表示:

$$TXT=T,\quad XTX=X,\quad (TX)^*=TX,\quad (XT)^*=XT。$$

为了纪念 Moore 和 Penrose 在广义逆上做出的贡献,将上述矩阵的广义逆称作 Moore-Penrose 广义逆。后来,矩阵的 Moore-Penrose 逆广泛的应用于数学的各个领域,例如最优化问题、数据分析和线性积分方程等。学者 Barata[3] 提出了矩阵 Moore-Penrose 逆的谱分解定理以及利用矩阵的 Moore-Penrose 逆给出最佳逼近集的一个矩阵表示。

定义 1[1] 设 V 是一个实线性空间,M 是 V 的一个线性子空间,L 是 V 的一个非空子集。如果存在 $\alpha\in V-M$ 使得 $L=\alpha+M$,则称 L 是 V 中的一个仿射流形。

收稿日期:2024-05-29; **网络出版时间**:2025-06-11
基金项目:陕西省自然科学基金项目(2023-JC-YB-627); 国家自然科学基金资助项目(12061031)
第一作者:庞永锋(1975—),男,教授,博士,研究方向为算子代数与算子理论. E-mail:pangyongfengyw@ xauat.edu.cn

引理 1[1] 设 L 是线性空间 V 的一个非空子集,则 L 是一个仿射流形当且仅当

$$\forall \alpha,\beta\in L,\quad \forall \lambda,\mu\in F,\quad \lambda+\mu=1\Rightarrow\lambda\alpha+\mu\beta\in L。$$

引理 2[1] 如果 $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$,则 $\mathscr{N}(T)^{\perp}=\overline{\mathscr{R}(T^{*})}$, $\mathscr{N}(T^{*})=\mathscr{R}(T)^{\perp}$。

下面利用空间分解的方法给出一个无限维 Hilbert 空间上算子 Moore–Penrose 逆的定义。

设 $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$,定义 $\tilde{T}:N(T)^{\perp}\rightarrow\mathscr{R}(T)$; $x\mapsto Tx$。故 $\tilde{T}$ 是双射,进而 $\tilde{T}$ 的逆存在 $(\tilde{T})^{-1}:\mathscr{R}(T)\rightarrow\mathscr{N}(T)^{\perp}$。如果 T 是闭值域算子,则将全空间 $\mathscr{H}$ 分解为 $\mathscr{R}(T)\oplus\mathscr{R}(T)^{\perp}$。在此基础上,将 $(\tilde{T})^{-1}$ 延拓到全空间上为

$$T^{+}:\mathscr{H}\rightarrow\mathscr{H};\quad x+y\mapsto\tilde{T}^{-1}(x),\quad x\in\mathscr{R}(T),\quad y\in\mathscr{R}(T)^{\perp},\tag{1}$$

称算子 T^{+} 为算子 T 的 Moore–Penrose 逆。

因此

$$\mathscr{N}(T^{+})=\mathscr{R}(T)^{\perp}=\mathscr{N}(T^{*}),\quad \mathscr{R}(T^{+})=\mathscr{N}(T)^{\perp}=\overline{\mathscr{R}(T^{*})}。$$

算子的 Moore–Penrose 一经提出,便有许多学者通过研究算子 Moore–Penrose 自身的性质,给出了某些特殊算子 Moore–Penrose 逆的表示[4-6]。另外,Fongi 和 Gonzalez[7] 通过算子的 Moore–Penrose 逆来描述算子偏序以及研究无限维空间上的最佳逼近集的刻画。

本文旨在研究无限维 Hilbert 空间上算子 Moore–Penrose 逆的谱分解定理以及通过算子的 Moore–Penrose逆给出最佳逼近集的刻画。

下面给出算子 Moore–Penrose 逆的一些等价刻画。

性质 1 设 $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$。以下 3 个陈述等价。

(1) 设 T 是一个闭值域算子,

$$T^{+}(x+y)=(T)^{-1}(x),\quad x\in\mathscr{R}(T),\quad y\in\mathscr{R}(T)^{\perp},\quad \mathscr{H}=\mathscr{R}(T)\oplus\mathscr{R}(T)^{\perp}。$$

(2) T^{+} 是惟一一个满足下面两个条件的算子:

(2.1) TT^{+} 是从 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{R}(T)$ 的正交投影,T 是一个闭值域算子;

(2.2) $T^{+}T$ 是从 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{R}(T^{+})$ 的正交投影,T^{+} 是一个闭值域算子。

(3) T^{+} 是惟一一个满足下面 4 个条件的算子:

$$TT^{+}T=T,\quad T^{+}TT^{+}=T^{+},\quad (T^{+}T)^{*}=T^{+}T,\quad (TT^{+})^{*}=TT^{+}。$$

证明 (1)⇒(2)。$\forall z\in\mathscr{H}$,则存在惟一的 $x\in\mathscr{R}(T)$, $y\in\mathscr{R}(T)^{\perp}$ 使得 $z=x+y$。因此

$$(TT^{+})(z)=T(T^{+}(z))\in\mathscr{R}(T)$$

且

$$z-(TT^{+})(z)=z-T(T^{+}(x+y))=z-T((\tilde{T})^{-1}(x))=x+y-x=y\in\mathscr{R}(T)^{\perp},$$

进而 TT^{+} 是从 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{R}(T)$ 的正交投影算子。

由于 $\mathscr{R}(T^{+})=\mathscr{N}(T)^{\perp}$,因此 T^{+} 是一个闭值域算子。由上述论证可得 TT^{+} 是从 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{R}(T)$ 的正交投影,则 $\forall z\in\mathscr{H}$ 有 $T(z-(T^{+}T)(z))=Tz-(TT^{+})(Tz)=Tz-Tz=0$。故 $z\in\mathscr{N}(T)=\mathscr{R}(T^{+})^{\perp}$。由于 $(T^{+}T)(z)=T^{+}(Tz)\in\mathscr{R}(T^{+})$,因此 $T^{+}T$ 是从 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{R}(T^{+})$ 的正交投影算子。

(2)⇒(3)。设 TT^{+} 是从 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{R}(T)$ 的正交投影算子,$T^{+}T$ 是从 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{R}(T^{+})$ 的正交投影算子。因此

$$(T^{+}T)^{*}=T^{+}T,\quad (TT^{+})^{*}=TT^{+}。\quad \forall x\in\mathscr{H},$$

则

$$Tx\in\mathscr{R}(T),\quad T^{+}x\in\mathscr{R}(T^{+})$$

且

$$(TT^{+}T)x=(TT^{+})(Tx)=Tx,\quad (T^{+}TT^{+})x=(T^{+}T)(T^{+}x)=T^{+}x,$$

由 x 的任意性可得,$TT^{+}T=T$, $T^{+}TT^{+}=T$。

(3)⇒(2)。由于 $(TT^{+})^{2}=(TT^{+}T)T^{+}=TT^{+}$ 且 TT^{+} 是自伴算子,因此 TT^{+} 是正交投影算子。类似地,$T^{+}T$ 是正交投影算子。由 Douglas 值域包含定理可得,$\mathscr{R}(TT^{+})\subseteq\mathscr{R}(T)$。由于 $T=TT^{+}T=(TT^{+})T$ 以及 Douglas

值域包含定理可得,$\mathscr{R}(T)\subseteq\mathscr{R}(TT^+)$,因此 $\mathscr{R}(T)=\mathscr{R}(TT^+)$。故 TT^+是从 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{R}(T)$ 的正交投影算子且 T 是一个闭值域算子。

类似地,T^+T 是从 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{R}(T^+)=\mathscr{R}(T^+T)$ 的正交投影算子,T^+是一个闭值域算子。

(2)+(3)⇒(1)。设 T^+满足条件(2)和条件(3),则

$$T^*=(T(T^+T))^*=(T^+T)^*T^*=T^+TT^*=(T^+T)T^*,$$

因此,$\mathscr{N}(T)^\perp=\mathscr{R}(T^*)\subseteq\mathscr{R}(T^+T)$。

设 $x\in\mathscr{R}(T)$,则存在 $z\in\mathscr{N}(T)^\perp$ 使得 $x=Tz$。由 T^+T 是从 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{R}(T^+)$ 的正交投影算子,则 $T^+x=T^+(Tz)=(T^+T)z=z$。由 $\tilde{T}$ 的定义可得

$$(\tilde{T})^{-1}x=(\tilde{T})^{-1}(Tz)=(\tilde{T})^{-1}(\tilde{T}z)=(\tilde{T}^{-1}\tilde{T})z=I(z)=z=T^+(x)。$$

设 $y\in\mathscr{R}(T)^\perp$,由条件(2.1)可得,$(TT^+)y=0$。由条件(3)可得

$$T^+y=(T^+TT^+)y=T^+((TT^+)y)=T^+(0)=0。$$

因此,对于任意的 $x\in\mathscr{R}(T)$, $y\in\mathscr{R}(T)^\perp$ 有 $T^+(x+y)=(\tilde{T})^{-1}(x)$。

推论 1　设 $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 是一个闭值域算子,则 T^* 是闭值域算子且 $(T^*)^+=(T^+)^*$。进而

$$\mathscr{R}(T^+)=\mathscr{N}(T)^\perp=\mathscr{R}(T^*)。$$

本文用到下面性质,它的证明可以查阅文献[8]。

性质 2　设 $A,B\in\mathscr{B}(H)$ 是两个闭值域算子,则

$$(AB)^+=B^+A^+,\quad (A^+)^+=A,\quad (\lambda A)^+=\lambda^{-1}A^+,\quad \lambda\in\mathbf{C}\setminus\{0\}。$$

设 $T\in\mathscr{B}(H)$ 是一个闭值域算子,则 $T^+=T^+(T^+)^*T^*$, $T^+=T^+(T^+)^*T^+$, $T=TT^*(T^+)^*$, $T=(T^+)^*T^*T$, $T^*=T^*TT^+$, $T^*=T^+TT^*$。

下面讨论算子 Moore-Penrose 逆的值域和核空间的相关性质。

性质 3　设 $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 是一个闭值域算子,$P_1=I-T^+T$, $P_2=I-TT^+$,则

$$\mathscr{N}(T)=\mathscr{R}(P_1),\quad \mathscr{R}(T^+)=\mathscr{N}(P_1),\quad \mathscr{N}(T^+)=\mathscr{R}(P_2),\quad \mathscr{R}(T)=\mathscr{N}(P_2),\quad \mathscr{N}(T^+)=\mathscr{R}(T)^\perp。$$

证明　由性质 1 及推论 1,则 T^+T 是正交投影。故

$$\mathscr{R}(P_1)=\mathscr{N}(T^+T)=\mathscr{R}(T^+T)^\perp=\mathscr{R}(T^+)^\perp=\mathscr{N}(T)。$$

进而

$$\mathscr{R}(T^+)=\mathscr{R}(P_1)^\perp=\mathscr{N}(P_1)。$$

类似地,

$$\mathscr{R}(P_2)=\mathscr{N}(TT^+)=\mathscr{R}(TT^+)^\perp=\mathscr{R}(T)^\perp=\mathscr{R}((T^*)^+)^\perp=\mathscr{R}((T^+)^*)^\perp=\mathscr{N}(T^+),$$

$$\mathscr{N}(P_2)=\mathscr{R}(P_2)^\perp=(\mathscr{R}(T)^\perp)^\perp=\mathscr{R}(T)。$$

由推论 1 及引理 2,则 $\mathscr{N}(T^+)=\mathscr{R}((T^+)^*)^\perp=\mathscr{R}((T^*)^+)^\perp=\mathscr{R}(T^{**})^\perp=\mathscr{R}(T)^\perp$。

2　闭值域紧算子 Moore-Penrose 逆的谱分解定理

当$(TT^*)^{-1}$存在时,由 T^+的唯一性可得 $T^+=T^*(TT^*)^{-1}$。然而,当$(TT^*)^{-1}$不存在时,如何刻画算子 T 的 Moore-Penrose 逆。

引理 3　设 $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$,若存在 $\mu\in\mathbf{R}$ 使得 $TT^*+\mu I$ 和 $T^*T+\mu I$ 可逆,则

$$T^*(TT^*+\mu I)^{-1}=(T^*T+\mu I)^{-1}T^*。$$

证明　由于

$$\begin{aligned}(T^*T)T^*(TT^*+\mu I)^{-1}&=T^*(TT^*)(TT^*+\mu I)^{-1}\\&=T^*((TT^*+\mu I)-\mu I)(TT^*+\mu I)^{-1}\\&=T^*(I-\mu(TT^*+\mu I)^{-1})=T^*-\mu T^*(TT^*+\mu I)^{-1},\end{aligned}$$

因此

$$(T^*T+\mu I)T^*(TT^*+\mu I)^{-1}=(T^*T)T^*(TT^*+\mu I)^{-1}+\mu T^*(TT^*+\mu I)^{-1}=T^*,$$

进而

$$T^*(TT^*+\mu I)^{-1}=(T^*T+\mu I)^{-1}T^*。$$

由于算子 TT^* 是一个自伴算子,因此采用谱测度构造算子 TT^* 的谱分解。

首先,介绍自伴算子的谱定理。

定义 2[9] 设 X 是一个非空集合,Ω 是 X 的子集构成一个 σ-代数,$\mathscr{H}$ 是一个 Hilbert 空间。如果映射 $E:\Omega\to\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 满足

(1) $\forall A\in\Omega$ 恒有 $E(A)$ 是 $\mathscr{H}$ 上的投影算子;

(2) $E(\varnothing)=0,\ E(X)=I$;

(3) $\forall A_1,A_2\in\Omega$ 恒有 $E(A_1\cap A_2)=E(A_1)E(A_2)$;

(4) $\forall\{A_n\}\subseteq\Omega$ 且 $A_n\cap A_m=\varnothing,\ n\neq m$ 恒有 $E(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}E(A_n)$,

则称 E 是 $(X,\Omega,\mathscr{H})$ 上的谱测度。

引理 4[9] 设 E 是 $(X,\Omega,\mathscr{H})$ 上的谱测度,$\rho:\mathscr{B}(X,\Omega)\to\mathscr{B}(\mathscr{H})$。若 $\forall\phi\in B(X,\Omega)$ 恒有 $\rho(\phi)=\int\phi(\lambda)\mathrm{d}E$, 则 ρ 是 $B(X,\Omega)$ 上的一个表示,$\rho(\phi)$ 是一个正规算子。

引理 5[9] 设 $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 是一个正规算子,则存在唯一定义在 $\sigma(T)$ 上的 Borel σ-代数上的谱测度 E 使得 $T=\int_{\sigma(T)}\lambda\mathrm{d}E$。

通常称上式为算子 T 的谱分解。

引理 6[10] 如果 $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 是一个闭值域算子,那么存在 $m>0$ 使得对于任意的 $x\in\mathscr{N}(T)^{\perp}$ 有

$$\|Tx\|\geqslant m\|x\|。$$

其次简要介绍谱集的分类,便于引理的叙述。算子的谱集一般可以区分为下面几种。

(1) $\sigma_p(T)=\{\lambda\in\mathbf{C}:\mathscr{N}(\lambda I-T)\neq\{0\}\}$;

(2) $\sigma_c(T)=\{\lambda\in\mathbf{C}:\mathscr{N}(\lambda I-T)=\{0\},\ \mathscr{R}(\lambda I-T)\neq H,\ \overline{\mathscr{R}(\lambda I-T)}=\mathscr{H}\}$;

(3) $\sigma_r(T)=\{\lambda\in\mathbf{C}:\mathscr{N}(\lambda I-T)=\{0\},\ \overline{\mathscr{R}(\lambda I-T)}\neq\mathscr{H}\}$。

分别称它们为算子 T 的点谱、连续谱和剩余谱,它们的并集称为算子 T 的谱集。

引理 7[9] 设 $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 是一个自伴算子。

(1) 自伴算子没有剩余谱;

(2) T 是闭值域的当且仅当 $0\notin\sigma_c(T)$。

定理 1 如果 $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 是一个闭值域算子,那么

$$T^+=T^*\left(\lim_{n\to\infty}\int_{\sigma(TT^*)\setminus\{0\}}(\lambda+\mu_n)^{-1}\mathrm{d}E\right)。$$

证明 首先进行空间分解 $\mathscr{H}=\mathscr{N}(TT^*)\oplus\mathscr{N}(TT^*)^{\perp}=\mathscr{N}(TT^*)\oplus\mathscr{R}(TT^*)=\mathscr{N}(TT^*)\oplus\mathscr{R}(T)$。

设 $S=TT^*|_{\mathscr{R}(T)}$。由于引理 6,因此存在 $m>0$ 使得对于任意的 $x\in\mathscr{R}(TT^*)=\mathscr{R}(T)$ 有

$$\langle Sx,x\rangle=\langle TT^*x,x\rangle=\langle T^*x,T^*x\rangle=\|T^*x\|^2\geqslant m^2\|x\|^2,$$

故 S 是一个正算子,$\sigma(S)\subseteq(0,\infty)$。

设 $l=\inf\{\lambda\neq0:\lambda\in\sigma_c(TT^*)\}$。由引理 7,则 $0\notin\sigma_c(TT^*)$,故 $l>0$。取数列 $\{\mu_n\}\subseteq(0,l)$ 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\mu_n=0$。进而,对于任意的 $n\in\mathbf{N}$ 有 $TT^*-\mu_nI$ 是可逆的。

由于 TT^* 是一个自伴算子,因此 TT^* 的谱分解形式为

$$TT^*=\int_{\sigma(TT^*)\setminus\{0\}}\lambda\mathrm{d}E,\quad I=\int_{\sigma(TT^*)\setminus\{0\}}\mathrm{d}E,$$

进而 $TT^*+\mu_nI=\int_{\sigma(TT^*)\setminus\{0\}}(\lambda+\mu_n)\mathrm{d}E$。

若 $(TT^*+\mu_nI)^{-1}=\int_{\sigma(TT^*)\setminus\{0\}}(\lambda+\mu_n)^{-1}\mathrm{d}E$,则

$$\lim_{n\to\infty}(T^*(TT^*+\mu_nI)^{-1})=\lim_{n\to\infty}\left(T^*\int_{\sigma(TT^*)\setminus\{0\}}(\lambda+\mu_n)^{-1}\mathrm{d}E\right)。$$

设 $W=\lim\limits_{n\to\infty}(T^*(TT^*+\mu_nI)^{-1})$,则

$$TWT=T\left(\lim_{n\to\infty}\left(T^*\int_{\sigma(TT^*)\setminus\{0\}}(\lambda+\mu_n)^{-1}\mathrm{d}E\right)\right)T=\lim_{n\to\infty}\left((TT^*)\int_{\sigma(TT^*)\setminus\{0\}}(\lambda+\mu_n)^{-1}\mathrm{d}E\right)T$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\int_{\sigma(TT^*)\setminus\{0\}}\lambda\mathrm{d}E\int_{\sigma(TT^*)\setminus\{0\}}(\lambda+\mu_n)^{-1}\mathrm{d}E\right)T=\lim_{n\to\infty}\left(\int_{\sigma(TT^*)\setminus\{0\}}\lambda(\lambda+\mu_n)^{-1}\mathrm{d}E\right)T$$
$$=\left(\int_{\sigma(TT^*)\setminus\{0\}}\lambda\lim_{n\to\infty}(\lambda+\mu_n)^{-1}\mathrm{d}E\right)T=\left(\int_{\sigma(TT^*)\setminus\{0\}}\mathrm{d}E\right)T=T$$

$$\begin{aligned}WTW&=WT\lim_{n\to\infty}\left(T^*\int_{\sigma(TT^*)\setminus\{0\}}(\lambda+\mu_n)^{-1}\mathrm{d}E\right)\\&=W\lim_{n\to\infty}\left((TT^*)\int_{\sigma(TT^*)\setminus\{0\}}(\lambda+\mu_n)^{-1}\mathrm{d}E\right)\\&=W\lim_{n\to\infty}\left(\int_{\sigma(TT^*)\setminus\{0\}}\lambda\mathrm{d}E\int_{\sigma(TT^*)\setminus\{0\}}(\lambda+\mu_n)^{-1}\mathrm{d}E\right)\\&=W\lim_{n\to\infty}\left(\int_{\sigma(TT^*)\setminus\{0\}}\lambda(\lambda+\mu_n)^{-1}\mathrm{d}E\right)\\&=W\left(\int_{\sigma(TT^*)\setminus\{0\}}\lambda\lim_{n\to\infty}(\lambda+\mu_n)^{-1}\mathrm{d}E\right)\\&=W\left(\int_{\sigma(TT^*)\setminus\{0\}}\mathrm{d}E\right)\\&=W\end{aligned}$$

由于

$$TW=T\lim_{n\to\infty}\left(T^*\int_{\sigma(TT^*)\setminus\{0\}}(\lambda+\mu_n)^{-1}\mathrm{d}E\right)=\lim_{n\to\infty}\left((TT^*)\int_{\sigma(TT^*)\setminus\{0\}}(\lambda+\mu_n)^{-1}\mathrm{d}E\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\int_{\sigma(TT^*)\setminus\{0\}}\lambda\mathrm{d}E\int_{\sigma(TT^*)\setminus\{0\}}(\lambda+\mu_n)^{-1}\mathrm{d}E\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\int_{\sigma(TT^*)\setminus\{0\}}\lambda(\lambda+\mu_n)^{-1}\mathrm{d}E\right)$$
$$=\int_{\sigma(TT^*)\setminus\{0\}}\mathrm{d}E=I_{\mathscr{R}(T)}$$

且

$$(WT)^*=\left(\lim_{n\to\infty}\left(T^*\int_{\sigma(TT^*)\setminus\{0\}}(\lambda+\mu_n)^{-1}\mathrm{d}E\right)T\right)^*=T^*\left(\lim_{n\to\infty}T^*\int_{\sigma(TT^*)\setminus\{0\}}(\lambda+\mu_n)^{-1}\mathrm{d}E\right)^*$$
$$=T^*\lim_{n\to\infty}\left(\int_{\sigma(TT^*)\setminus\{0\}}(\lambda+\mu_n)^{-1}\mathrm{d}E\right)^*T=T^*\left(\lim_{n\to\infty}\int_{\sigma(TT^*)\setminus\{0\}}(\lambda+\mu_n)^{-1}\mathrm{d}E\right)T$$
$$=\left(\lim_{n\to\infty}T^*\int_{\sigma(TT^*)\setminus\{0\}}(\lambda+\mu_n)^{-1}\mathrm{d}E\right)T$$
$$=WT,$$

因此 TW 和 WT 是自伴算子,因此 $T^+=W$。

定理 2　设 $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 是一个闭值域算子。若 $S=TT^*|_{\mathscr{R}(T)}$,则 S 是可逆的且 $T^+=T^*S^{-1}$。

证明　由引理 6 可知,S 是下有界算子,进而 S 是单射且是稠值域算子。由于 T 是闭值域算子,则 S 是满射,进而 S 是双射。

设 $M=T^*S^{-1}$。经计算可得,$TMT=TT^*(TT^*)^{-1}T=I_{\mathscr{R}(T)}T=T$,

$$\begin{aligned}MTM&=T^*(TT^*|_{\mathscr{R}(T)})^{-1}TT^*(TT^*|_{\mathscr{R}(T)})^{-1}=T^*(TT^*|_{\mathscr{R}(T)})^{-1}TT^*|_{\mathscr{R}(T)}(TT^*|_{\mathscr{R}(T)})^{-1}\\&=T^*(TT^*|_{\mathscr{R}(T)})^{-1}I|_{\mathscr{R}(T)}=T^*(TT^*|_{\mathscr{R}(T)})^{-1}\\&=T^*S^{-1}=M。\end{aligned}$$

由于 $TM=TT^*(TT^*|_{\mathscr{R}(T)})^{-1}=TT^*|_{\mathscr{R}(T)}(TT^*|_{\mathscr{R}(T)})^{-1}=I_{\mathscr{R}(T)}$,因此 $(TM)^*=(I_{\mathscr{R}(T)})^*=I_{\mathscr{R}(T)}=TM$。

由于

$$\begin{aligned}(MT)^*&=(T^*(TT^*|_{\mathscr{R}(T)})^{-1}T)^*=T^*((TT^*|_{\mathscr{R}(T)})^{-1})^*T=T^*((TT^*|_{\mathscr{R}(T)})^*)^{-1}T\\&=T^*(TT^*|_{\mathscr{R}(T)})^{-1}T=MT,\end{aligned}$$

因此 MT 是自伴的。

综上可得,$T^+=M=T^*S^{-1}$。

推论 2　设 $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 是一个闭值域算子。若 $S=TT^*|_{\mathscr{R}(T)}$,则 $T^+=T^*\int_{\sigma(S)}\lambda^{-1}\mathrm{d}E$。

下面给出算子 Moore-Penrose 逆在最佳逼近中的应用。

为了后续叙述和证明的方便,给出如下的定义。

设 $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$, $y\in\mathscr{H}$,定义 $\mathrm{Arg}(T,y)=\{x\in\mathscr{H}:\min\|Tx-y\|\}$。

下面证明该集合是一个仿射流形。

定理 3 设 $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 是一个闭值域算子,$y\in\mathscr{H}$,则

$$\mathrm{Arg}(T,y)=T^{+}y+\mathscr{N}(T)。$$

证明 由于 T 是闭值域算子及最佳逼近定理[10]可得,存在唯一的 $y_0\in\mathscr{R}(T)$ 使得 $\|y-y_0\|=\min\limits_{x\in\mathscr{R}(T)}\|y-x\|$ 且 $y-y_0\perp\mathscr{R}(T)$。因此存在一个 $x_0\in\mathscr{H}$ 使得 $y_0=Tx_0$ 且 $\|y-Tx_0\|=\min\limits_{x\in\mathscr{R}(T)}\|y-x\|$。

断言 1 $x_1\in\mathrm{Arg}(T,y)$ 当且仅当 $x_0-x_1\in\mathscr{N}(T)$。

设 $x_1\in\mathrm{Arg}(T,y)$,则 $x_1\in\mathscr{H}$ 且 $\|y-Tx_1\|=\min\limits_{x\in\mathscr{R}(T)}\|y-x\|$。由最佳逼近定理[8]可得,$Tx_1=y_0=Tx_0$,即 $x_0-x_1\in\mathscr{N}(T)$。

设 $x_0-x_1\in\mathscr{N}(T)$,则 $Tx_1=Tx_0=y_0$,因此 $\|y-Tx_1\|=\|y-Tx_0\|=\min\limits_{x\in\mathscr{R}(T)}\|y-x\|$,故 $x_1\in\mathrm{Arg}(T,y)$。

断言 2 $T^{+}y\in\mathrm{Arg}(T,y)$。

由于 TT^{+} 是从 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{R}(T)$ 的正交投影,因此 $TT^{+}y=\{x\in\mathscr{R}(T):\min\|y-x\|\}$,故 $TT^{+}y=y_0$ 且 $T^{+}y\in\mathrm{Arg}(T,y)$。

下证 $\mathrm{Arg}(T,y)$ 是一个仿射流形。

因为 $\forall x_1,x_2\in\mathrm{Arg}(T,y)$, $\lambda\in[0,1]$,所以 $x_0-x_1\in\mathscr{N}(T)$ 且 $x_0-x_2\in\mathscr{N}(T)$。由于 $\mathscr{N}(T)$ 是一个子空间,因此 $x_0-(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)=\lambda(x_0-x_1)+(1-\lambda)(x_0-x_2)\in\mathscr{N}(T)$。由断言 3 可得,$\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\in\mathrm{Arg}(T,y)$。由引理 1 可得 $\mathrm{Arg}(T,y)$ 是一个仿射流形。

$TT^{+}y=y_0$,取 $\tilde{x}=T^{+}y$。由断言 2 可得

$$x_1\in\mathrm{Arg}(T,y)\Leftrightarrow\tilde{x}-x_1\in\mathscr{N}(T),$$

则

$$x_1\in\mathrm{Arg}(T,y)\Leftrightarrow x_1\in\tilde{x}+\mathscr{N}(T)\Leftrightarrow x_1\in T^{+}y+\mathscr{N}(T),$$

故 $\mathrm{Arg}(T,y)=T^{+}y+\mathscr{N}(T)$。

根据性质 3 有下面的推论。

推论 3 设 $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 是一个闭值域算子,$y\in\mathscr{H}$,则 $\mathrm{Arg}(T,y)=T^{+}y+\mathscr{R}(I-T^{+}T)$。

参考文献:

[1] FREDHOLM I. Sur une classe d'équations fonctionnelles[J]. Acta Mathematica, 1903, 27:365-390.

[2] PENROSE R. A generalized inverse for matrices[J]. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1955, 51(3):406-413.

[3] BARATA J C A, HUSSEIN M S. The Moore-Penrose pseudoinverse: a tutorial review of the theory[J]. Brazilian Journal of Physics, 2012, 42:146-165.

[4] 庞永锋,余维燕. 应用泛函分析基础[M]. 2 版. 西安:西安电子科技大学出版社,2022:220-230.
PANG Yongfeng, YU Weiyan. Fundamentals of applied functional analysis[M]. 2nd ed. Xi'an: Xidian University Press, 2022: 220-230.

[5] 杜鸿科,邓春源. 正交投影的积与差的 Moore-Penrose 逆[J]. 应用泛函分析学报,2006,8(2):104-109.
DU Hongke, DENG Chunyuan. Moore-Penrose inverses of products and differences of orthogonal projections[J]. Acta Analysis Functionalis Applicata, 2006, 8(2):104-109.

[6] DENG C Y, WEI Y M. Further results on the Moore-Penrose invertibility of projectors and its applications[J]. Linear and Multilinear Algebra, 2012, 60(1):109-129.

[7] FONGI G, GONZALEZ M C. Moore-Penrose inverse and partial orders on Hilbert space operators[J]. Linear Algebra and Its Applications. 2023, 674:1-20.

[8] TIAN Y G. A family of 512 reverse order laws for generalized inverses of a matrix product: a review[J]. Heliyon, 2020, 6(9):e04924.

[9] CONWAY J B. A course in functional analysis[M]. 2nd ed. Berlin: Springer, 1990.

[10] 王国荣. 矩阵与算子广义逆[M]. 北京:科学出版社,1994:95-130.
WANG Guorong. Generalized inverses of matrices and operators[M]. Beijing: Science Press, 1994:95-130.

(编辑:胡春燕)