

带有病毒携带猪和环境病毒的非洲猪瘟传染病模型的稳定性分析与最优控制

王坤,张瑞霞*

(中北大学数学学院,山西 太原 030051)

摘要:为研究病毒携带猪和环境病毒对非洲猪瘟(African swine fever, ASF)传播的影响,建立非洲猪瘟传播模型,运用下一代矩阵法计算基本再生数 R_0 ,讨论平衡点的存在性,分析无病平衡点和地方病平衡点的局部稳定性和全局稳定性。应用庞特里亚金(Pontryagin)极大值原理和最优控制理论得出最优控制解。最后,数值模拟验证理论的正确性,并揭示病毒携带猪和环境中的病毒对传播的影响。最优控制模拟结果表明,在有控制的情况下,感染数量有所减少。

关键词:非洲猪瘟;传染病模型;基本再生数;稳定性;最优控制

中图分类号:O175

文献标志码:A

引用格式:王坤,张瑞霞.带有病毒携带猪和环境病毒的非洲猪瘟传染病模型的稳定性分析与最优控制[J].山东大学学报(理学版),2026,61(2):64-74.

Stability analysis and optimal control of the epidemic model with virus-carrier and environmental virus for African swine fever

WANG Kun, ZHANG Ruixia*

(School of Mathematics, North University of China, Taiyuan 030051, Shanxi, China)

Abstract: To investigate the impact of virus-carrying pigs and environmental viruses on the spread of African swine fever (ASF), an ASF transmission model is constructed. The basic reproduction number R_0 is calculated by the next generation matrix method. The existence of the equilibrium point is discussed, and the local stability and global stability of the disease-free equilibrium and the endemic equilibrium are analyzed. By applying Pontryagin's maximum principle and optimal control theory, the optimal control solution is obtained. Finally, the numerical simulations verify the correctness of the conclusion and reveal the influence of the virus carrying pigs and the virus in the environment on the transmission. The optimal control simulation results show that the number of infections is reduced under controlled conditions.

Key words: African swine fever; epidemic model; basic reproduction number; stability; optimal control

0 引言

非洲猪瘟(African swine fever, ASF)是一种由非洲猪瘟病毒(African swine fever virus, ASFV)引发的猪类急性传染病^[1],其死亡率和发病率可高达100%^[2],各个年龄段和不同品种的猪都可能被感染^[3]。该疾病被世界动物卫生组织确定为法定报告动物疾病,并且我国将其归为一类动物疾病。自2018年8月沈阳猪瘟疫情首次爆发以来,非洲猪瘟在中国传播^[4]。在缺乏疫苗的情况下,非洲猪瘟对猪和猪肉产品的国内外贸易构成严重威胁^[5-6]。

近年来,许多学者通过数学建模的方式对ASF进行研究。Barongo等^[7]运用随机模型对非洲猪瘟病毒在散养猪群中的传播进行预测和评估,研究生物安全措施和疫苗接种的干预效果。O'Neill等^[8]建立年龄结

收稿日期:2024-06-14;网络出版时间:2025-05-09

基金项目:国家自然科学基金资助项目(12001501,12071445,11571324,12101574);山西省自然科学基金项目(20210302124621)

第一作者:王坤(1996—),女,硕士研究生,研究方向为生物数学. E-mail:1156088652@qq.com

*通信作者:张瑞霞(1980—),女,副教授,博士,研究方向为生物数学. E-mail:zhangruixia@nuc.edu.cn

构的猪瘟传播模型。Osman 等^[9]建立以蜚为传播媒介的数学模型。Kouidere 等^[10]构建 SI-SEI 动力学模型,分析不同策略对生猪和环境的影响。Chuchard 等^[11]研究非洲猪瘟在猪场传播的 SLI-SC 数学模型,考虑人类作为污染载体对 ASF 传播的影响。Song 等^[12]考虑泔水及环境中病毒对传播的影响,对猪瘟传播进行建模及稳定性分析。Song 等^[13]分析有扑杀与无扑杀的非洲猪瘟传播动力学模型,结果表明,扑杀、提高有症状感染猪的检出率及消毒措施可有效遏制非洲猪瘟在中国的传播。

经历急性感染后存活的猪,在感染后的 30 多天内,体内的病毒血症会持续存在^[14],被认为是病毒携带者。非洲猪瘟病毒在携带猪中可能会被再次激活^[15-16],并导致病毒不规则脱落和传播,这会在疾病得到控制时再次引起新的暴发,因此,病毒携带者不容忽视。然而很少有文章考虑病毒携带猪对非洲猪瘟传播的影响,为此,本文建立了含有病毒携带猪的 SEIC-V 传播动力学模型。

1 动力学模型

本文把猪分为易感猪 S 、潜伏猪 E 、染病猪 I 和病毒携带猪 C , V 表示环境中的病毒量。易感猪被染病猪传染,感染率为 β ;易感猪接触病毒携带猪后被传染,感染率为 $\beta\varepsilon$;易感猪被环境中的病毒所感染,感染率为 α ;猪的自然死亡率为 d ;染病猪的因病死亡率为 δ ;猪的常数输入率为 Λ ;环境中病毒的清除率为 ρ ;潜伏猪到染病猪的转化率为 σ ;染病猪到病毒携带猪的转化率为 r ;病毒携带猪到染病猪的转化率为 k ;潜伏猪、染病猪和病毒携带猪对环境的污染率分别为 θ_e 、 θ_i 和 θ_c 。动力学传播流程图如图 1 所示。

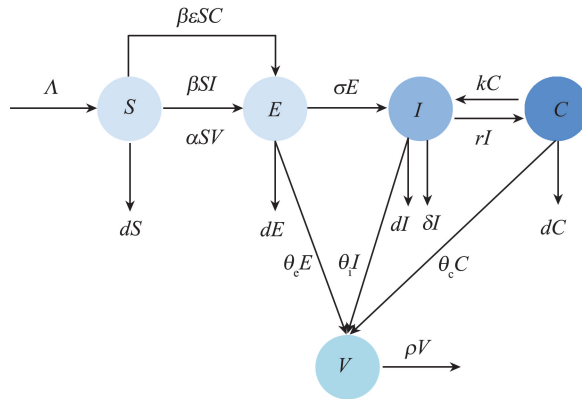


图 1 ASFV 传播流程图
Fig.1 Flow diagram of ASFV transmission

模型如下:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \beta S(t)I(t) - \beta\varepsilon S(t)C(t) - \alpha S(t)V(t) - dS(t), \\ \frac{dE(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) + \beta\varepsilon S(t)C(t) + \alpha S(t)V(t) - (\sigma + d)E(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \sigma E(t) + kC(t) - (\delta + r + d)I(t), \\ \frac{dC(t)}{dt} = rI(t) - (k + d)C(t), \\ \frac{dV(t)}{dt} = \theta_e E(t) + \theta_i I(t) + \theta_c C(t) - \rho V(t). \end{cases} \quad (1)$$

根据生物学意义,假设非负初始条件:

$$S(0) > 0, E(0) \geq 0, I(0) \geq 0, C(0) \geq 0, V(0) \geq 0. \quad (2)$$

定理 1 系统(1)的解是非负的且是有界的。

证明 由非负初始条件(2),有

$$S(t) = e^{-\int_0^t (\beta I(s) + \beta\varepsilon C(s) + \alpha V(s) + d) ds} \left(S(0) + \int_0^t \Lambda e^{\int_0^s A_1 dr} ds \right) > 0,$$

$$\begin{aligned}
 E(t) &= e^{-\int_0^t (\sigma+d) ds} \left(E(0) + \int_0^t A_2 e^{\int_s^t (\sigma+d) ds} ds \right), \\
 I(t) &= e^{-\int_0^t (\delta+r+d) ds} \left(I(0) + \int_0^t (\sigma E(s) + kC(s)) e^{\int_s^t (\delta+r+d) ds} ds \right), \\
 C(t) &= e^{-\int_0^t (k+d) ds} \left(C(0) + \int_0^t (rI(s)) e^{\int_s^t (k+d) ds} ds \right), \\
 V(t) &= e^{-\int_0^t \rho ds} \left(V(0) + \int_0^t (\theta_c E(s) + \theta_i I(s) + \theta_c C(s)) e^{\int_s^t \rho ds} ds \right),
 \end{aligned}$$

其中, $A_1 = (\beta I(r) + \beta \varepsilon C(r) + \alpha V(r) + d)$, $A_2 = (\beta S(s) I(s) + \beta \varepsilon S(s) C(s) + \alpha S(s) V(s))$, 从而 $S(t) \geq 0$, $E(t) \geq 0$, $I(t) \geq 0$, $C(t) \geq 0$ 和 $V(t) \geq 0$, 因此, 解是非负的。

下证解的有界性。由于系统(1)有

$$\begin{aligned}
 (S+E+I+C)' &= \Lambda - dS - dE - (\delta-d)I - dC \leq \Lambda - d(S+E+I+C), \\
 V' &= \theta_c E + \theta_i I + \theta_c C - \rho V \leq \frac{\Lambda}{d} (\theta_c + \theta_i + \theta_c) - \rho V,
 \end{aligned}$$

因此

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} (S+E+I+C) \leq \frac{\Lambda}{d}, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} V \leq \frac{\Lambda (\theta_c + \theta_i + \theta_c)}{\rho d},$$

故系统(1)的解是非负且有界的。同时可知系统(1)的可行域为

$$\Omega = \left\{ (S, E, I, C, V) \in \mathbf{R}_+^5 : 0 \leq S+E+I+C \leq \frac{\Lambda}{d}, 0 \leq V \leq \frac{\Lambda (\theta_c + \theta_i + \theta_c)}{\rho d} \right\}. \quad (3)$$

2 基本再生数和平衡点

2.1 基本再生数

令系统(1)的右端为0, 得无病平衡点 $P_0(S_0, 0, 0, 0, 0)$, 其中 $S_0 = \Lambda/d$ 。下面由下一代矩阵法求基本再生数 R_0 。由系统(1)可知

$$\Phi = \begin{pmatrix} \beta S(t)I(t) + \beta \varepsilon S(t)C(t) + \alpha S(t)V(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} (\sigma+d)E(t) \\ -\sigma E(t) - kC(t) + (\delta+r+d)I(t) \\ -rI(t) + (k+d)C(t) \\ -\theta_c E(t) - \theta_i I(t) - \theta_c C(t) + \rho V(t) \end{pmatrix}.$$

Φ 和 Ψ 在 P_0 处的 Jacobian 矩阵为

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \beta S_0 & \beta \varepsilon S_0 & \alpha S_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} (\sigma+d) & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma & (\delta+r+d) & -k & 0 \\ 0 & -r & (k+d) & 0 \\ -\theta_c & -\theta_i & -\theta_c & \rho \end{pmatrix}.$$

求得基本再生数为

$$R_0 = \rho(FV^{-1}) = \frac{S_0 [\beta \rho \sigma (k+d) + \beta \rho \sigma \varepsilon r + \alpha \theta_c [(\delta+r+d)(k+d) - kr] + \alpha \theta_i \sigma (k+d) + \alpha \theta_c \sigma r]}{\rho (\sigma+d) [(\delta+r+d)(k+d) - kr]}.$$

2.2 地方病平衡点

设地方病平衡点为 $P^* = (S^*, E^*, I^*, C^*, V^*)$, 则 P^* 满足下面方程:

$$\begin{cases} \Lambda - \beta S^*(t)I^*(t) - \beta \varepsilon S^*(t)C^*(t) - \alpha S^*(t)V^*(t) - dS^*(t) = 0, \\ \beta S^*(t)I^*(t) + \beta \varepsilon S^*(t)C^*(t) + \alpha S^*(t)V^*(t) - (\sigma+d)E^*(t) = 0, \\ \sigma E^*(t) + kC^*(t) - (\delta+r+d)I^*(t) = 0, \\ rI^*(t) - (k+d)C^*(t) = 0, \\ \theta_c E^*(t) + \theta_i I^*(t) + \theta_c C^*(t) - \rho V^*(t) = 0. \end{cases}$$

解得

$$\begin{aligned}
 S^* &= \frac{S_0}{R_0}, \quad E^* = \frac{\Lambda}{\sigma+d} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right), \\
 I^* &= \frac{\Lambda\sigma(k+d)}{(\sigma+d)[(\delta+r+d)(k+d)-kr]} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right), \\
 C^* &= \frac{\Lambda\sigma r}{(\sigma+d)[(\delta+r+d)(k+d)-kr]} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right), \\
 V^* &= \left(\frac{\Lambda\theta_c}{\rho(\sigma+d)} + \frac{\Lambda\theta_i\sigma(k+d) + \Lambda\theta_c r\sigma}{\rho(\sigma+d)[(\delta+r+d)(k+d)-kr]} \right) \left(1 - \frac{1}{R_0}\right),
 \end{aligned}$$

故当 $R_0 > 1$ 时,系统(1)存在唯一的地方病平衡点 P^* 。

经由以上分析,可得以下定理。

定理 2 对于系统(1),无病平衡点 $P_0(S_0, 0, 0, 0, 0)$ 始终存在;当 $R_0 > 1$ 时,存在唯一的地方病平衡点 $P^* = (S^*, E^*, I^*, C^*, V^*)$ 。

3 稳定性分析

3.1 局部稳定性

定理 3 当 $R_0 < 1$ 时,无病平衡点 P_0 在 Ω 上是局部渐近稳定的。

证明 在 P_0 处的 Jacobian 矩阵为

$$J_0|_{(P_0)} = \begin{pmatrix} -d & 0 & -\beta S_0 & -\beta \varepsilon S_0 & -\alpha S_0 \\ 0 & -(\sigma+d) & \beta S_0 & \beta \varepsilon S_0 & \alpha S_0 \\ 0 & \sigma & -(\delta+r+d) & k & 0 \\ 0 & 0 & r & -(k+d) & 0 \\ 0 & \theta_c & \theta_i & \theta_c & -\rho \end{pmatrix},$$

显然, $\lambda_1 = -d$, 其余特征根由以下特征方程给出:

$$B_1 = \beta S_0 \sigma (\lambda+k+d) (\lambda+\rho) + \beta \varepsilon S_0 \sigma r (\lambda+\rho) + \alpha \theta_c S_0 [(\lambda+\delta+r+d)(\lambda+k+d)-kr] + \alpha \theta_c S_0 \sigma r + \alpha \theta_i S_0 \sigma (\lambda+k+d),$$

其中 $B_1 = (\lambda+\rho)(\lambda+\sigma+d)[(\lambda+\delta+r+d)(\lambda+k+d)-kr]$ 。

下面用反证法证明其余特征根均具有负实部。

假设 $\text{Re}(\lambda) \geq 0$, 方程两边同时除以 B_1 并取绝对值,得

$$\begin{aligned}
 1 &= \left| \frac{\beta \sigma S_0 (\lambda+k+d)}{(\lambda+\sigma+d)[(\lambda+\delta+r+d)(\lambda+k+d)-kr]} + \frac{\beta \varepsilon S_0 \sigma r}{(\lambda+\sigma+d)[(\lambda+\delta+r+d)(\lambda+k+d)-kr]} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\alpha \theta_c S_0}{(\lambda+\rho)(\lambda+\sigma+d)} + \frac{\alpha \theta_i S_0 \sigma (\lambda+k+d)}{(\lambda+\rho)(\lambda+\sigma+d)[(\lambda+\delta+r+d)(\lambda+k+d)-kr]} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\alpha \theta_c S_0 \sigma r}{(\lambda+\rho)(\lambda+\sigma+d)[(\lambda+\delta+r+d)(\lambda+k+d)-kr]} \right| \\
 &\leq \left| \frac{\beta \sigma S_0 (k+d)}{(\sigma+d)[(\delta+r+d)(k+d)-kr]} + \frac{\beta \varepsilon S_0 \sigma r}{(\sigma+d)[(\delta+r+d)(k+d)-kr]} + \frac{\alpha \theta_c S_0}{\rho(\sigma+d)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\alpha \theta_i S_0 \sigma (k+d)}{\rho(\sigma+d)[(\delta+r+d)(k+d)-kr]} + \frac{\alpha \theta_c S_0 \sigma r}{\rho(\sigma+d)[(\delta+r+d)(k+d)-kr]} \right| = R_0,
 \end{aligned}$$

与 $R_0 < 1$ 矛盾。故当 $R_0 < 1$ 时,所有特征根均有负实部,无病平衡点 P_0 在 Ω 上是局部渐近稳定的。

定理 4 当 $R_0 > 1$ 时,地方病平衡点 P^* 在 Ω 上是局部渐近稳定的。

证明 在 P^* 处的 Jacobian 矩阵为

$$J_1|_{(P^*)} = \begin{pmatrix} -\beta I^* - \beta \varepsilon C^* - \alpha V^* - d & 0 & -\beta S^* & -\beta \varepsilon S^* & -\alpha S^* \\ \beta I^* + \beta \varepsilon C^* + \alpha V^* & -(\sigma+d) & \beta S^* & \beta \varepsilon S^* & \alpha S^* \\ 0 & \sigma & -(\delta+r+d) & k & 0 \\ 0 & 0 & r & -(k+d) & 0 \\ 0 & \theta_c & \theta_i & \theta_c & -\rho \end{pmatrix},$$

其特征方程为

$$\begin{aligned} & (\beta I^* + \beta \varepsilon C^* + \alpha V^*)(\lambda + \rho)(\lambda + \sigma + d)[(\lambda + \delta + r + d)(\lambda + k + d) - kr] + B_2 \\ & = \beta S^* \sigma(\lambda + k + d)(\lambda + \rho)(\lambda + d) + \beta \varepsilon S^* \sigma r(\lambda + \rho)(\lambda + d) + \alpha \theta_1 S^* \sigma(\lambda + k + d)(\lambda + d) \\ & \quad + \alpha \theta_c S^*(\lambda + d)[(\lambda + \delta + r + d)(\lambda + k + d) - kr] + \alpha \theta_c S^* \sigma r(\lambda + d), \end{aligned}$$

其中 $B_2 = (\lambda + d)(\lambda + \rho)(\lambda + \sigma + d)[(\lambda + \delta + r + d)(\lambda + k + d) - kr]$ 。利用类似定理 3 的证明方法可得, 当 $R_0 > 1$ 时, 所有特征根均有负实部, 地方病平衡点 P^* 在 Ω 上是局部渐近稳定的。

3.2 全局渐近稳定性

下面构造 Lyapunov 函数^[17-19], 证明模型(1)的无病平衡点和地方病平衡点是全局渐近稳定的。

定义函数 $F(x) = x - 1 - \ln x$, $x \in (0, \infty)$ 。可知当 $x > 0$ 时, $F(x) \geq 0$, $F_{\min}(x) = F(1) = 0$ 。

定理 5 当 $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点 P_0 在 Ω 上是全局渐近稳定的。

证明 令

$$L_0(t) = n_1^{(0)} S_0 F\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) + n_2^{(0)} E(t) + n_3^{(0)} I(t) + n_4^{(0)} C(t) + n_5^{(0)} V(t),$$

其中,

$$\begin{aligned} n_1^0 = n_2^0 = 1, \quad n_3^0 = S_0 \frac{(\alpha \theta_1 + \beta \rho)(k + d) + (\alpha \theta_c + \beta \rho \varepsilon)r}{\rho[(\delta + r + d)(k + d) - kr]}, \\ n_4^0 = S_0 \frac{(\alpha \theta_c + \beta \rho \varepsilon)(\delta + r + d) + (\alpha \theta_1 + \beta \rho)k}{\rho[(\delta + r + d)(k + d) - kr]}, \quad n_5^0 = S_0 \frac{\alpha}{\rho}. \end{aligned}$$

沿系统(1)的解对 L_0 求导得

$$\begin{aligned} \frac{dL_0(t)}{dt} & = \left(1 - \frac{S_0}{S(t)}\right) (\Lambda - \beta S(t)I(t) - \beta \varepsilon S(t)C(t) - \alpha S(t)V(t) - dS(t)) \\ & \quad + (\beta S(t)I(t) + \beta \varepsilon S(t)C(t) + \alpha S(t)V(t) - (\sigma + d)E(t)) \\ & \quad + n_3^{(0)}(\sigma E(t) + kC(t) - (\delta + r + d)I(t)) \\ & \quad + n_4^{(0)}(rI(t) - (k + d)C(t)) \\ & \quad + n_5^{(0)}(\theta_c E(t) + \theta_1 I(t) + \theta_c C(t) - \rho V(t)) \\ & = -\frac{d(S(t) - S_0)^2}{dt} + \beta S_0 I(t) + \beta \varepsilon S_0 C(t) + \alpha S_0 V(t) - (\sigma + d)E(t) \\ & \quad + n_3^{(0)}(\sigma E(t) + kC(t) - (\delta + r + d)I(t)) \\ & \quad + n_4^{(0)}(rI(t) - (k + d)C(t)) \\ & \quad + n_5^{(0)}(\theta_c E(t) + \theta_1 I(t) + \theta_c C(t) - \rho V(t)) \\ & = -\frac{d(S(t) - S_0)^2}{dt} + (\alpha S_0 - n_5^{(0)}\rho)V(t) \\ & \quad + (n_3^{(0)}\sigma + n_5^{(0)}\theta_c - (\sigma + d))E(t) \\ & \quad + (-n_3^{(0)}(\delta + r + d) + n_4^{(0)}r + n_5^{(0)}\theta_1 + \beta S_0)I(t) \\ & \quad + (n_3^{(0)}k - n_4^{(0)}(k + d) + n_5^{(0)}\theta_c + \beta \varepsilon S_0)C(t) \\ & = -\frac{d(S(t) - S_0)^2}{dt} + (\sigma + d)(R_0 - 1)E(t). \end{aligned}$$

当 $R_0 < 1$ 时, $L'_0(t) \leq 0$ 。此外, $L'_0(t) = 0$ 当且仅当 $S = S_0$, $E = 0$, $I = 0$, $C = 0$, $V = 0$ 。由 LaSalle 不变集原理^[19]知, 无病平衡点 P_0 在 Ω 上是全局渐近稳定的。

定理 7 当 $R_0 > 1$ 时, 地方病平衡点 P^* 在 Ω 上是全局渐近稳定的。

证明 令

$$L_1(t) = n_1^* S^* F\left(\frac{S(t)}{S^*}\right) + n_2^* E^* F\left(\frac{E(t)}{E^*}\right) + n_3^* I^* F\left(\frac{I(t)}{I^*}\right) + n_4^* C^* F\left(\frac{C(t)}{C^*}\right) + n_5^* V^* F\left(\frac{V(t)}{V^*}\right),$$

其中,

$$n_1^* = n_2^* = 1, \quad n_3^* = S^* \frac{(\alpha\theta_i + \beta\rho)(k+d) + (\alpha\theta_c + \beta\rho\varepsilon)r}{\rho[(\delta+r+d)(k+d) - kr]},$$

$$n_4^* = S^* \frac{(\alpha\theta_c + \beta\rho\varepsilon)(\delta+r+d) + (\alpha\theta_i + \beta\rho)k}{\rho[(\delta+r+d)(k+d) - kr]}, \quad n_5^* = S^* \frac{\alpha}{\rho}.$$

沿系统(1)的解对 L_1 求导得

$$\begin{aligned} \left. \frac{dL_1(t)}{dt} \right|_{(1)} &= \left(1 - \frac{S^*}{S(t)}\right) (\Lambda - \beta S(t)I(t) - \beta\varepsilon S(t)C(t) - \alpha S(t)V(t) - dS(t)) \\ &+ \left(1 - \frac{E^*}{E(t)}\right) (\beta S(t)I(t) + \beta\varepsilon S(t)C(t) + \alpha S(t)V(t) - (\sigma + d)E(t)) \\ &+ n_3^* \left(1 - \frac{I^*}{I(t)}\right) (\sigma E(t) + kC(t) - (\delta + r + d)I(t)) \\ &+ n_4^* \left(1 - \frac{C^*}{C(t)}\right) (rI(t) - (k + d)C(t)) \\ &+ n_5^* \left(1 - \frac{V^*}{V(t)}\right) (\theta_e E(t) + \theta_i I(t) + \theta_c C(t) - \rho V(t)) \\ &= -dS \left(\frac{S(t)}{S^*} - \frac{S^*}{S(t)} - 2 \right) - n_3^* kC \left(\frac{I^* C(t)}{I(t) C^*} - \frac{I(t) C^*}{I^* C(t)} - 2 \right) \\ &- \beta S^* I^* \left(\frac{S^*}{S(t)} - \frac{E^* S(t) I(t)}{E(t) S^* I^*} - \frac{I^* E(t)}{I(t) E^*} - 3 \right) \\ &- n_5^* \theta_c E^* \left(\frac{S^*}{S(t)} - \frac{E^* S(t) V(t)}{E(t) S^* V^*} - \frac{V^* E(t)}{V(t) E^*} - 3 \right) \\ &- \beta\varepsilon S^* C^* \left(\frac{S^*}{S(t)} - \frac{E^* S(t) C(t)}{E(t) S^* C^*} - \frac{I(t) C^*}{I^* C(t)} - \frac{I^* E(t)}{I(t) E^*} - 4 \right) \\ &- n_5^* \theta_i I^* \left(\frac{S^*}{S(t)} - \frac{E^* S(t) V(t)}{E(t) S^* V^*} - \frac{V^* I(t)}{V(t) I^*} - \frac{I^* E(t)}{I(t) E^*} - 4 \right) \\ &- n_5^* \theta_c C^* \left(\frac{S^*}{S(t)} - \frac{E^* S(t) V(t)}{E(t) S^* V^*} - \frac{I^* E(t)}{I(t) E^*} - \frac{I(t) C^*}{I^* C(t)} - \frac{V^* C(t)}{V(t) C^*} - 5 \right). \end{aligned}$$

当 $R_0 > 1$ 时, $L'_1(t) \leq 0$ 。此外, $L'_1(t) = 0$ 当且仅当 $S = S^*, E = E^*, I = I^*, C = C^*, V = V^*$, 即在集合 $\{(S(t), E(t), I(t), C(t), V(t)) \in \Omega | L_1(t) = 0\}$ 上的最大不变集是单点集 $\{P^*\}$ 。根据 LaSalle 不变集原理和 P^* 的局部稳定性知, 地方病平衡点 P^* 在 Ω 上是全局渐近稳定的。

4 最优控制

在本章中, 为了有效控制传染病的传播并实现成本最优化, 本文引入控制变量 $u_i (i = 1, 2)$: u_1 代表预防措施(检测, 加栅栏等); u_2 代表净化环境策略(清除尸体, 喷洒消毒等)。建立如下最优控制模型:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - (1 - u_1)\beta S(t)(I(t) + \varepsilon C(t)) - (1 - u_2)\alpha S(t)V(t) - dS(t), \\ \frac{dE(t)}{dt} = (1 - u_1)\beta S(t)(I(t) + \varepsilon C(t)) + (1 - u_2)\alpha S(t)V(t) - (\sigma + d)E(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \sigma E(t) + kC(t) - (\delta + r + d)I(t), \\ \frac{dC(t)}{dt} = rI(t) - (k + d)C(t), \\ \frac{dV(t)}{dt} = \theta_e E(t) + \theta_i I(t) + \theta_c C(t) - \rho V(t). \end{cases} \quad (4)$$

设目标函数为

$$J = \int_0^T \left[A_1 E + A_2 I + A_3 C + \frac{1}{2} (B_1 u_1^2 + B_2 u_2^2) \right] dt, \quad (5)$$

其中, T 为末态时间, A_1 、 A_2 、 A_3 是 E 、 I 、 C 的权重系数, B_1 、 B_2 是控制变量 u_1 、 u_2 的正权重系数。为寻找最优控制, 定义控制集 $U = \{u_i(t) \mid 0 \leq u_i(t) \leq 1, t \in [0, T], i = 1, 2\}$, 使得

$$J(u_1^*, u_2^*) = \min_{(u_1, u_2) \in U} J(u_1, u_2)。$$

由模型(4)的右端有界以及目标函数(5)的被积函数关于 $u_i(t)$ ($i = 1, 2$) 具有凸性, 且存在常数 p 使得 $A_1 E + A_2 I + A_3 C + \frac{1}{2} (B_1 u_1^2 + B_2 u_2^2) \geq p \sum_{i=1}^2 |u_i|^2$, 其中 $A_1 E + A_2 I + A_3 C \geq 0$, $p = \frac{1}{2} \min(B_i)$ ($i = 1, 2$), 因此, 最优控制解是存在的。

为寻找最优控制解, 定义哈密顿函数

$$H = A_1 E + A_2 I + A_3 C + \frac{1}{2} (B_1 u_1^2 + B_2 u_2^2) + \lambda_1 S + \lambda_2 E + \lambda_3 I + \lambda_4 C + \lambda_5 V,$$

其中 $\lambda_i(t)$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) 是各状态的伴随变量。

假设模型(4)在最优控制解 u_1^* 、 u_2^* 下的解为 $(S^*, E^*, I^*, C^*, V^*)$, 那么, 根据 Pontryagin 最大值原理可知, 伴随变量 $\lambda_i(t)$ 在横截条件 $\lambda_i(t) = 0$ 下满足如下方程:

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial S} = (\lambda_1 - \lambda_2) ((1 - u_1)\beta(I + \varepsilon C) + (1 - u_2)\alpha V) + \lambda_1 d,$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial E} = -A_1 + (\lambda_2 - \lambda_3)\sigma + \lambda_2 d - \lambda_5 \theta_c,$$

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial I} = -A_2 + (\lambda_1 - \lambda_2)(1 - u_1)\beta S + (\lambda_3 - \lambda_4)r + \lambda_3(\delta + d) - \lambda_5 \theta_i,$$

$$\frac{d\lambda_4}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial C} = -A_3 + (\lambda_1 - \lambda_2)(1 - u_1)\beta \varepsilon S + (\lambda_4 - \lambda_3)k + \lambda_4 d - \lambda_5 \theta_c,$$

$$\frac{d\lambda_5}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial V} = (\lambda_1 - \lambda_2)(1 - u_2)\alpha S + \lambda_5 \rho。$$

由控制条件 $\left. \frac{\partial H}{\partial u_1} \right|_{u_1^*} = 0$ 和 $\left. \frac{\partial H}{\partial u_2} \right|_{u_2^*} = 0$, 可得最优控制解为

$$u_1^* = \min \left\{ 1, \max \left\{ 0, \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)\beta S(I + \varepsilon C)}{B_1} \right\} \right\}, \quad u_2^* = \min \left\{ 1, \max \left\{ 0, \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)\alpha S V}{B_2} \right\} \right\}。$$

5 数值模拟

在这一部分, 首先使用偏秩相关系数 (partial rank correlation coefficient, PRCC) 来分析 R_0 相关参数的敏感性, 相关参数见表 1; 其次, 通过数值模拟来证明理论结果, 并揭示病毒携带猪和环境中的病毒对 ASF 传播的影响; 最后进行最优控制问题的数值模拟。

5.1 敏感度分析

R_0 的 PRCC 敏感度分析结果如图 2 所示。图 2 表明, 对 R_0 正向影响最大的是易感猪接触环境中病毒后的感染率 (α), 负向影响最大的是自然死亡率 (d), 其余参数中, 影响较大的是环境中病毒的清除率 (ρ), 易感猪与染病猪接触后的感染率 (β), 常数输入率 (Λ) 和病毒携带猪对环境的污染率 (θ_c), 其中, Λ 、 β 、 α 和 θ_c 对 R_0 是正向影响, d 、 ρ 对 R_0 是负向影响。

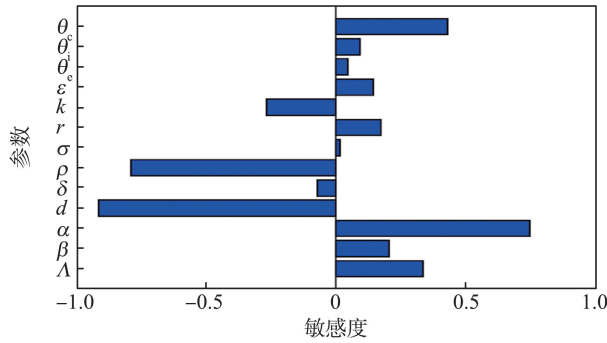


图 2 R_0 的 PRCC 敏感度分析
Fig.2 PRCC sensitivity indexes of R_0

表 1 相关参数
Table 1 Related parameters

参数	生物学意义	取值	参考文献
Λ	常数输入率	$[9 \times 10^3, 1.1 \times 10^4]$	[20]
β	易感猪与染病猪的传染率	$[1.1 \times 10^{-8}, 9 \times 10^{-7}]$	[21]
d	自然死亡率	$[0.002\ 0, 0.003\ 5]$	[7]
δ	染病猪的因病死亡率	$[0.080, 0.250]$	[22]
k	病毒携带猪到染病猪的转化率	$[0.040, 0.080]$	[23]
σ	潜伏猪到染病猪的转化率	$[0.120, 0.350]$	[23-25]
$\beta\epsilon$	易感猪与病毒携带猪的传染率	$[0.250, 0.350]$	[7]
α	易感猪与环境中病毒的传染率	$[1.49 \times 10^{-10}, 1.49 \times 10^{-9}]$	[12]
ρ	环境中病毒的清除率	$[0.05, 0.10]$	[26]
r	染病猪到病毒携带猪的转化率	0.037 5	
$\theta_e, \theta_i, \theta_c$	潜伏猪、染病猪和病毒携带猪对环境的污染率	$[1, 10] \times 10^{-6}$	[26]

5.2 数值模拟

(1) 取参数 $\Lambda = 10\ 587$, $\beta = 1.000\ 4 \times 10^{-8}$, $d = 0.002\ 7$, $\sigma = 0.125$, $k = 0.060$, $\delta = 0.250$, $\epsilon = 0.300$, $\alpha = 3.094\ 7 \times 10^{-10}$, $\rho = 0.069\ 1$, $r = 0.037\ 5$, $\theta_e = \theta_i = \theta_c = 0.002$, 初始值 $S(0) = 50$, $E(0) = 30$, $I(0) = 20$, $C(0) = 15$, $V(0) = 20$ 。此时 $R_0 \approx 0.354\ 6 < 1$ 。如图 3(a)所示,随着时间的推移,潜伏猪、染病猪、病毒携带猪和环境中病毒的数量都趋于 0,无病平衡点是全局渐近稳定的。

(2) 取参数 $\Lambda = 10\ 587$, $\beta = 1.472\ 5 \times 10^{-7}$, $d = 0.002\ 7$, $\sigma = 0.125$, $k = 0.060$, $\delta = 0.250$, $\epsilon = 0.300$, $\alpha = 4.291\ 8 \times 10^{-9}$, $\rho = 0.069\ 1$, $r = 0.037\ 5$, $\theta_e = \theta_i = \theta_c = 0.002$, 初始值 $S(0) = 50$, $E(0) = 30$, $I(0) = 20$, $C(0) = 15$, $V(0) = 20$ 。此时 $R_0 \approx 5.217\ 7 > 1$ 。如图 3(b)所示,随着时间的推移,潜伏猪、染病猪、病毒携带猪和环境中病毒的数量在达到峰值后,会稳定在固定的值,可知地方病平衡点是全局渐近稳定的。

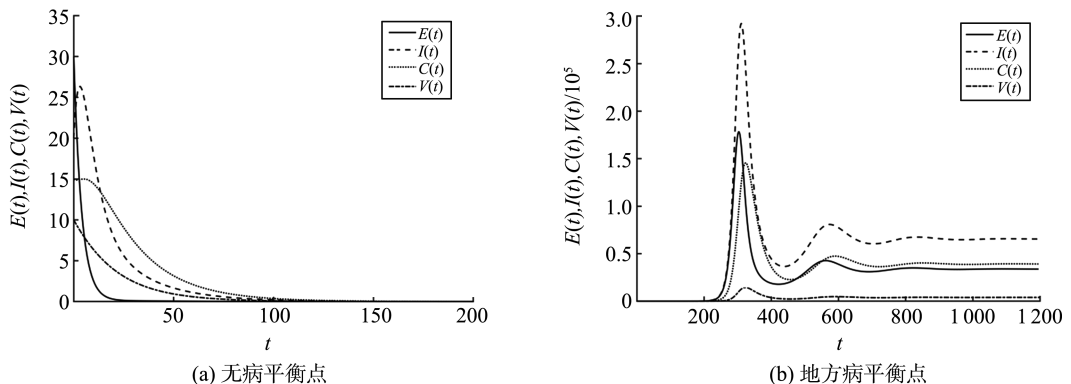


图 3 时间序列图
Fig.3 Time series diagram

5.2.1 k 值对非洲猪瘟传播的影响

通过控制参数 k 来评估病毒携带猪对非洲猪瘟传播的影响。对 k 取不同数值,观察图 4(a)、(c)、(d)

发现, k 值越大, 潜伏猪、病毒携带猪和环境中病毒的最终感染规模就越小; 图 4(b) 表明, k 值越大, 染病猪的数量达到的峰值越大, 峰值来得越晚。

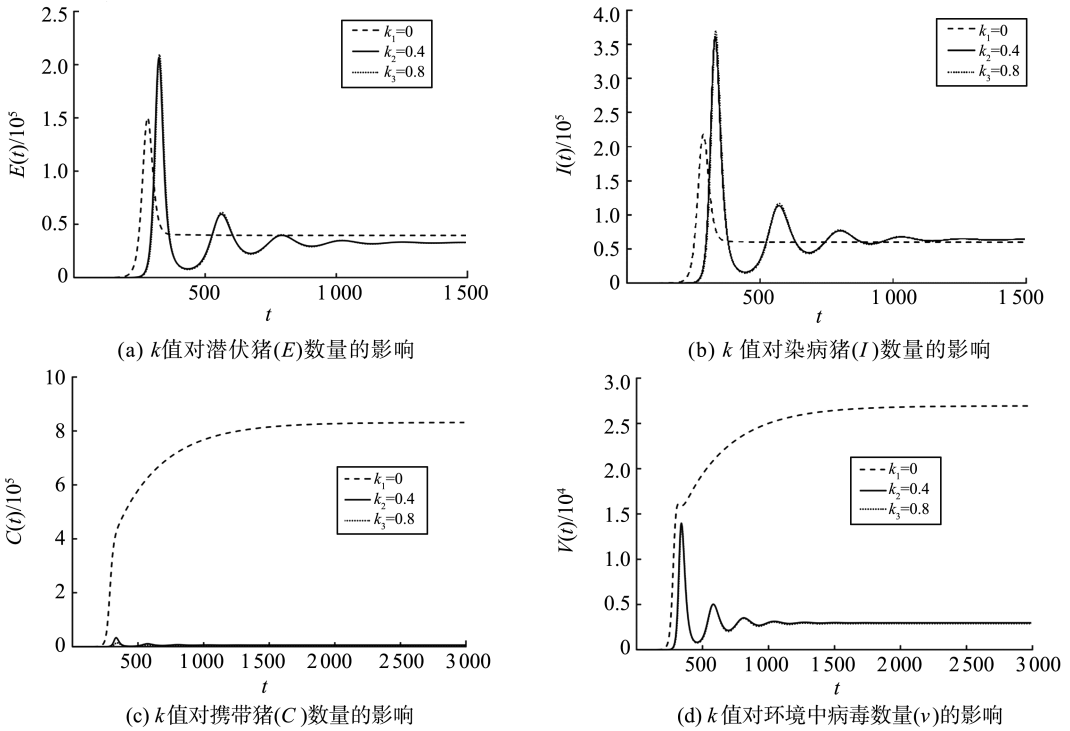


图 4 k 值对非洲猪瘟传播的影响

Fig.4 Influence of k on the transmission of ASF

5.2.2 环境中的病毒对非洲猪瘟传播的影响

通过参数 θ_e 、 θ_i 和 θ_c 对染病猪病例来评估环境中的病毒对非洲猪瘟传播的影响。观察图 5 发现, 潜伏猪, 染病猪和病毒携带猪对环境的污染率越大, 染病猪的峰值越小, 达到峰值的时间就越早, 并且最终的感染规模越大。潜伏猪、染病猪和病毒携带猪对环境污染率的增大会加速传染病的传播, 并且会导致最终感染猪的数量越多, 因此, 提高清除环境病毒的频率和效率可有效控制病毒的传播。

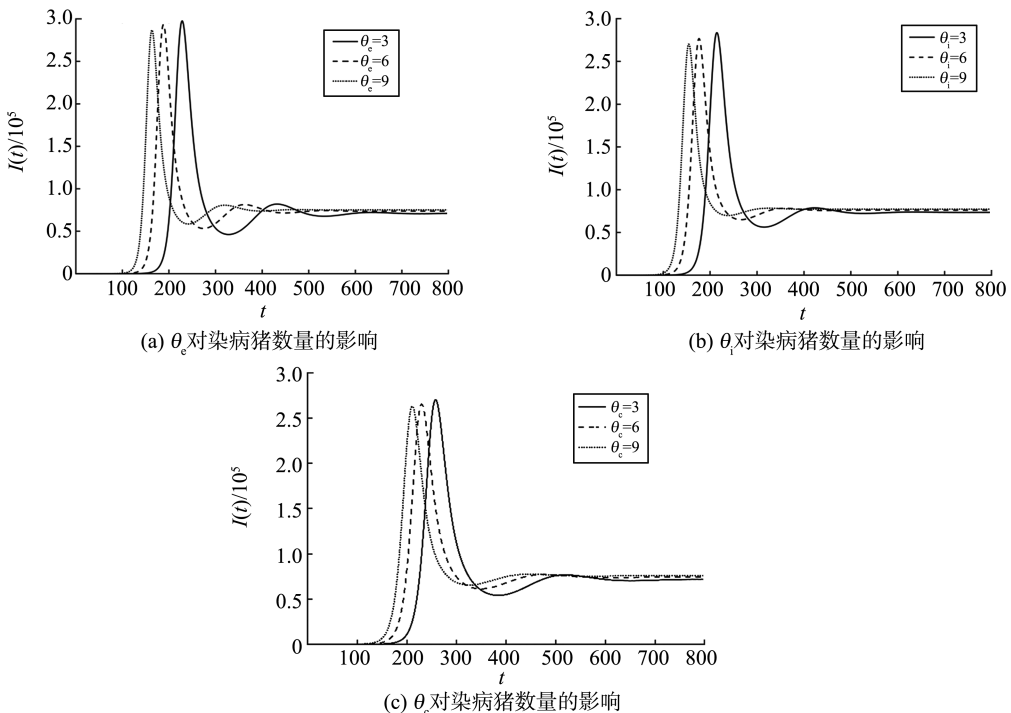


图 5 环境中的病毒对 ASF 传播的影响

Fig.5 Impact of virus in the environment on ASF transmission

5.3 最优控制模拟

通过模拟控制策略来研究其对猪瘟传播的影响,取初值 $S(0) = 500, E(0) = 300, I(0) = 200, C(0) = 150, V(0) = 100$ 。图 6(a)—6(d) 分别比较了有无控制的 S, E, I, C 的数量变化。图 6 表明,在采取控制策略后 E, I, C 的数量明显减少, S 的数量显著增加,因此,该控制策略可有效的控制疾病传播,不仅控制了染病猪的数量,并且使易感猪的数量保持在较高的水平。

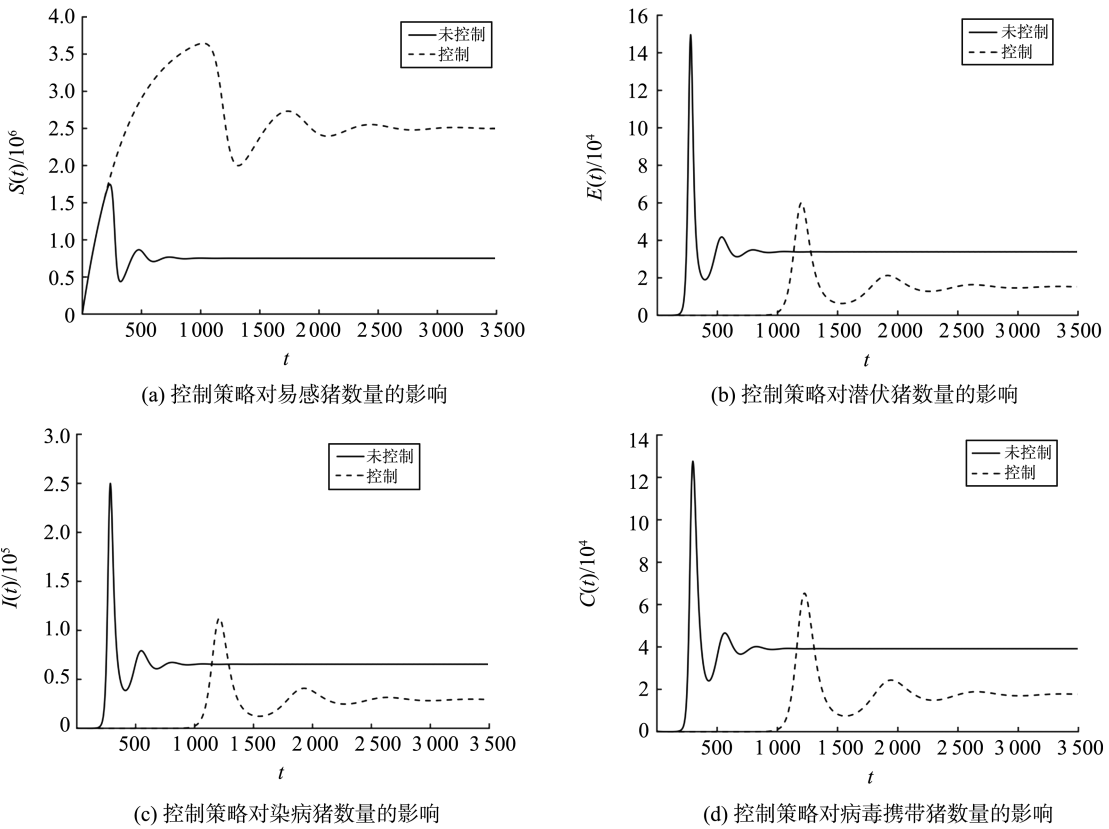


图 6 控制策略对 ASF 传播的影响
Fig.6 Influence of control strategy on ASF transmission

6 结论

本文建立一个带有病毒携带猪和环境病毒的非洲猪瘟传播的数学模型,本文计算基本再生数,证明了平衡点的局部渐近稳定性和全局渐近稳定性,根据庞特里亚金极大值原理和最优控制理论,得到最优控制解,并进行数值模拟。模拟结果表明,环境中的病毒会促进非洲猪瘟的传播,病毒携带猪向染病猪转变的影响不容忽视。因此,为及时控制疫情扩散,应减少易感猪与感染猪的接触,及时清理病死猪,高效清洁环境,严格控制各项相关检测。在未来工作中,可能会研究非线性发生率和潜伏时滞对非洲猪瘟病毒传播的影响具有重要意义。本研究结果对预防和控制非洲猪瘟病毒的传播具有一定的指导意义。

参考文献:

[1] PARKER J, PLOWRIGHT W, PIERCE M A. The epizootiology of African swine fever in Africa[J]. Veterinary Record, 1969, 85(24):668-674.

[2] QUEMBO C J, JORI F, VOSLOO W, et al. Genetic characterization of African swine fever virus isolates from soft ticks at the wildlife/domestic interface in Mozambique and identification of a novel genotype[J]. Transboundary and Emerging Diseases, 2018, 65(2):425.

[3] COSTARD S, WIELAND B, DE GLANVILLE W, et al. African swine fever: how can global spread be prevented? [J]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series B, Biological Sciences, 2009, 364(1530): 2683-2696.

- [4] SHEN Xuejuan, PU Zhiqing, LI Yiliang, et al. Phylogeographic patterns of the African swine fever virus[J]. *Journal of Infection*, 2019, 79(2):174-187.
- [5] WANG Tao, SUN Yuan, QIU Huaji. African swine fever: an unprecedented disaster and challenge to China[J]. *Infectious Diseases of Poverty*, 2018, 7(5):111.
- [6] BAO Jingyue, WANG Qinghua, LIN Peng, et al. Genome comparison of African swine fever virus China/2018/Anhui XCGQ strain and related European p72 genotype II strains[J]. *Transboundary and Emerging Diseases*, 2019, 66(3): 1167-1176.
- [7] BARONGO M B, BISHOP R P, FÈVRE E M, et al. A mathematical model that simulates control options for African swine fever virus (ASFV)[J]. *PLoS One*, 2016, 11(7):e0158658.
- [8] O'NEILL X, WHITE A, RUIZ-FONS F, et al. Modelling the transmission and persistence of African swine fever in wild boar in contrasting European scenarios[J]. *Scientific Reports*, 2020, 10(1):5895.
- [9] OSMAN M A R E N, YANG C H, ABAS M S A. Mathematical model that describes the transmission of African swine fever through ticks and infected pigs [C] // 2019 International Conference on Computer, Control, Electrical, and Electronics Engineering (ICCCEEE). Khartoum: IEEE, 2019:1-6.
- [10] KOUIDERE A, BALATIF O, RACHIK M. Analysis and optimal control of a mathematical modeling of the spread of African swine fever virus with a case study of South Korea and cost-effectiveness[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2021, 146:110867.
- [11] CHUCHARD P, PRATHUMWAN D, TRACHOO K, et al. The SLI-SC mathematical model of African swine fever transmission among swine farms; the effect of contaminated human vector[J]. *Axioms*, 2022, 11(7):329.
- [12] SONG Haitao, GUO Lirong, JIN Zhen, et al. Modelling and stability analysis of ASFV with swill and the virus in the environment[J]. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 2022, 19(12):13028-13049.
- [13] SONG Haitao, LI Jian, JIN Zhen. Nonlinear dynamic modeling and analysis of African swine fever with culling in China[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2023, 117:106915.
- [14] DE CARVALHO FERREIRA H C, WEESENDORP E, ELBERS A R W, et al. African swine fever virus excretion patterns in persistently infected animals: a quantitative approach[J]. *Veterinary Microbiology*, 2012, 160(3/4):327-340.
- [15] HAMDY F M, DARDIRI A H. Clinical and immunologic responses of pigs to African swine fever virus isolated from the Western Hemisphere[J]. *American Journal of Veterinary Research*, 1984, 45(4):711-714.
- [16] WILKINSON P J. The persistence of African swine fever in Africa and the Mediterranean[J]. *Preventive Veterinary Medicine*, 1984, 2(1/2/3/4):71-82.
- [17] LI Jianquan, YANG Yali, ZHOU Yicang. Global stability of an epidemic model with latent stage and vaccination[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2011, 12(4):2163-2173.
- [18] LI Jianquan, XIAO Yanni, ZHANG Fengqin, et al. An algebraic approach to proving the global stability of a class of epidemic models[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2012, 13(5):2006-2016.
- [19] LASALLE J P. The stability of dynamical systems[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1976: 17-70.
- [20] LI Juan, JIN Zhen, WANG Youming, et al. Data-driven dynamical modelling of the transmission of African swine fever in a few places in China[J]. *Transboundary and Emerging Diseases*, 2022, 69(4):646-658.
- [21] BARONGO M B, STÅHL K, BETT B, et al. Estimating the basic reproductive number (R_0) for African swine fever virus (ASFV) transmission between pig herds in Uganda[J]. *PLoS One*, 2015, 10(5):e0125842.
- [22] DE CARVALHO FERREIRA H C, BACKER J A, WEESENDORP E, et al. Transmission rate of African swine fever virus under experimental conditions[J]. *Veterinary Microbiology*, 2013, 165(3/4):296-304.
- [23] World Organization for Animal Health. African swine fever[R/OL]. (2008-08-21)[2024-05-14]. <https://www.woah.org/en/ebookshop/>.
- [24] World Organization for Animal Health. African swine fever[R/OL]. (2010-08-21)[2024-05-14]. <https://www.woah.org/en/ebookshop/>.
- [25] BELTRAN-ALCRUDO D, LUBROTH J, DEPNER K. African swine fever in the Caucasus[EB/OL]. (2008-04-01)[2024-05-14]. <https://openknowledge.fao.org/server/api/core/bitstreams>.
- [26] ZHANG Xianghong, RONG Xinmiao, LI Juan, et al. Modelling the outbreak and control of African swine fever virus in large-scale pig farms[J]. *Journal of Theoretical Biology*, 2021, 526:110798.