

具有3个时滞的递归神经网络系统的稳定性分析

陈子杰,赵东霞*,王一言

(中北大学数学学院,山西太原030051)

摘要:研究由3个神经元组成的具有3个时滞的递归神经网络模型的稳定性。首先对系统在平衡点附近进行线性化处理,求得其特征方程为含有两个指数项的超越方程。其次利用指数型多项式零点分布定理和特征根分析方法,讨论系统稳定性切换的临界条件。最后建立保证系统稳定时参数需满足的充分性条件,并给出3个时滞参数的临界取值。

关键词:递归神经网络;多时滞;特征根分析方法;稳定性

中图分类号:O175

文献标志码:A

引用格式:陈子杰,赵东霞,王一言.具有3个时滞的递归神经网络系统的稳定性分析[J].山东大学学报(理学版),2026,61(2):43-49,57.

Stability analysis of recurrent neural network systems with three delays

CHEN Zijie, ZHAO Dongxia*, WANG Yiyang

(School of Mathematics, North University of China, Taiyuan 030051, Shanxi, China)

Abstract: The paper investigates the stability of a recursive neural network model composed of three neurons with three delays. Initially, the system is linearized around its equilibrium point, and the characteristic equation, which contains two exponential terms, is derived. Subsequently, the critical conditions for stability switch are discussed by zero-point distribution properties of exponential polynomials and methods of eigenvalue analysis. Finally, the sufficient conditions are given to ensure the system stable, and the critical values of time-delay are deduced.

Key words: recursive neural network; multiple time delays; eigenvalue analysis; stability

0 引言

递归神经网络的系统稳定性和分叉特性等动力学性能在人工智能、信号处理和机器学习等多个领域有着广泛应用,且得到学者们的深入研究^[1-3],Sahu等^[4]研究具有4个节点和3个权重系数的递归神经网络,建立系统稳定时权重 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 所满足的充分性条件,通过调整权重,该网络能够训练出一个期望的周期信号。Bao等^[5]研究具有确定或不确定参数扰动的递归神经网络的全局区域稳定性,通过状态划分和系统分析给出了具有一定参数扰动的递归神经网络的全局区域稳定性结果,并针对具有不确定参数扰动的递归神经网络,设计了一种自适应控制器,使网络状态稳定到期望区域。Liu等^[6]改进和推广以分段线性函数为特例的递归神经网络稳定性分析,研究了具有一般分段线性激活函数的时滞递归神经网络的完全稳定性,得出确保 n -神经元网络系统完全稳定且恰有多个平衡点的充分条件。Ruiz等^[7]研究切换多速率递归神经网络,即每个神经元或一组神经元可以具有不同的激活采样周期,并建立动力学模型来描述这一行为,利用Lyapunov方法给出确保网络指数稳定的充分条件。Gao等^[8]研究三节点递归神经网络系统,其平衡点的求解涉及到超越函数 $\tanh(x)$ 的迭代,采用区域分割法计算出平衡点的数量和分布,并通过近似中心流形的方法研究平衡点的定性特性,并讨论其鞍点、分叉和Hopf分岔。

收稿日期:2024-10-14;网络出版时间:2025-04-09

基金项目:山西省基础研究计划资助项目(202403021221124)

第一作者:陈子杰(2001—),男,硕士研究生,研究方向为微分方程稳定性理论。E-mail:2953110260@qq.com

*通信作者:赵东霞(1981—),女,副教授,硕士生导师,博士,研究方向为微分方程稳定性理论。E-mail:zhaodongxia6@sina.com

众所周知,神经元的处理过程存在着时间延迟,使得系统的动力学行为变得更加复杂,并可能使系统的稳态改变甚至出现周期性振荡、分岔及混沌状态。Li^[9]研究三维递归神经网络系统的稳定性,进行分叉分析,将时滞作为分岔参数,利用中心流形定理等方法得到系统的分叉和周期解性态等动力学行为。赵东霞等^[10]研究具有一个小世界连接和一个时滞的单向环形神经网络系统的稳定性,计算特征值的渐近表达式,验证系统算子的谱确定性增长条件,探讨小世界连接权值对系统稳定性的影响。鲍芳霞等^[11]研究由 4 个神经元组成的具有 3 个时滞的双向环形神经网络模型的稳定性,并建立系统与时滞相关及与时滞无关的稳定性结论。

受上述文献启发,本文研究具有 3 个神经元的时滞递归神经网络模型(结构如图 1 所示)为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + \tanh(x_2(t - \tau_2)), \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u(t), \\ \dot{x}_3(t) = -x_3(t) + k_1 \tanh(x_1(t - \tau_1)) + k_2 \tanh(x_2(t - \tau_2)), \\ y(t) = \tanh(x_3(t)), \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x_i(t)$ 表示第 $i(i=1,2,3)$ 个神经元在 t 时刻的状态; k_1, k_2 为神经元之间的连接权值; $\tanh(u) = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$ 表示神经元的激活函数; τ_1 表示由第 1 个神经元到第 3 个神经元的信息传递时滞; τ_2 表示由第 2 个神经元到其他神经元的传递时滞; $u(t)$ 为控制输入, $y(t)$ 为输出量测且满足

$$u(t) = y(t - \tau_3); \quad (2)$$

而 τ_3 表示控制过程的时滞。与已有文献相比,本模型充分考虑了系统的输入时滞 τ_3 ,时滞参数使得系统的稳定性分析变得更为复杂。此外,文献[11]中的环形神经网络系统的特征方程可以写为 4 个一阶指数型多项式的连乘,为特征根分析带来很大的便利,而本文的递归神经网络系统的特征方程不具备该特点。

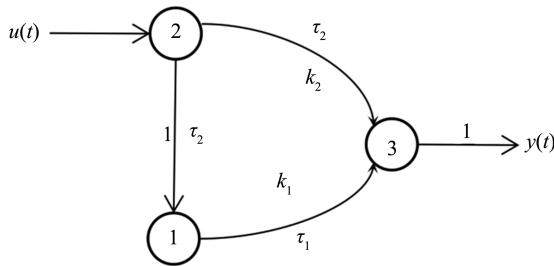


图 1 具有 3 个时滞的三神经元递归网络结构示意图
Fig.1 Schematic diagram of a three neuron recursive network structure with three time delays

1 系统(1)的稳定性分析

考虑到 $\tanh(0) = 1, \tanh'(0) = 1$,并结合式(2)可得 $(0,0,0)$ 是系统(1)的平衡点,并且在平衡点处线性化可得

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2(t - \tau_2), \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + x_3(t - \tau_3), \\ \dot{x}_3(t) = -x_3(t) + k_1 x_1(t - \tau_1) + k_2 x_2(t - \tau_2). \end{cases} \quad (3)$$

简单计算可得式(3)的特征方程是具有两个指数项的超越方程

$$(\lambda + 1)^3 - k_2(\lambda + 1)e^{-\lambda(\tau_2 + \tau_3)} - k_1 e^{-\lambda(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)} = 0 \quad (4)$$

引理 1^[12] 考虑指数型多项式

$$\begin{aligned} P(\lambda, e^{-\lambda\tau_1}, \dots, e^{-\lambda\tau_m}) &= \lambda^n + p_1^{(0)} \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1}^{(0)} \lambda + p_n^{(0)} + (p_1^{(1)} \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1}^{(1)} \lambda + p_n^{(1)}) e^{-\lambda\tau_1} \\ &+ \dots + (p_1^{(m)} \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1}^{(m)} \lambda + p_n^{(m)}) e^{-\lambda\tau_m} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

其中, $\tau_i \geq 0 (i=1,2,\dots,m), p_j^{(i)} (i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n)$ 是常数。当系数 $(p_1^{(0)}, \dots, p_n^{(0)}, \dots, p_1^{(m)}, \dots, p_n^{(m)}, \tau_1, \dots, \tau_m)$ 变化时,多项式 $P(\lambda, e^{-\lambda\tau_1}, \dots, e^{-\lambda\tau_m})$ 在右半开复平面上的零点重数之和只有在零点出现在

虚轴上或穿过虚轴时才有可能改变。

注1 根据引理1可知,当时滞参数 (τ_1, τ_2, τ_3) 由 $(0, 0, 0)$ 一点点开始增大时,稳定性发生切换当且仅当特征方程产生纯虚根。

1.1 $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$ 的情形

当 $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$ 时,特征方程退化为

$$(\lambda+1)^3 - k_2(\lambda+1) - k_1 = 0, \quad (6)$$

不妨设 $\lambda+1 = \mu$,则式(6)可化为

$$\mu^3 - k_2\mu - k_1 = 0, \quad (7)$$

且 $\text{Re } \lambda < 0$ 等价于 $\text{Re } \mu < 1$ 。

为方便结论叙述,给出如下4个条件:

$$(P1) \quad 27k_1^2 - 4k_2^3 = 0, \quad -2 < k_1 < \frac{1}{4};$$

$$(P2) \quad 27k_1^2 - 4k_2^3 > 0, \quad -2 < \sqrt{\frac{k_1}{2} + \sqrt{\frac{k_1^2}{4} - \frac{k_2^3}{27}}} + \sqrt{\frac{k_1}{2} - \sqrt{\frac{k_1^2}{4} - \frac{k_2^3}{27}}} < 1;$$

$$(P3) \quad 27k_1^2 - 4k_2^3 < 0, \quad k_1 > 0, \quad 0 < k_2 < \frac{3}{4};$$

$$(P4) \quad 27k_1^2 - 4k_2^3 < 0, \quad k_1 < 0, \quad 0 < k_2 < 3.$$

定理1 设 $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$,若系统参数满足(P1)–(P4)中任意一条,则特征方程(4)的所有根具有负实部。

证明 根据一元三次方程求根公式可得式(7)的根为

$$\begin{cases} \mu_1 = \sqrt{\frac{k_1}{2} + \sqrt{\frac{k_1^2}{4} - \frac{k_2^3}{27}}} + \sqrt{\frac{k_1}{2} - \sqrt{\frac{k_1^2}{4} - \frac{k_2^3}{27}}}, \\ \mu_2 = w \left(\sqrt{\frac{k_1}{2} + \sqrt{\frac{k_1^2}{4} - \frac{k_2^3}{27}}} \right) + w^2 \left(\sqrt{\frac{k_1}{2} - \sqrt{\frac{k_1^2}{4} - \frac{k_2^3}{27}}} \right), \\ \mu_3 = w^2 \left(\sqrt{\frac{k_1}{2} + \sqrt{\frac{k_1^2}{4} - \frac{k_2^3}{27}}} \right) + w \left(\sqrt{\frac{k_1}{2} - \sqrt{\frac{k_1^2}{4} - \frac{k_2^3}{27}}} \right), \end{cases} \quad (8)$$

其中, $w = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$, $w^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ 。

(1) 当 $27k_1^2 - 4k_2^3 = 0$ 时,式(8)的实部为

$$\text{Re } \mu_1 = 2\sqrt{\frac{k_1}{2}}, \quad \text{Re } \mu_2 = -\sqrt{\frac{k_1}{2}}, \quad \text{Re } \mu_3 = -\sqrt{\frac{k_1}{2}}. \quad (9)$$

简单计算可得,当 $-2 < k_1 < \frac{1}{4}$ 时, $\text{Re } \mu_i < 1 (i = 1, 2, 3)$ 。

(2) 当 $27k_1^2 - 4k_2^3 > 0$ 时,式(8)的实部为

$$\begin{cases} \text{Re } \mu_1 = \sqrt{\frac{k_1}{2} + \sqrt{\frac{k_1^2}{4} - \frac{k_2^3}{27}}} + \sqrt{\frac{k_1}{2} - \sqrt{\frac{k_1^2}{4} - \frac{k_2^3}{27}}}, \\ \text{Re } \mu_2 = -\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{k_1}{2} + \sqrt{\frac{k_1^2}{4} - \frac{k_2^3}{27}}} + \sqrt{\frac{k_1}{2} - \sqrt{\frac{k_1^2}{4} - \frac{k_2^3}{27}}} \right), \\ \text{Re } \mu_3 = -\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{k_1}{2} + \sqrt{\frac{k_1^2}{4} - \frac{k_2^3}{27}}} + \sqrt{\frac{k_1}{2} - \sqrt{\frac{k_1^2}{4} - \frac{k_2^3}{27}}} \right). \end{cases} \quad (10)$$

易得,当 $-2 < \sqrt{\frac{k_1}{2} + \sqrt{\frac{k_1^2}{4} - \frac{k_2^3}{27}}} + \sqrt{\frac{k_1}{2} - \sqrt{\frac{k_1^2}{4} - \frac{k_2^3}{27}}} < 1$ 时, $\text{Re } \mu_i < 1 (i = 1, 2, 3)$ 。

(3) 当 $27k_1^2 - 4k_2^3 < 0$ 时, 必有 $k_2 > 0$ 。式(8)的实部为

$$\operatorname{Re} \mu_1 = 2\sqrt{\frac{k_2}{3}} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right), \quad \operatorname{Re} \mu_2 = -2\sqrt{\frac{k_2}{3}} \cos\left(\frac{\theta}{3} - \frac{\pi}{3}\right), \quad \operatorname{Re} \mu_3 = -2\sqrt{\frac{k_2}{3}} \cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{\pi}{3}\right), \quad (11)$$

其中 θ 满足

$$\cos \theta = \frac{\frac{k_1}{2}}{\sqrt{\frac{k_2^3}{27}}}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{\frac{k_2^3}{27} - \frac{k_1^2}{4}}}{\sqrt{\frac{k_2^3}{27}}}. \quad (12)$$

如果 $k_1 > 0$, 则由式(12), $\cos \theta > 0$, $\sin \theta > 0$, 此时有

$$2n\pi < \theta < \frac{\pi}{2} + 2n\pi,$$

其中 n 为任意整数。简单计算可得, 为使 $\operatorname{Re} \mu_i < 1$, 当且仅当 $0 < k_2 < \frac{3}{4}$ 。同理, 如果 $k_1 < 0$, 则 $\operatorname{Re} \mu_i < 1$, 当且

仅当 $0 < k_2 < 3$ 。

1.2 $\tau_1 > 0, \tau_2 = \tau_3 = 0$ 的情形

下面分析当 $\tau_2 = \tau_3 = 0$, τ_1 由 0 逐渐增加, 特征方程(4)产生纯虚根时的时滞参数 τ_1 的临界值。此时, 特征方程(4)变为

$$(\lambda + 1)^3 - k_1 e^{-\lambda \tau_1} = 0. \quad (13)$$

假设 $\lambda = \omega i$ ($\omega > 0$) 是特征方程(13)的纯虚根, 则代入方程(13)中且分离实部和虚部得

$$\begin{cases} 1 - 3\omega^2 = k_1 \cos(\omega \tau_1), \\ 3\omega - \omega^3 = -k_1 \sin(\omega \tau_1). \end{cases} \quad (14)$$

对上面方程左右两边平方和再相加得

$$(\omega^2 + 1)^3 = k_1^2. \quad (15)$$

容易看出, 当 $|k_1| \leq 1$ 时, 方程(15)无正根; 当 $|k_1| > 1$ 时, 方程(15)至多 3 个正根, 不妨设为 $\omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)}, \omega_3^{(1)}$ 。从方程(14)的第一个式子可得

$$\tau_{ij}^{(1)} = \frac{1}{\omega_j^{(1)}} \arccos \frac{1 - 3(\omega_j^{(1)})^2}{k_1}, \quad 1 \leq j \leq 3. \quad (16)$$

记

$$\tau_1^0 = \min \{ \tau_{ij}^{(1)} \}. \quad (17)$$

综上分析并结合引理 1 和定理 1, 易得如下结论。

定理 2 假设 $\tau_2 = \tau_3 = 0$, 则

(1) 如果系统参数满足条件(P1)–(P4)中的任意一条, 并且 $|k_1| > 1$, 则存在 $\tau_1^0 > 0$, 使得当 $\tau_1 \in [0, \tau_1^0)$ 时, 特征方程(4)的所有根具有负实部。

(2) 如果系统参数满足条件(P1)–(P4)中的任意一条, 并且 $|k_1| \leq 1$, 则对于任意的 $\tau_1 \geq 0$, 特征方程(4)的所有根具有负实部。

1.3 $\tau_1 \in [0, \tau_1^0), \tau_2 > 0, \tau_3 = 0$ 的情形

下面分析当 $\tau_1 \in [0, \tau_1^0), \tau_3 = 0$ 时, 特征方程(4)产生纯虚根时的时滞值 τ_2 的临界情况。特征方程(4)可变为

$$(\lambda + 1)^3 - (\lambda + 1)k_2 e^{-\lambda \tau_2} - k_1 e^{-\lambda(\tau_1 + \tau_2)} = 0. \quad (18)$$

假设 $\lambda = \omega i$ ($\omega > 0$) 是特征方程(18)的纯虚根, 则代入方程(18)中, 且分离实部和虚部得

$$\begin{cases} 1 - 3\omega^2 = k_2 \cos(\omega \tau_2) + \omega k_2 \sin(\omega \tau_2) + k_1 \cos(\omega \tau_1 + \omega \tau_2), \\ 3\omega - \omega^3 = \omega k_2 \cos(\omega \tau_2) - k_2 \sin(\omega \tau_2) - k_1 \sin(\omega \tau_1 + \omega \tau_2), \end{cases} \quad (19)$$

对上面方程组左右两边平方和再相加得

$$(\omega^2+1)^3-k_2^2(\omega^2+1)-k_1^2=2k_1k_2\cos(\omega\tau_1)-2\omega k_1k_2\sin(\omega\tau_1)。(20)$$

将式(20)整理可得

$$\cos(\omega\tau_1+\gamma_1)=\frac{(\omega^2+1)^3-k_2^2(\omega^2+1)-k_1^2}{2k_1k_2\sqrt{\omega^2+1}},(21)$$

其中, γ_1 满足 $\cos \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}}$, $\sin \gamma_1 = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+1}}$ 。同时式(19)可整理为

$$\begin{cases} 1-3\omega^2-k_1\cos(\omega\tau_1+\omega\tau_2)=k_2\cos(\omega\tau_2)+\omega k_2\sin(\omega\tau_2), \\ 3\omega-\omega^3+k_1\sin(\omega\tau_1+\omega\tau_2)=\omega k_2\cos(\omega\tau_2)-k_2\sin(\omega\tau_2)。 \end{cases}(22)$$

式(22)中左右平方和再相加计算得

$$(\omega^2+1)^3+k_1^2-2k_1\sqrt{(\omega^2+1)^3}\cos(\omega\tau_1+\omega\tau_2+\gamma_2)=(1+\omega^2)k_2^2,(23)$$

其中, γ_2 满足

$$\cos \gamma_2 = \frac{1-3\omega^2}{\sqrt{(\omega^2+1)^3}}, \quad \sin \gamma_2 = \frac{3\omega-\omega^3}{\sqrt{(\omega^2+1)^3}}。(24)$$

由于式(21)的左端为余弦函数,右端为关于 ω 多项式函数,因此式(21)的根的个数至多有限的,不妨设为 $\omega_1^{(2)}, \omega_2^{(2)}, \dots, \omega_m^{(2)}$, m 为某一正整数。从而式(23)中解得

$$\tau_{2j}^{(2)} = \frac{\arccos\left(\frac{((\omega_j^{(2)})^2+1)^3+k_1^2-k_2^2((\omega_j^{(2)})^2+1)}{2k_1\sqrt{((\omega_j^{(2)})^2+1)^3}}\right)-\omega_j^{(2)}\tau_1-\gamma_2}{\omega_j^{(2)}}, \quad 1 \leq j \leq m,(25)$$

不妨设

$$\tau_2^0 = \min\{\tau_{2j}^{(2)}\}, \quad 1 \leq j \leq m。(26)$$

综上分析并结合引理 1, 定理 1, 定理 2, 易得如下结论。

定理 3 假设 $\tau_3=0$, 则

(1) 如果系统参数满足条件(P1)–(P4)任意一条, $|k_1|>1$, 且式(20)无正根, 则对于任意的 $\tau_2>0$, 使得当 $\tau_1 \in [0, \tau_1^0)$ 时, 特征方程(4)的所有根具有负实部。

(2) 如果系统参数满足条件(P1)–(P4)任意一条, $|k_1|>1$, 且式(20)有正根, 则存在 $\tau_2^0>0$, 使得当 $\tau_1 \in [0, \tau_1^0)$ 且 $\tau_2 \in [0, \tau_2^0)$, 特征方程(4)的所有根具有负实部。

(3) 如果系统参数满足条件(P1)–(P4)任意一条, $|k_1| \leq 1$, 且式(20)无正根, 则对于任意的 $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$, 特征方程(4)的所有根具有负实部。

(4) 如果系统参数满足条件(P1)–(P4)任意一条, $|k_1| \leq 1$, 且式(20)有正根, 则对于任意的 $\tau_1 \geq 0$, 存在 $\tau_2^0>0$ 使得当 $\tau_2 \in [0, \tau_2^0)$, 特征方程(4)的所有根具有负实部。

1.4 $\tau_1 \in [0, \tau_1^0)$, $\tau_2 \in [0, \tau_2^0)$, $\tau_3>0$ 的情形

下面分析当 $\tau_1 \in [0, \tau_1^0)$, $\tau_2 \in [0, \tau_2^0)$ 时, 特征方程(4)产生纯虚根的时滞值 τ_3 的临界情况。假设 $\lambda = \omega i (\omega>0)$ 是特征方程(4)的纯虚根, 将 ωi 代入特征方程(4)中, 且分离实部和虚部, 得

$$\begin{cases} 1-3\omega^2=k_2\cos(\omega\tau_2+\omega\tau_3)+\omega k_2\sin(\omega\tau_2+\omega\tau_3)+k_1\cos(\omega\tau_1+\omega\tau_2+\omega\tau_3), \\ 3\omega-\omega^3=\omega k_2\cos(\omega\tau_2+\omega\tau_3)-k_2\sin(\omega\tau_2+\omega\tau_3)-k_1\sin(\omega\tau_1+\omega\tau_2+\omega\tau_3)。 \end{cases}(27)$$

容易验证, 将式(27)左右两边平方和再相加恰好得式(20), 整理后可得式(21)。

另一方面, 调整式(27), 得到

$$\begin{cases} 1-3\omega^2-k_1\cos(\omega\tau_1+\omega\tau_2+\omega\tau_3)=k_2\cos(\omega\tau_2+\omega\tau_3)+\omega k_2\sin(\omega\tau_2+\omega\tau_3), \\ 3\omega-\omega^3+k_1\sin(\omega\tau_1+\omega\tau_2+\omega\tau_3)=\omega k_2\cos(\omega\tau_2+\omega\tau_3)-k_2\sin(\omega\tau_2+\omega\tau_3)。 \end{cases}(28)$$

将其两边平方和相加得

$$(\omega^2+1)^3+k_1^2-2k_1\sqrt{(\omega^2+1)^3}\cos(\omega\tau_1+\omega\tau_2+\omega\tau_3+\gamma_2)=(1+\omega^2)k_2^2,(29)$$

其中 γ_2 满足式(24)。由于式(21)根的个数至多有限个,不妨设为 $\omega_1^{(3)}, \omega_2^{(3)}, \dots, \omega_p^{(3)}$, p 为某一正整数。结合式(29)易得

$$\tau_{3j}^{(3)} = \frac{1}{\omega_j^{(3)}} \left(\arccos \left(\frac{((\omega_j^{(3)})^2 + 1)^3 + k_1^2 - k_2^2((\omega_j^{(3)})^2 + 1)}{2k_1 \sqrt{((\omega_j^{(3)})^2 + 1)^3}} \right) - \omega_j^{(3)} \tau_1 - \omega_j^{(3)} \tau_2 - \gamma_2 \right), \quad 1 \leq j \leq p. \quad (30)$$

故可设

$$\tau_3^0 = \min \{ \tau_{3j}^{(3)} \}, \quad 1 \leq j \leq p, \quad (31)$$

因此,结合引理1、定理1、2、3得下述定理。

定理4 当时滞值 τ_1, τ_2, τ_3 均大于0时,则

(1) 如果系统参数满足条件(P1)–(P4)任意一条, $|k_1| > 1$, 式(20)有正根, 则存在 $\tau_3^0 > 0$ 使得当 $\tau_1 \in [0, \tau_1^0), \tau_2 \in [0, \tau_2^0)$ 且 $\tau_3 \in [0, \tau_3^0)$ 时, 特征方程(4)的所有根具有负实部, 即系统(3)是一致渐近稳定的。

(2) 如果系统参数满足条件(P1)–(P4)任意一条, $|k_1| > 1$, 式(20)无正根, 则对于任意的 $\tau_2 \geq 0, \tau_3 \geq 0$ 且 $\tau_1 \in [0, \tau_1^0)$ 时, 特征方程(4)的所有根具有负实部, 即系统(3)是一致渐近稳定的。

(3) 如果系统参数满足条件(P1)–(P4)任意一条, $|k_1| \leq 1$, 式(20)有正根, 则对于任意的 $\tau_1 \geq 0$, 存在 $\tau_3^0 > 0$, 使得当 $\tau_2 \in [0, \tau_2^0)$ 且 $\tau_3 \in [0, \tau_3^0)$ 时, 特征方程(4)的所有根具有负实部, 即系统(3)是一致渐近稳定的。

(4) 如果系统参数满足条件(P1)–(P4)任意一条, $|k_1| \leq 1$, 式(20)无正根, 则对于任意的 $\tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0, \tau_3 \geq 0$, 特征方程(4)的所有根具有负实部, 即系统(3)是一致渐近稳定的。

2 数值仿真

本章将利用 MATLAB 软件进行数值模拟, 说明系统(3)在平衡点处的动力学性质。

例1 在系统(3)中, 取系统参数值: $k_1 = 0.25, k_2 = \frac{1}{3}$, 显然 $|k_1| \leq 1$, 且满足条件(P2)。此时不妨取 $\tau_1 = 1$, 则式(20)为

$$(\omega^2 + 1)^3 - \frac{1}{9}(\omega^2 + 1) - \frac{1}{16} = \frac{1}{6} \cos \omega - \frac{1}{6} \omega \sin \omega. \quad (32)$$

记 $(\omega^2 + 1)^3 - \frac{1}{9}(\omega^2 + 1) - \frac{1}{16} \doteq f(\omega), \frac{1}{6} \cos \omega - \frac{1}{6} \omega \sin \omega \doteq g(\omega)$ 。则式(32)等价于方程 $f(\omega) = g(\omega)$ 。如图2所示, 曲线 $f(\omega)$ 与 $g(\omega)$ 无交点, 即方程 $f(\omega) = g(\omega)$ 无正根。此时, 不妨取 $\tau_2 = 1, \tau_3 = 3$ 。则由定理4中的结论(4)可得, 式(3)是渐近稳定的, 其状态的收敛性如图3所示, 其中, 初始条件为 $x_1(0) = 0.1, x_2(0) = -0.2, x_3(0) = 0.25$ 。

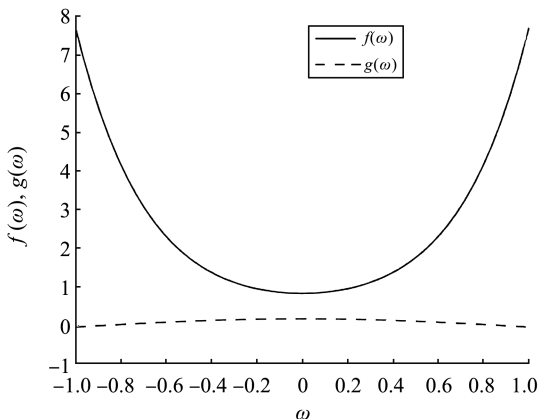


图2 方程(32)关系图

Fig.2 Equation (32) relationship diagram

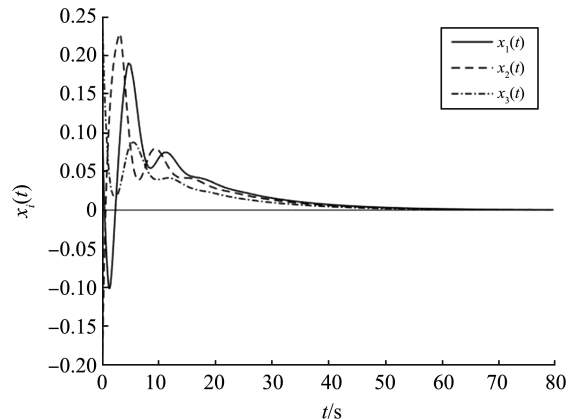


图3 系统(3)状态的收敛性

Fig.3 State convergence of system (3)

例 2 在系统(3)中,取 $k_1 = -\frac{3}{2}$, $k_2 = -\frac{1}{4}$, 显然 $|k_1| > 1$, 且满足条件(P2)。此时, 结合式(15)–(17)计算可得, τ_1 的临界值 $\tau_1^0 \approx 2.9$, 故取 $\tau_1 = 1$ 。则式(20)为

$$(\omega^2+1)^3 - \frac{1}{16}(\omega^2+1) - \frac{9}{4} = \frac{3}{4} \cos \omega - \frac{3}{4} \omega \sin \omega. \tag{33}$$

记 $m(\omega) = (\omega^2+1)^3 - \frac{1}{16}(\omega^2+1) - \frac{9}{4}$, $n(\omega) = \frac{3}{4} \cos \omega - \frac{3}{4} \omega \sin \omega$, 此时方程 $m(\omega) = n(\omega)$ 有根, 如图 4 所示。此时计算 τ_2 的临界值 $\tau_2^0 \approx 1.0925$, 故可取 $\tau_2 = 1$ 。同理计算可得, τ_3 的临界值 $\tau_3^0 \approx 0.0925$, 所以取 $\tau_3 = 0.05$ 。由定理 4 中的结论(1)可得, 系统(3)是渐近稳定的, 如图 5 所示, 其初始条件为 $x_1(0) = 0.2$, $x_2(0) = -0.15$, $x_3(0) = 0.15$ 。

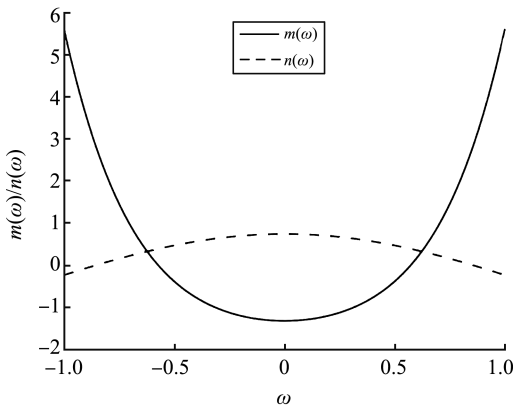


图 4 方程(33)关系图

Fig.4 Equation (33) relationship diagram

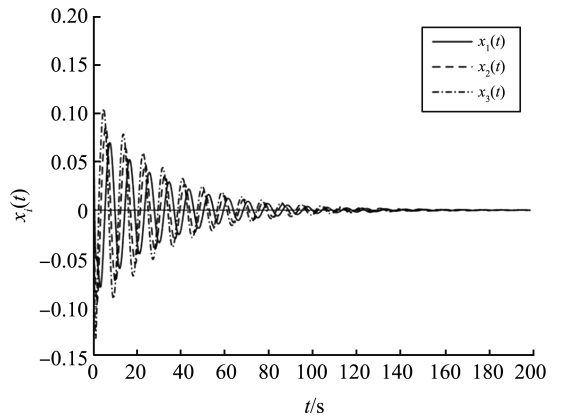


图 5 系统(3)状态的收敛性

Fig.5 State convergence of system (3)

3 结论

本文建立了具有 3 个神经元和 3 个时滞的递归神经网络系统的数学控制模型, 充分利用神经元传递函数的性质将系统做线性化处理。设线性化系统的解具有指数函数的形式, 从而求得特征方程为具有两个指数项的超越方程, 具有无穷多个解, 反映了时滞系统的无穷维本质。进而利用指数型多项式零点分布性质和特征根分析方法, 建立了与时滞相关及与时滞无关的稳定性充分条件。

参考文献:

[1] 吉月辉,周海亮,车适行,等. 基于递归神经网络的再入飞行器最优姿态控制[J]. 控制理论与应用,2021,38(3):329-338.
JI Yuehui, ZHOU Hailiang, CHE Shixing, et al. Optimal attitude control of reentry aircraft based on recurrent neural networks [J]. Control Theory and Applications, 2021, 38(3):329-338.

[2] 李冠军,徐进. 时滞递归神经网络全局稳定性的新判据[J]. 华中师范大学学报(自然科学版),2009,43(3):384-387.
LI Guanjun, XU Jin. A new criterion for global stability of time-delay recurrent neural networks [J] Journal of Huazhong Normal University (Natural Science Edition), 2009, 43(3):384-387.

[3] FEI Yu, LI Rongli, MENG Xiaofang, et al. Bifurcations of a fractional-order four-neuron recurrent neural network with multiple delays[J]. Computational Intelligence and Neuroscience, 2022, (1):1779582.

[4] SAHU N, VERMA A K. Analysis of equilibria of a recurrent neural network involving transcendental function[J]. International Journal of Applied Information Systems, 2012, 4(5):6-12.

[5] BAO Gang, PENG Yue, ZHOU Xue, et al. Region stability and stabilization of recurrent neural network with parameter disturbances[J]. Neural Processing Letters, 2020, 52(3):1-14.

[6] LIU Peng, ZHENG Weixing, ZENG Zhigang. on complete stability of recurrent neural networks with time-varying delays and general piecewise linear activation functions[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2019, 50(5):1-15.