山东大学学报(理学版)2026 年 2 月 第 61 卷 第 2 期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.61, No.2, 2026 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2026)02-0050-08 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2024.410

平均框架下多元逼近问题的(s,t)-弱可处理性

陈佳[1],燕慧超[2],刘有军[1]
(1.山西大同大学数学与统计学院, 山西 大同 037009; 2.山西大同大学计算机与网络工程学院, 山西 大同 037009)

摘要:研究在平均框架下具有零平均高斯测度的 Banach 空间中的多元逼近问题 $\mathrm{APP}_d(d\in\mathbf{N}_+)$,其中,零平均高斯测度的协方差核具有非负权重序列$\{\alpha_j\}$和$\{\gamma_j\}$,特别地,介绍两类具有不同权重的协方差核。利用有限个连续线性泛函构成的算法来逼近多元问题 APP_d。讨论在绝对误差和归一误差下,这两类具有不同权重的协方差核的 Banach 空间中的 L_2 逼近问题 $\mathrm{APP}=\{\mathrm{APP}_d\}_{d\in\mathbf{N}_+}$的$(s,t)$-弱可处理性($s>0$, $t\geqslant 1$)。最后,利用实分析方法得到这两类 L_2 逼近问题 APP 是$(s,1)$-弱可处理的充分且必要条件:当 j 趋于无穷大时,权重序列$\{\gamma_j\}$的极限为 0。

关键词:L_2 逼近;(s,t)-弱可处理性;平均框架;协方差核
中图分类号:O174 **文献标志码:**A
引用格式:陈佳,燕慧超,刘有军. 平均框架下多元逼近问题的(s,t)-弱可处理性[J]. 山东大学学报(理学版),2026,61(2):50-57.

(s,t)-weak tractability of multivariate approximation problems in the average case setting

CHEN Jia[1], YAN Huichao[2], LIU Youjun[1]
(1. School of Mathematics and Statistics Science, Shanxi Datong University, Datong 037009, Shanxi, China; 2. School of Computer and Network Engineering, Shanxi Datong University, Datong 037009, Shanxi, China)

Abstract: This paper investigated multivariate approximation problems $\mathrm{APP}_d(d\in\mathbf{N}_+)$ of Banach spaces equipped with zero-mean Gaussian measures in the average case setting, where covariance kernels of the zero-mean Gaussian measures had non-negative weighted sequences $\{\alpha_j\}$ and $\{\gamma_j\}$. In particular, the paper introduced covariance kernels with two different weights. We approximated the multivariate problems APP_d by the algorithms that used finitely many continuous linear functionals. This paper discussed (s,t)-weak tractability for $s>0$ and $t\geqslant 1$ of the L_2-approximation problems $\mathrm{APP}=\{\mathrm{APP}_d\}_{d\in\mathbf{N}_+}$ from the Banach spaces with the above two weighted covariance kernels under the absolute error criterion and the normalized error criterion. As a result, by the real analyzing the sufficient and necessary condition for $(s,1)$-weak tractability of these two L_2-approximation problems APP could be obtained as follows: the weight sequence $\{\gamma_j\}$ tendde to 0 as j tends to infinity.

Key words: L_2-approximation; (s,t)-weak tractability; average case setting; covariance kernels

0 引言

本文主要研究多元问题$S_d:F_d\to G_d$,其中,F_d 是 Banach 空间、G_d 是 Hilbert 空间。多元问题在统计学、物理学和金融数学中都有重要应用[1-3]。利用任意 n 个连续线性泛函构成的算法 $A_{n,d}$来逼近多元问题 S_d,在绝对误差或者归一误差下,算法 $A_{n,d}$和多元问题 S_d 的误差不超过 ε 的连续线性泛函的最少个数称为多元问题 S_d 的信息复杂性。信息复杂性是关于维数 d 和误差 ε 的函数。

近年来,当维数 d 特别大时,多元问题 $S=\{S_d\}_{d\in\mathbf{N}_+}$的可处理性成为函数逼近论研究的热门话题。当 $d\to\infty$ 或者 $\varepsilon\to 0$ 时,S_d 的信息复杂性与维数 d 和误差 ε 的依赖关系就称为多元问题 S 的可处理性。特别

收稿日期:2024-11-28; **网络出版时间:**2025-11-10
基金项目:国家自然科学基金资助项目(12001342);山西省高等学校科技创新项目(2022L438);山西大同大学基础青年科研基金项目(2022Q10);山西大同大学博士科研启动经费项目(2021-B-17,2019-B-10)
第一作者:陈佳(1987—),女,副教授,博士,研究方向为函数逼近论. E-mail:jiachencd@163.com

地，当$d\to\infty$或者$\varepsilon\to 0$时，如果S_d的信息复杂性依赖ε^{-1}及d，那么S是代数可处理的，包括强多项式可处理性、多项式可处理性、拟多项式可处理性、一致弱可处理性、弱可处理性及(s,t)-弱可处理性[4-6]。

在平均框架下，如果F_d是具有零平均高斯测度的 Banach 空间、G_d是 Hilbert 空间，那么多元问题S_d的信息复杂性与F_d的零平均高斯测度的协方差核有直接关系。特别地，如果这个协方差核具有某个权重，那么多元问题S_d的信息复杂性与该权重有重要关系。在平均框架下，具有权重的协方差核的 Banach 空间中的多元逼近问题的代数可处理性已有很多结论。如在平均框架下，对绝对误差和归一误差，具有解析的 Korobov 权重的协方差核的 Banach 空间中的L_2逼近问题的强多项式可处理性、多项式可处理性、拟多项式可处理性、一致弱可处理性、弱可处理性、(s,t)-弱可处理性成立的充分且必要条件已有比较完备的结论[7-9]。在平均框架下，对绝对误差和归一误差，具有 Gaussian 权重的协方差核的 Banach 空间中的L_2逼近问题的强多项式可处理性、多项式可处理性、拟多项式可处理性、弱可处理性、一致弱可处理性、(s,t)-弱可处理性成立的充分且必要条件也有比较完备的结论[10-12]。在平均框架下，对绝对误差或者归一误差，具有 Korobov 权重的协方差核的 Banach 空间中的L_2逼近问题的强多项式可处理性、多项式可处理性、拟多项式可处理性、一致弱可处理性、弱可处理性、(s,t)-弱可处理性成立的充分必要条件也有部分结论[9,13-15]。

多元问题$S=\{S_d\}_{d\in\mathbf{N}_+}$的$(s,t)$-弱可处理性的结论与$s,t$的取值有直接关系，当$s,t$的取值不同时，$(s,t)$-弱可处理性的研究方法也不同。本文主要研究在平均框架下对于绝对误差和归一误差，当$s>0$，$t\geqslant 1$时，两类具有不同权重的协方差核的 Banach 空间中的L_2逼近问题的(s,t)-弱可处理性。这两类权重分别是 Gaussian ANOVA 权重及 Gaussian ANOVA 权重的一类变形权重。这两类权重与 Korobov 权重不同，但与 Korobov 权重也有一定的关系。

设权重序列$\boldsymbol{\gamma}=\{\gamma_k\}$和$\boldsymbol{\alpha}=\{\alpha_k\}$满足

$$1\geqslant\gamma_1\geqslant\gamma_2\geqslant\cdots>0,\quad 1<\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\cdots。\tag{1}$$

设$H_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}$是定义在$[0,1]^d$上的 Banach 空间，$\mu_d$是$H_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}$的零平均高斯测度，$\mu_d$的协方差核满足

$$\begin{aligned}K_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})&=\int_{H_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}}f(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{y})\mu_d(\mathrm{d}f)\\&=\sum_{h\in\mathbf{N}^d}R_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}(h)\exp(2\pi\mathrm{i}\boldsymbol{h}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})),\end{aligned}\tag{2}$$

其中$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in[0,1]^d$，$R_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{h})=\prod_{j=1}^{d}R_{\gamma_j,\alpha_j}(h_j)$为协方差核$K_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$的权重，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，$\boldsymbol{h}=(h_1,h_2\cdots,h_d)\in\mathbf{N}^d$，$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\sum_{i=1}^{d}u_iv_i$，$\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_d)\in\mathbf{R}^d$，$\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,\cdots,v_d)\in\mathbf{R}^d$。为方便起见，设文章中的权重均为非负值。

设多元逼近问题

$$\mathrm{APP}=\{\mathrm{APP}_d:H_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}([0,1]^d)\to L_2([0,1]^d)\}$$

满足$\mathrm{APP}_d(f)=f$，$f\in H_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}([0,1]^d)$。本文讨论在平均框架下，对于 Gaussian ANOVA 权重及 Gaussian ANOVA 权重的一类变形权重，多元逼近问题 APP 在绝对误差和归一误差下的(s,t)-弱可处理性，其中$s>0$，$t\geqslant 1$。

1　预备知识

1.1　多元问题的代数可处理性

设F_d是 Banach 空间，G_d是 Hilbert 空间，μ_d是F_d的零平均高斯测度，$\langle\,,\rangle_{G_d}$是G_d的内积。下面讨论多元问题$S_d:F_d\to G_d$。对任意$f\in F_d$，用算法

$$A_{n,d}(f)=\Phi_{n,d}(L_1(f),\cdots,L_n(f))\tag{3}$$

来逼近多元问题$S_d(f)$，其中$L_1,L_2,\cdots,L_n$是F_d上的连续线性泛函，$\Phi_{n,d}:\mathbf{R}^n\to G_d$是任意一个映射。特别地，当$n=0$时，定义$A_{0,d}=0$。本文讨论在平均框架下多元问题$S_d$的逼近误差。

定义 1[4]　设$n\in\mathbf{N}_+$。算法$A_{n,d}$的平均误差定义为

$$e(A_{n,d}):=\left(\int_{F_d}\|S_d(f)-A_{n,d}(f)\|_{G_d}\mu_d(\mathrm{d}f)\right)^{\frac{1}{2}}。$$

S_d 的 n 次最小平均误差定义为

$$e(n,S_d):=\inf_{A_{n,d}} e(A_{n,d}),$$

其中 $e(n,S_d)$ 是对所有形如式(3) 的算法 $A_{n,d}$ 取下确界。若存在形如式(3) 的算法 $A_{n,d}^{\bullet}$,使得

$$e(A_{n,d}^{\bullet})=e(n,S_d),$$

则称 $A_{n,d}^{\bullet}$ 是 S_d 的 n 次最佳算法。特别地,当 $n=0$ 时,有

$$e(0,S_d)=\left(\int_{F_d}\|S_d(f)\|_{G_d}\mu_d(\mathrm{d}f)\right)^{\frac{1}{2}},$$

并称 $e(0,S_d)$ 为 S_d 的平均初始误差。

定义 2[4] 设 $\varepsilon\in(0,1)$, $d\in\mathbf{N}_+$, $X\in\{\mathrm{abs},\mathrm{nor}\}$。在平均框架下,对绝对误差(记为 abs)或者归一误差(记为 nor),多元问题 S_d 的信息复杂性定义为

$$n^X(\varepsilon,S_d):=\min\left\{n\in\mathbf{N}:e(n,S_d)\leqslant\varepsilon\mathrm{CRI}_d^{\frac{1}{2}}\right\},$$

其中,

$$\mathrm{CRI}_d=\begin{cases}1, & X=\mathrm{abs},\\ e^2(0,S_d), & X=\mathrm{nor}。\end{cases}$$

下面给出多元问题 $S=\{S_d\}_{d\in\mathbf{N}_+}$ 的代数可处理性的定义。

定义 3[4-6] 设 $X\in\{\mathrm{abs},\mathrm{nor}\}$,讨论多元逼近问题 $S=\{S_d\}_{d\in\mathbf{N}_+}$。

(1) 若存在常数 $C\geqslant0$ 和 $p\geqslant0$,使得对任意 $\varepsilon\in(0,1)$ 和 $d\in\mathbf{N}_+$,都有

$$n^X(\varepsilon,S_d)\leqslant C\varepsilon^{-p},$$

则称 S 是强多项式可处理的,简称 SPT。

(2)若存在常数 $C\geqslant0$、$p\geqslant0$ 及 $q\geqslant0$,使得对任意 $\varepsilon\in(0,1)$ 和 $d\in\mathbf{N}_+$,都有

$$n^X(\varepsilon,S_d)\leqslant C\varepsilon^{-p}d^q,$$

则称 S 是多项式可处理的,简称 PT。

(3)若存在常数 $C>0$ 和 $t>0$,使得对任意 $\varepsilon\in(0,1)$ 和 $d\in\mathbf{N}_+$,都有

$$n^X(\varepsilon,S_d)\leqslant C\exp(t(1+\ln d)(1+\ln\varepsilon^{-1})),$$

则称 S 是拟多项式可处理的,简称 QPT。

(4)若对所有 $s>0$ 和 $t>0$,都有

$$\lim_{\varepsilon^{-1}+d\to\infty}\frac{\ln n^X(\varepsilon,S_d)}{\varepsilon^{-s}+d^t}=0,$$

则称 S 是一致弱可处理的,简称 UWT。

(5)若满足

$$\lim_{\varepsilon^{-1}+d\to\infty}\frac{\ln n^X(\varepsilon,S_d)}{\varepsilon^{-1}+d}=0,$$

则称 S 是弱可处理的,简称 WT。

(6)若对固定的 $s>0$ 和 $t>0$,有

$$\lim_{\varepsilon^{-1}+d\to\infty}\frac{\ln n^X(\varepsilon,S_d)}{\varepsilon^{-s}+d^t}=0,$$

则称 S 是(s,t)-弱可处理的,简称(s,t)-WT。

注 1 由定义 3 知,SPT⇒PT⇒QPT⇒UWT⇒(s,t)-WT, $(1,1)$-WT⇔WT。

下面进一步讨论多元逼近问题 $S=\{S_d\}_{d\in\mathbf{N}_+}$ 的代数可处理性。设 $C_{\mu_d}:(F_d)^*\to F_d$ 是 μ_d 的协方差算子,$\nu_d=\mu_dS_d^{-1}$ 是 μ_d 的诱导测度,其中$(F_d)^*$是 F_d 的共轭空间[4]。定义 ν_d 的协方差算子

$$C_{\nu_d}:G_d\to G_d,\quad C_{\nu_d}=S_dC_{\mu_d}(S_d)^*,$$

其中$(S_d)^*$是 S_d 的对偶算子。设$\{(\lambda_{d,j},\eta_{d,j})\}_{j=1}^{\infty}$是 C_{ν_d} 的特征对序列,即

$$C_{\nu_d}\eta_{d,j}=\lambda_{d,j}\eta_{d,j},\quad \langle \eta_{d,i},\eta_{d,j}\rangle_{G_d}=\delta_{i,j},\quad i,\ j\in \mathbf{N}_+,$$

且满足

$$\lambda_{d,1}\geqslant\lambda_{d,2}\geqslant\cdots\geqslant 0,$$

其中,当 $i=j$ 时,$\delta_{i,j}=1$;当 $i\neq j$ 时,$\delta_{i,j}=0$。

由参考文献[4]及定义 1,$S_d(f)$的 n 次最佳算法为

$$A_{n,d}^{\bullet}(f)=\sum_{j=1}^{n}\langle S_d(f),\eta_{d,j}\rangle_{G_d}\eta_{d,j},$$

n 次最小平均误差为

$$e(n,S_d)=e(A_{n,d}^{\bullet})=\left(\sum_{j=n+1}^{\infty}\lambda_{d,j}\right)^{\frac{1}{2}}。$$

则对绝对误差或者归一误差,信息复杂性为

$$n^X(\varepsilon,S_d)=\min\left\{n\in\mathbf{N}:\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_{d,i}\leqslant\varepsilon^2\mathrm{CRI}_d\right\},\tag{4}$$

其中,

$$\mathrm{CRI}_d=\begin{cases}1, & X=\mathrm{abs},\\ \sum\limits_{i=1}^{\infty}\lambda_{d,i}, & X=\mathrm{nor}。\end{cases}$$

多元问题 $S=\{S_d\}_{d\in\mathbf{N}_+}$的$(s,t)$-弱可处理性用来描述当 $d\to\infty$ 或者 $\varepsilon\to 0$ 时 S_d 的信息复杂性 $n^X(\varepsilon,S_d)$与 ε^{-s}及 d^t 的依赖关系。关于(s,t)-弱可处理性,有如下结论。

引理 1　设非零多元问题 $S=\{S_d\}_{d\in\mathbf{N}_+}$。在平均框架下,对于绝对误差或者归一误差,如果当 $t>0$ 时,存在正数 $\tau\in(0,1)$,使得

$$\lim_{d\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}\lambda_{d,i}^{\tau}\right)^{\frac{1}{\tau}}}{\mathrm{CRI}_d}\right)}{d^t}=0,$$

那么对上述 t 及任意 $s>0$,S 是(s,t)-WT。

证明　设 $t>0$。由于对任意 $\tau\in(0,1)$,有

$$j^{\frac{1}{\tau}}\lambda_{d,j}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{j}\lambda_{d,i}^{\tau}\right)^{\frac{1}{\tau}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_{d,i}^{\tau}\right)^{\frac{1}{\tau}},$$

因此

$$\sum_{j=n+1}^{\infty}\lambda_{d,j}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_{d,i}^{\tau}\right)^{\frac{1}{\tau}}\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{j^{\frac{1}{\tau}}}=\frac{\tau}{(1-\tau)n^{\frac{1-\tau}{\tau}}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_{d,i}^{\tau}\right)^{\frac{1}{\tau}},$$

进而根据式(4),有

$$n^X(\varepsilon,S_d)\leqslant\left\lfloor\left(\frac{\tau}{1-\tau}\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}\lambda_{d,i}^{\tau}\right)^{\frac{1}{\tau}}}{\mathrm{CRI}_d}\right)^{\frac{\tau}{1-\tau}}\varepsilon^{-\frac{2\tau}{1-\tau}}\right\rfloor,\tag{5}$$

这里$\lfloor x\rfloor$表示小于等于 x 的最大整数,因此,由式(5),对任意 $s>0$,有

$$0\leqslant\lim_{\varepsilon^{-1}+d\to\infty}\frac{\ln n^X(\varepsilon,S_d)}{\varepsilon^{-s}+d^t}\leqslant\lim_{\varepsilon^{-1}+d\to\infty}\frac{\frac{\tau}{1-\tau}\ln\frac{\tau}{1-\tau}+\frac{2\tau}{1-\tau}\ln(\varepsilon^{-1})}{\varepsilon^{-s}+d^t}+\frac{\tau}{1-\tau}\lim_{\varepsilon^{-1}+d\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}\lambda_{d,i}^{\tau}\right)^{\frac{1}{\tau}}}{\mathrm{CRI}_d}\right)}{\varepsilon^{-s}+d^t}$$

$$=\frac{\tau}{1-\tau}\lim_{\varepsilon^{-1}+d\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}\lambda_{d,i}^{\tau}\right)^{\frac{1}{\tau}}}{\mathrm{CRI}_d}\right)}{\varepsilon^{-s}+d^t}\leqslant\frac{\tau}{1-\tau}\lim_{d\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}\lambda_{d,i}^{\tau}\right)^{\frac{1}{\tau}}}{\mathrm{CRI}_d}\right)}{d^t}=0。$$

故由定义 3,在绝对误差或者归一误差下,对上述 t 及任意 $s>0$, S 是 (s,t)-WT。证毕。

1.2 带权重的协方差核

1.2.1 Gaussian ANOVA 协方差核

设序列 $\boldsymbol{\gamma}=\{\gamma_k\}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}=\{\alpha_k\}$ 满足式(1)。$H_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}$ 是 $[0,1]^d$ 上的 Banach 空间,它的零平均高斯测度 μ_d 的协方差核 $K_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}$ 满足式(2),其中 $K_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}$ 的权重为 $R_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}$。本节讨论具有 Gaussian ANOVA 权重 $\psi_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}$ 的协方差核(简称 Gaussian ANOVA 协方差核) $K_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}$,即权重 $R_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{h})=\psi_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{h}):=\prod_{j=1}^{d}\psi_{\gamma_j,\alpha_j}(h_j)$,满足

$$\psi_{\gamma,\alpha}(h):=\begin{cases}1, & h=0,\\ \dfrac{\gamma}{h!}, & 1\leqslant h<\lceil\alpha\rceil,\\ \dfrac{\gamma(h-\lceil\alpha\rceil!)}{h!}, & h\geqslant\lceil\alpha\rceil,\end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{h}=(h_1,h_2,\cdots,h_d)\in\mathbf{N}^d$, $\alpha>1$, $\gamma\in(0,1]$, $\lceil x\rceil$ 表示大于等于 x 的最小整数。

1.2.2 一类 Gaussian ANOVA 协方差核

设序列 $\boldsymbol{\gamma}=\{\gamma_k\}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}=\{\alpha_k\}$ 满足式(1)。$H_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}$ 是 $[0,1]^d$ 上的 Banach 空间,它的零平均高斯测度 μ_d 的协方差核 $K_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}$ 满足式(2),其中 $K_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}$ 的权重为 $R_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}$。本节讨论具有另一类 Gaussian ANOVA 权重 $\omega_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}$ 的协方差核(简称一类 Gaussian ANOVA 协方差核) $K_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}$,即权重 $R_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{h})=\omega_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{h}):=\prod_{j=1}^{d}\omega_{\gamma_j,\alpha_j}(h_j)$,满足

$$\omega_{\gamma,\alpha}(h):=\left(1+\frac{1}{\gamma}\sum_{l=1}^{\lceil\alpha\rceil}\theta_l(h)\right)^{-1},$$

$$\theta_l(h):=\begin{cases}\dfrac{h!}{(h-l)!}, & h\geqslant l,\\ 0, & 0\leqslant h<l,\end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{h}=(h_1,h_2,\cdots,h_d)\in\mathbf{N}^d$, $\alpha>1$, $\gamma\in(0,1]$。

注 2 在函数逼近论中,Korobov 权重是一个非常经典的权重,在很多文献中都有讨论[9,13-15]。设序列 $\boldsymbol{\gamma}=\{\gamma_k\}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}=\{\alpha_k\}$ 满足式(1)。Korobov 权重 $r_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}$ 定义为 $r_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{h}):=\prod_{j=1}^{d}r_{\gamma_j,\alpha_j}(h_j)$,满足

$$r_{\gamma,\alpha}(h):=\begin{cases}1, & h=0,\\ \dfrac{\gamma}{h^{\alpha}}, & h\geqslant 0,\end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{h}=(h_1,h_2,\cdots,h_d)\in\mathbf{N}^d$, $\alpha>1$, $\gamma\in(0,1]$。

Gaussian ANOVA 权重 $\psi_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}$ 和另一类 Gaussian ANOVA 权重 $\omega_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}$ 与 Korobov 权重 $r_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}$ 定义不同,但是它们与 Korobov 权重有一定的关系。Gaussian ANOVA 权重和另一类 Gaussian ANOVA 权重可以看作 Korobov 权重的变形。

引理 2[16] 设 $R_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}\in\{\psi_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}},\omega_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}\}$。则对任意 j, $h\in\mathbf{N}_+$,有

$$\frac{\gamma_j}{3h^{\lceil\alpha_j\rceil}}\leqslant R_{\gamma_j,\alpha_j}(h)\leqslant\lceil\alpha_1\rceil^{\lceil\alpha_1\rceil}\frac{\gamma_j}{h^{\lceil\alpha_1\rceil}}。$$

注 3 由 $\psi_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{h})$ 和 $\omega_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{h})$ 的定义及引理 2 知,当 $R_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}\in\{\psi_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}},\omega_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}\}$ 时,若 $\boldsymbol{h}=\{0\}^d$,则 $R_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{h})=1$;若 $\boldsymbol{h}\in\mathbf{N}^d\setminus\{0\}^d$ 时,则 $R_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{h})\leqslant 1$。

2 具有协方差核的 Banach 空间上的逼近问题的代数可处理性

设序列 $\boldsymbol{\gamma}=\{\gamma_k\}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}=\{\alpha_k\}$ 满足式(1)。$H_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}$ 是 $[0,1]^d$ 上的 Banach 空间,它的零平均高斯测度 μ_d 的协方差核 $K_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}$ 满足(2),其中 $K_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}$ 的非负权重为 $R_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}$。

考虑 L_2 逼近问题

$$\mathrm{APP}=\{\mathrm{APP}_d:H_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}\to L_2([0,1]^d)\}\tag{6}$$

满足 $\mathrm{APP}_d(f)=f,\ f\in H_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}$。

设 $\nu_d=\mu_d\mathrm{APP}_d^{-1}$ 是 μ_d 的诱导测度。则 ν_d 的协方差算子$C_{\nu_d}:L_2([0,1]^d)\to L_2([0,1]^d)$满足

$$(C_{\nu_d}f)(\boldsymbol{x})=\int_{[0,1]^d}K_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}, \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\in[0,1]^d$。设$\{(\lambda_{d,j},\eta_{d,j})\}_{j=1}^{\infty}$ 是 C_{ν_d} 的特征对序列,即 $C_{\nu_d}\eta_{d,j}=\lambda_{d,j}\eta_{d,j},\ j\in\mathbf{N}_+$,且满足 $\lambda_{d,1}\geqslant\lambda_{d,2}\geqslant\cdots\geqslant0$。因此,由式(2)、(7)知,$C_{\nu_d}$ 的所有特征值 $\lambda_{d,j},\ j\in\mathbf{N}_+$ 为

$$R_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{h})=\prod_{j=1}^{d}R_{\gamma_j,\alpha_j}(h_j),\quad \boldsymbol{h}\in\mathbf{N}^d。$$

注 4　设$R_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}\in\{\psi_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}},\boldsymbol{\omega}_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}\}$。由注 3 知,$\lambda_{d,1}=1$。由式(4)当 $X\in\{\mathrm{abs},\mathrm{nor}\}$ 时,APP_d 的信息复杂性为

$$n^X(\varepsilon,\mathrm{APP}_d)=\min\left\{n\in\mathbf{N}:\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_{d,i}\leqslant\varepsilon^2\mathrm{CRI}_d\right\}, \tag{8}$$

其中,当 $X=\mathrm{abs}$ 时,$\mathrm{CRI}_d=1$;当 $X=\mathrm{nor}$ 时,

$$\begin{aligned}\mathrm{CRI}_d&=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_{d,i}=\sum_{h\in\mathbf{N}^d}R_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{h})=\sum_{h\in\mathbf{N}^d}\prod_{j=1}^{d}R_{\gamma_j,\alpha_j}(h_j)\\&=\prod_{j=1}^{d}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}R_{\gamma_j,\alpha_j}(k)\right)。\end{aligned} \tag{9}$$

因为 $R_{\gamma_j,\alpha_j}(k)\geqslant0,\ k\in\mathbf{N},\ i=1,2,\cdots,d$,所以,$\mathrm{CRI}_d\geqslant1$。因此,根据式(8)、(9),有

$$n^{\mathrm{nor}}(\varepsilon,\mathrm{APP}_d)\leqslant n^{\mathrm{abs}}(\varepsilon,\mathrm{APP}_d)。 \tag{10}$$

下面讨论当 Banach 空间 $H_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}$的协方差核具有权重$R_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}\in\{\psi_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}},\omega_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}\}$时,上述 L_2 逼近问题(6)在绝对误差和归一误差下的(s,t)-弱可处理。主要结论如下。

定理 1　设 $\boldsymbol{\gamma}=\{\gamma_k\}$和$\boldsymbol{\alpha}=\{\alpha_k\}$满足式(1),$H_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}$空间的协方差核具有权重$R_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}\in\{\psi_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}},\omega_{d,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}\}$。则在平均框架下,对绝对误差或者归一误差,有关上述 L_2 逼近问题 APP 有如下结论:

(1) 当 $t>1,\ s>0$ 时,APP 是(s,t)-弱可处理的。

(2) 当 $t=1,\ s>0$ 时,APP 是(s,t)-弱可处理的充分必要条件是$\lim\limits_{j\to\infty}\gamma_j=0$。

3　主要结果的证明

证明　(1)设 $t>1,s>0$。由式(10)知,只需要证明在绝对误差下,APP 是(s,t)-弱可处理的。

取 $\tau\in\left(\frac{1}{\lceil\alpha_1\rceil},1\right)$。则存在常数 $C(\tau)>0$,使得 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\lceil\alpha_1\rceil\tau}}\leqslant C(\tau)$。更进一步,根据式(9)及引理 2,有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_{d,i}^{\tau}&=\prod_{j=1}^{d}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}(R_{\gamma_j,\alpha_j}(k))^{\tau}\right)\\&\leqslant\prod_{j=1}^{d}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\lceil\alpha_1\rceil^{\lceil\alpha_1\rceil\tau}\frac{\gamma_j^{\tau}}{k^{\lceil\alpha_1\rceil\tau}}\right)\\&\leqslant\prod_{j=1}^{d}(1+C(\tau)\lceil\alpha_1\rceil^{\lceil\alpha_1\rceil\tau}\gamma_j^{\tau})。\end{aligned} \tag{11}$$

又当 $x\geqslant0$ 时,有 $\ln(1+x)\leqslant x$。故当 $t>1$ 时,由式(11)得

$$\begin{aligned}0&\leqslant\lim_{d\to\infty}\frac{\ln\left((\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_{d,i}^{\tau})^{\frac{1}{\tau}}\right)}{d^t}\leqslant\lim_{d\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{d}\ln(1+C(\tau)\lceil\alpha_1\rceil^{\lceil\alpha_1\rceil\tau}\gamma_j^{\tau})}{\tau d^t}\\&\leqslant\lim_{d\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{d}C(\tau)\lceil\alpha_1\rceil^{\lceil\alpha_1\rceil\tau}\gamma_j^{\tau}}{\tau d^t}\leqslant\lim_{d\to\infty}\frac{C(\tau)\lceil\alpha_1\rceil^{\lceil\alpha_1\rceil\tau}\gamma_1^{\tau}d}{\tau d^t}=0,\end{aligned}$$

即$\lim\limits_{d\to\infty}\frac{\ln\left((\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_{d,i}^{\tau})^{1/\tau}\right)}{d^t}=0$,因此,当 $t>1,\ s>0$ 时,由引理 1,在绝对误差下 APP 是(s,t)-弱可处理的。得证。

(2)设 $t=1$, $s>0$。一方面,假设 $\lim\limits_{j\to\infty}\gamma_j=0$。由式(10)知,只需证明在绝对误差下,APP 是$(s,1)$-弱可处理的。

取 $\tau\in\left(\frac{1}{\lceil\alpha_1\rceil},1\right)$。则存在常数 $C(\tau)>0$,使得式(11)成立,进而有

$$0\leqslant\lim_{d\to\infty}\frac{\ln\left(\left(\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_{d,i}^{\tau}\right)^{1/\tau}\right)}{d}\leqslant\lim_{d\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{d}\ln\left(1+C(\tau)\lceil\alpha_1\rceil^{\lceil\alpha_1\rceil\tau}\gamma_j^{\tau}\right)}{\tau d}$$
$$=\frac{1}{\tau}\lim_{d\to\infty}\ln\left(1+C(\tau)\lceil\alpha_1\rceil^{\lceil\alpha_1\rceil\tau}\gamma_d^{\tau}\right)=0,$$

因此,由引理 1,在绝对误差下 APP 是$(s,1)$-弱可处理的。

另一方面,假设在绝对误差或者归一误差下,APP 是$(s,1)$-弱可处理的。下证 $\lim\limits_{j\to\infty}\gamma_j=0$。由式(10)知,只需要假设在归一误差下,APP 是$(s,1)$-弱可处理的。

由式(9)、$\mathrm{CRI}_d-\sum\limits_{i=1}^{n^{\mathrm{nor}}(\varepsilon,\mathrm{APP}_d)}\lambda_{d,i}=\sum\limits_{i=n^{\mathrm{nor}}(\varepsilon,\mathrm{APP}_d)+1}^{\infty}\lambda_{d,i}\leqslant\varepsilon^2\mathrm{CRI}_d$ 及 $\lambda_{d,1}=1$,得

$$(1-\varepsilon^2)\prod_{j=1}^{d}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}R_{\gamma_j,\alpha_j}(k)\right)=(1-\varepsilon^2)\mathrm{CRI}_d\leqslant\sum_{i=1}^{n^{\mathrm{nor}}(\varepsilon,\mathrm{APP}_d)}\lambda_{d,i}\leqslant n^{\mathrm{nor}}(\varepsilon,\mathrm{APP}_d)\lambda_{d,1}=n^{\mathrm{nor}}(\varepsilon,\mathrm{APP}_d),\tag{12}$$

因此,由式(12)及引理 2 得

$$\begin{aligned}\ln n^{\mathrm{nor}}(\varepsilon,\mathrm{APP}_d)&\geqslant\ln(1-\varepsilon^2)+\sum_{j=1}^{d}\ln\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}R_{\gamma_j,\alpha_j}(k)\right)\\&\geqslant\ln(1-\varepsilon^2)+\sum_{j=1}^{d}\ln(1+R_{\gamma_j,\alpha_j}(1))\\&\geqslant\ln(1-\varepsilon^2)+\sum_{j=1}^{d}\ln\left(1+\frac{\gamma_j}{3}\right)\\&\geqslant\ln(1-\varepsilon^2)+d\ln\left(1+\frac{\gamma_d}{3}\right)。\end{aligned}\tag{13}$$

令 $\varepsilon=\frac{1}{2}$,于是由式(13)及其假设得

$$0=\lim_{d\to\infty}\frac{\ln n^{\mathrm{nor}}\left(\frac{1}{2},\mathrm{APP}_d\right)}{2^s+d}\geqslant\lim_{d\to\infty}\frac{\ln\frac{3}{4}+d\ln\left(1+\frac{\gamma_d}{3}\right)}{2^s+d}=\lim_{d\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{\gamma_d}{3}\right)}{1+2^s/d}=\lim_{d\to\infty}\ln\left(1+\frac{\gamma_d}{3}\right)\geqslant0,$$

从而 $\lim\limits_{d\to\infty}\gamma_d=0$。得证。

4　结论

本文主要研究在平均框架下,当 $s>0$, $t\geqslant1$ 时,具有 Gaussian ANOVA 权重及另一类 Gaussian ANOVA 权重的协方差核的 Banach 空间中的 L_2 逼近问题 APP 的(s,t)-弱可处理性,并得到对绝对误差或归一误差,对任意 $s>0,t>1$,APP 是(s,t)-弱可处理;当 $s>0,t=1$ 时,APP 是(s,t)-弱可处理的充分必要条件是 $\lim\limits_{j\to\infty}\gamma_j=0$。具有权重的协方差核的 Banach 空间上的逼近问题是一类非常重要的问题,将继续探讨这些问题的代数可处理性和指数收敛可处理性,特别地,当 $s>0$, $t<1$ 时,APP 的(s,t)-弱可处理性有待进一步研究。

参考文献:

[1] BERLINET A, THOMAS-AGNAN C. Reproducing kernel Hilbert spaces in probability and statistics[M]. New York: Springer, 2004:75-94.
[2] GLIMM J, JAFFE A. Quantum physics[M]. New York: Springer, 1987:273-471.
[3] TRAUB J F, WERSCHULZ A G. Complexity and information[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1998:43-52.

[4] NOVAK E, WOŹNIAKOWSKI H. Tractability of multivariate problems, volume I: linear information[M]. Zürich: European Mathematical Society, 2008:14-283.

[5] NOVAK E, WOŹNIAKOWSKI H. Tractability of multivariate problems, volume II: standard information for functionals[M]. Zürich: European Mathematical Society, 2010:71-296.

[6] NOVAK E, WOŹNIAKOWSKI H. Tractability of multivariate problems, volume III: standard information for operators[M]. Zürich:European Mathematical Society, 2012:185-440.

[7] LIU Yongping, XU Guiqiao. Average case tractability of a multivariate approximation problem[J]. Journal of Complexity, 2017, 43:76-102.

[8] LIU Yongping, XU Guiqiao. (s,t)-weak tractability of multivariate linear problems in the average case setting[J]. Acta Mathematica Scientia, 2019, 39(4):1033-1052.

[9] CHEN Jia, WANG Heping, ZHANG Jie. Average case (s,t)-weak tractability of non-homogeneous tensor product problems [J]. Journal of Complexity, 2018, 49:27-45.

[10] FASSHAUER G E, HICKERNELL F J, WOŹNIAKOWSKI H. Average case approximation: convergence and tractability of Gaussian kernels[M]//PLASKOTA L, WOŹNIAKOWSKI H, et al. Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo 2010. Berlin: Springer, 2012:329-345.

[11] KHARTOV A A. A simplified criterion for quasi-polynomial tractability of approximation of random elements and its applications[J]. Journal of Complexity, 2016, 34:30-41.

[12] CHEN Jia, WANG Heping. Average case tractability of multivariate approximation with Gaussian kernels[J]. Journal of Approximation Theory, 2019, 239:51-71.

[13] LIFSHITS M A, PAPAGEORGIOU A, WOŹNIAKOWSKI H. Average case tractability of non-homogeneous tensor product problems[J]. Journal of Complexity, 2012, 28:539-561.

[14] XU Guiqiao. Quasi-polynomial tractability of linear problems in the average case setting[J]. Journal of Complexity, 2014, 30:54-68.

[15] XU Guiqiao. Tractability of linear problems defined over Hilbert spaces[J]. Journal of Complexity, 2014, 30:735-749.

[16] YAN Huichao, CHEN Jia. Tractability of approximation of functions defined over weighted Hilbert spaces[J]. Axioms, 2024, 13:108.

(编辑:胡春燕)

(上接第 49 页)

[7] RUIZ V, ARANDA-ESCOLÁSTICO E, SALT J L, et al. Stability and synchronization of switched multi-rate recurrent neural networks[J]. IEEE Access, 2021, 9:45614-45621.

[8] GAO Bo, ZHANG Weinian. Equilibria and their bifurcations in a recurrent neural network involving iterates of a transcendental function[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2008, 19(5):782-794.

[9] LI Yingguo. Stability and bifurcation analysis of a three-dimensional recurrent neural network with time delay[J]. Journal of Applied Mathematics, 2012:1-13.

[10] ZHAO Dongxia, WANG Junmin. Exponential stability and spectral analysis of a delayed ring neural network with a small world connection[J]. Nonlinear Dynamics, 2012, 68:77-93.

[11] 鲍芳霞,赵东霞,庞玉婷. 具有 3 个时滞的环形神经网络系统的稳定性分析[J]. 重庆理工大学学报(自然科学),2022,36(8):318-326.

BAO Fangxia, ZHAO Dongxia, PANG Yuting. Stability analysis of a circular neural network system withthree time delays [J]. Journal of Chongqing University of Technology (Natural Sciences), 2022, 36(8):318-326.

[12] RUAN Shigui, WEI Junjie. On the zeros of transcendental functions with applications to stability of delay differential equations with two delays[J]. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, 2003, 10(6):863-874.

(编辑:胡春燕)