

# 基于多重分形优化的图像超分辨率重建

姚勋祥<sup>1</sup>, 刘培培<sup>2</sup>, 徐英城<sup>3</sup>, 范清兰<sup>1\*</sup>, 包芳勋<sup>4</sup>, 张云峰<sup>1,3</sup>

(1. 山东财经大学计算机科学与人工智能学院, 山东 济南 250014; 2. 山东女子学院人工智能学院, 山东 济南 250300; 3. 山东财经大学管理科学与工程学院, 山东 济南 250014; 4. 山东大学数学学院, 山东 济南 250100)

**摘要:** 图像超分辨率旨在从低分辨率图像中重建包含丰富纹理细节的高分辨率图像。已有研究表明, 精细结构主要对应于傅里叶域中的高频成分, 但多数现有方法缺乏针对高频信息的自适应处理机制, 容易导致边缘模糊或纹理紊乱。针对上述问题, 本文在非下采样轮廓波变换(non-subsampled contourlet transform, NSCT)域内开展超分辨率研究, 将图像分解为多个具有不同频率特性的子带。不同子带所包含的频率信息与图像细节程度密切相关, 本文将其定义为图像粗糙度特征。此外, 对各子带图像应用分形分析方法, 利用分形对图像粗糙度的数学表征能力, 描述图像信息的多种频率细节。在此基础上, 构建多子带下的多重分形模型, 并在各子带上自适应生成相应的分形表示, 从而将超分辨率重建过程转化为一个多重分形优化问题。实验结果表明, 本研究所提出的方法能够有效恢复图像高频细节。

**关键词:** 图像超分辨; 非下采样轮廓波变换; 分形插值函数; 图像粗糙度; 分形维度; 多重分形

**中图分类号:** TP391 **文献标志码:** A

**引用格式:** 姚勋祥, 刘培培, 徐英城, 等. 基于多重分形优化的图像超分辨率重建[J]. 山东大学学报(理学版), 2026, 61(3): 96-110.

## Image super-resolution reconstruction based on multifractal optimization

YAO Xunxiang<sup>1</sup>, LIU Peipei<sup>2</sup>, XU Yingcheng<sup>3</sup>, FAN Qinglan<sup>1\*</sup>, BAO Fangxun<sup>4</sup>, ZHANG Yunfeng<sup>1,3</sup>

(1. School of Computer Science and Artificial Intelligence, Shandong University of Finance and Economics, Jinan 250014, Shandong, China; 2. School of Artificial Intelligence, Shandong Women's University, Jinan 250300, Shandong, China; 3. School of Management Science and Engineering, Shandong University of Finance and Economics, Jinan 250014, Shandong, China; 4. School of Mathematics, Shandong University, Jinan, 250100, Shandong, China)

**Abstract:** The goal of image super-resolution technique is to reconstruct high-resolution image with fine details and vivid texture details from its low-resolution version. On Fourier domain, such fine details are more related to the information in the high-frequency spectrum. Most of existing methods do not have specific modules to handle such high-frequency information adaptively. Thus, they cause edge blur or texture disorder. To tackle the problems, this work explores image super-resolution on multiple sub-bands of the corresponding image, which are generated by non-subsampled contourlet transform (NSCT). Different sub-bands hold the information of different frequency which is then related to the detailedness of information of the given low-resolution image. In this work, such image information detailedness is formulated as image roughness. Moreover, fractals analysis is applied to every single sub-band image. Since fractals can mathematically represent the image roughness, it then is able to represent the detailedness (i.e. various frequency of image information). Overall, a multi-fractals formulation is established based on multiple sub-bands image. On each sub-band image, different fractals representation is created adaptively according to image features. In this way, the image super-resolution process is transformed into a multifractal optimization problem. The experiment result demonstrates the effectiveness of the proposed method in recovering high-frequency details.

**Key words:** image super-resolution; nonsubsamped contourlet transform; fractal interpolation function; image roughness; fractal dimension; multifractal

收稿日期: 2025-11-17; 网络出版时间: 2026-01-23

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(62506209); 山东省自然科学基金项目(ZR2024QF016, ZR2023QF161); 山东省高等学校青年创新团队项目(2022KJ185)

第一作者: 姚勋祥(1989—), 男, 讲师, 博士, 研究方向为图像超分辨及分形、目标检测. E-mail: Xunxiang.Yao@sdufe.edu.cn

\* 通信作者: 范清兰(1992—), 女, 副教授, 博士, 研究方向为进化机器学习、计算机视觉、分类和特征学习. E-mail: qinglanfan@sdufe.edu.cn

## 0 引言

图像超分辨率技术旨在从低分辨率图像中重现具有精细纹理细节的高分辨率图像,其本质是通过给定的低分辨率图像像素值来求解高分辨率像素值。目前,学者们已提出多种方法来解决图像超分辨率问题。该技术已广泛应用于军事、医学、遥感卫星、电视等领域。由于傅里叶域的相关高频信息与图像细节密切相关<sup>[1-4]</sup>,因此,现有研究均围绕在提高其分辨率同时,尽可能恢复高频细节这一核心展开。其中,基于插值的方法是最为简便的一类,如双线性插值<sup>[5]</sup>、双三次插值<sup>[6]</sup>和样条函数<sup>[7]</sup>插值法。这类方法将整个图像视为“连续”和“平滑”的表面,因此可以通过局部邻近区域的像素进行插值处理,进而计算高分辨率图像上的每个像素。然而,这种假设并非总是成立,尤其是在包含大量高频细节的区域时,极易造成图像过度平滑,进而丢失关键的高频细节信息。

另一种解决方法称为基于重建的方法,通过结合各种图像先验作为约束以恢复高分辨率图像,如梯度先验<sup>[8]</sup>、纹理先验<sup>[9]</sup>、相似性先验<sup>[10]</sup>和边缘先验<sup>[11]</sup>。此类基于重建的方法通过在反投影过程中嵌入先验知识实现高分辨率图像的重建。文献<sup>[12]</sup>尝试将边缘导向方法融入基于学习的方法体系中,以实现高频细节的有效恢复。文献<sup>[13]</sup>基于与梯度先验相关的边缘锐度测量,提出了一种新型图像超分辨率算法,该算法通过挖掘低分辨率图像与高分辨率图像之间的梯度剖面特征,估计出与高分辨率图像对应的目标梯度剖面,并在提高图像分辨率时重构高频图像细节。上述方法在纹理细节保留和边缘锐化方面表现优异。然而,在较大上采样倍率条件下,这类先验约束往往难以持续发挥作用,重构过程受到约束条件本身的限制会进一步导致图像质量急剧下降<sup>[14]</sup>。

为了揭示高频图像细节,近年来的图像超分辨率方法多采用基于学习的策略<sup>[15-18]</sup>。这类方法通常基于这样一种假设:丢失的信息可以通过相应的低分辨率和高分辨率图像对来进行恢复。本研究进一步将基于学习的方法分为以下两类:基于外部样本的方法和基于自身样本的方法。基于外部样本的方法需要借助外部数据集来学习对应的低分辨率和高分辨率图像对的映射函数,代表性算法包括 $k$ 最近邻( $k$ -NN)学习<sup>[19]</sup>、流形学习<sup>[20]</sup>、稀疏编码<sup>[21]</sup>和基于回归的方法<sup>[22]</sup>。而基于自身样本的超分辨率算法<sup>[23-25]</sup>仅依赖图像本身就能完成重构,这类图像通常具备某种特定的重复结构,且这种结构会在图像其他区域出现。基于学习的方法能够较好的恢复图像中的低频信息(平滑区域),而对高频图像细节恢复效果欠佳。因为包含在高频细节区域中的复杂性无法由训练数据集中的另一样片或同一图像的另一区域进行精准表征。此外,传统的基于学习方法普遍使用相同的损失函数来学习低频图像信息和高频细节,这样会导致精细高频细节的丢失。

近期研究表明,同一图像的不同位置可能会出现相似但大小不同的纹理图案<sup>[26-28]</sup>,这意味着图像具有自相似性。分形理论正是以自相似性为核心,与传统函数在“平滑性”假设下不同。从分形理论的角度看,图像是一种分形。分形理论在描述高度不规则数据和通过垂直缩放展现不同自相似数据方面具有显著优势。因此分形表示方法可以有效处理图像中的多样结构。目前,研究人员已经提出了多种基于分形的方法。最基础的分形方法<sup>[29-31]</sup>是将图像分割成若干子块,然后匹配最相似的子块来完成高分辨率版本重建。文献<sup>[32]</sup>提出了一种增加分形维度约束来指导超分辨率过程的算法;文献<sup>[33]</sup>提出了一种新的分形插值法,并对图像超分辨率的垂直缩放因子展开研究,该方法实现了更精细的细节重建和更锐利的边缘保持,具有较好的综合性能;文献<sup>[34]</sup>将超分辨率问题重新定义为了一种图像逐步迭代拟合过程。以上基于分形理论的现有方法均将图像视为一种分形。本研究通过分析发现,单一的分形公式不足以表示图像中的多元细节特征。基于文献<sup>[35]</sup>可知,多重分形理论更适用于高频细节的精准再现;文献<sup>[36]</sup>证明,利用非下采样轮廓波变换(non-subsampled contourlet transform, NSCT)的高频子带信息进行区域划分,并结合边缘保持的自适应插值策略,可有效增强纹理细节并改善边缘清晰度。此外,文献<sup>[37]</sup>指出,基于随机采样策略构建定位数据的多分辨率层级结构,让大规模定位数据的可视化成为一种可能。

为了在超分辨率过程中最佳地再现精细细节,本研究受到基于分形的超分辨率方法优势的启发,同时针对单一分形公式的局限性,提出一种新的多重分形解决方法,其性能优于单一分形<sup>[38-41]</sup>。不同分形模型表示作用于不同的分形集,为使分形模型更精准地表征图像信息,每个分形集合应该具有统一的而不是多样化的图像信息细节。这种稳定的分形集合,可在应用分形插值进行图像超分辨率时,保证粗糙度的一致性。为

创建多个特征统一的分形集合,可以采用 NSCT 将原始图像转换为多个子带图像<sup>[42]</sup>。由于 NSCT 不仅具有局部性,还因非下采样滤波器组而具有平移不变性,可以最大限度地保持每个子带图像内的图像细节,使这些子带图像具有更统一的纹理粗糙度。一旦通过使用 NSCT 将原始图像转换成多个子带图像来创建多个分形集合,每个子带图像的图像超分辨率过程被视为一个基于分形插值的优化问题,其约束条件为图像粗糙度不降低。其中,图像粗糙度是基于分形表示中的垂直缩放因子计算得到<sup>[43]</sup>。为进一步提升粗糙度性能(即在图像超分辨率过程中粗糙度不降低),每个子带图像被进一步分割成粗糙度几乎恒定的不同区域。因此,分形插值可以自适应地完成局部图像细节的精准恢复,保证超分辨率过程中的图像整体粗糙度不降低。本文的主要贡献如下:

(1) 提出了一种基于多重分形插值的图像超分辨率解决方法,该方法解决了现有基于单一分形插值方法的局限性。通过多重分形公式来描述图像,对于每个子带图像,构建了特定的分形公式。

(2) 为了创建一个稳定的分形集合,使图像纹理特性的粗糙度更为统一,使用 NSCT 将单一图像转换为多个具有统一粗糙度子带图像,每个子带图像被视为一个稳定的分形集合,并为每个典型的子带图像设置了更适合的参数。

### 1 相关工作

本章主要对 NSCT、分形函数和分形维度的基础知识进行介绍。本文中,图像被视为一个多重分形集合,为了获得一个单一的统一分形集合,应用 NSCT 来获取不同的子带图像。在图像超分辨率过程中,分形插值用于估计未知像素的值,分形维度与垂直缩放因子高度相关,这对分形函数有很大影响。

#### 1.1 非下采样轮廓波变换

NSCT 由轮廓波变换(contourlet transform, CT)发展而来,具有平移不变性、多分辨率及各向异性特性。NSCT 的主要组成部分为非下采样金字塔结构(non-subsampled pyramid, NSP)与非下采样方向滤波器组(non-subsampled directional filter bank, NSDFB)。其中,NSDFB 负责实现多方向分解,而 NSP 则完成多尺度分解。NSCT 的工作原理如图 1 所示,NSP 将输入图像分解为不同的带通图像,然后,分解得到的低频分量可以按照上述方式进一步分解,而高频分量则由 NSDFB 分解为多个方向性子带。

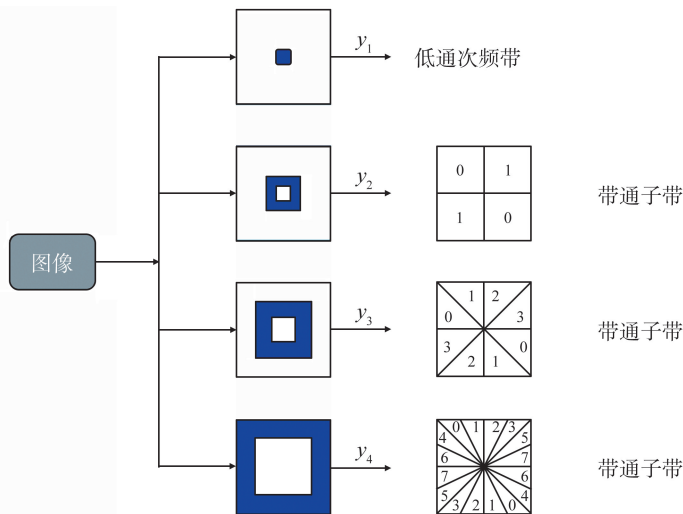


图 1 非下采样轮廓波变换示意图

Fig.1 Illustration of non-subsampled contourlet transform

NSP 是一个非采样滤波器组,将图像分解为不同的带通图像。经过该分解过程后,可得到 1 个低频图像和若干个高频图像。NSP 对图像进行分解时不涉及下采样过程,减少了采样失真,并且获得了平移不变性。作为 NSCT 的多尺度分析模块,NSP 具有平移不变性的滤波结构,当图像被  $l$  级分解后,获得  $l+1$  个带通图像,子带图像的大小与原输入图像一致。

非下采样方向滤波器组(non-subsampled directional filter, NSDF)的原理:首先利用扇形滤波器组和象限滤波器组将图像分解为 4 个子带;其次,应用平行滤波器组在不同方向上对子带迭代处理,通过 1 层树结构

的分解,信号被有效地划分到子带中。NSDFB 同样不包含下采样和上采样过程,能够减少滤波器中的采样失真,获得平移不变性,且子带图像的大小与原输入图像一致。相较于传统变换方法,NSCT 通过这一组件设计保留了更多的图像细节信息。

### 1.2 分形函数与分形维度

主要对分形插值函数(fractal interpolation function, FIF)进行介绍。

设  $\Omega=[a,b] \times [c,d]$  为平面区域,  $\Delta = \{(x_i, y_j, z_{i,j}) : i=1, 2, \dots, N; j=1, 2, \dots, M\}$  是插值数据点的集合。设  $\phi_i(x)$  是收缩同胚:  $I \rightarrow I_i$ , 则

$$\phi_i(x_1) = x_i, \quad \phi_i(x_N) = x_{i+1}, \quad |\phi_i(c_1) - \phi_i(c_2)| \leq \lambda |c_1 - c_2|, \quad \forall c_1, c_2 \in I, \quad (1)$$

$$\varphi_j(y_1) = y_j, \quad \varphi_j(y_M) = y_{j+1}, \quad |\varphi_j(d_1) - \varphi_j(d_2)| \leq \mu |d_1 - d_2|, \quad \forall d_1, d_2 \in J, \quad (2)$$

其中,  $\lambda$  和  $\mu$  分别表示水平方向和垂直方向映射的收缩因子。当  $0 < \lambda < 1$  时, 设  $\varphi_j(y)$  为收缩同胚:  $J \rightarrow J_j$  而  $\mu$  的取值范围则限定在  $[0, 1]$ 。迭代函数系统(iterated function systems, IFS)表达式如下:

$$\begin{cases} \phi_i(x) = a_i x + b_i, \\ \varphi_j(y) = c_j y + d_j, \\ F_{i,j}(x, y, z) = s_{i,j} z + q_{i,j}(x, y), \end{cases} \quad (3)$$

其中,

$$a_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{x_N - x_1}, \quad b_i = \frac{x_N x_j - x_1 x_{i+1}}{x_N - x_1}, \quad c_j = \frac{y_{j+1} - y_j}{y_M - y_1}, \quad d_j = \frac{y_M y_j - y_1 y_{j+1}}{y_M - y_1},$$

$s_{i,j}$  为垂直比例因子,  $q_{i,j}(x, y)$  为连续函数。

分形理论通常是将图像定义为一个“粗糙或碎片化”的几何形状,这类形状可以分割成几个部分,且每一部分(至少大致上)与原始形状相似<sup>[44]</sup>,即分形具有自相似属性。在分形理论体系中,最关键的概念是分形维度。分形维度(技术上称为豪斯多夫维度)反映了复杂对象所占据空间的有效性,是衡量其不规则程度的关键指标。对于图像而言,由于图像纹理细节与图像粗糙度密切相关,分形维度可作为描述图像纹理细节的有效参数;同时,图像纹理细节由其高频成分组成,因此,分形维度被应用于图像中的高频细节定量测量。

设  $F$  是  $\mathbf{R}^n$  的子集,  $s$  是一个非负数,对于  $\delta > 0$ , 定义

$$H_\delta^s(F) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ 为集合 } F \text{ 的 } \delta\text{-覆盖} \right\}, \quad (4)$$

对于  $0 \leq s < t < \infty$ , 有  $H^s(F) < \infty \Rightarrow H^t(F) = 0$ ,  $H^t(F) > 0 \Rightarrow H^s(F) = \infty$ 。

Hausdorff 维数的定义如下:

$$\dim_H(F) := \inf \{s \geq 0 : H^s(F) = 0\} = \sup \{s : H^s(F) = \infty\}, \quad (5)$$

这里的  $S$  表示 Hausdorff 测度中的维数参数,用于刻画集合在不同尺度下的几何复杂度。随着  $s$  的变化, Hausdorff 测度  $H^s(F)$  会在无穷大与零之间发生跃迁,而使  $H^s(F)$  由无穷变为零的临界值即定义为集合  $F$  的 Hausdorff 维数。

然而,对于许多分形来说,豪斯多夫维度很难计算,因此,许多等价或相似的定义被提出,最常用的是盒子计数维度法<sup>[45]</sup>。假设一个集合  $S$  被边长为  $\varepsilon$  的盒子覆盖,盒子的数量为  $N(\varepsilon)$ ,其中  $S$  表示被盒子覆盖的子带图像样本空间。盒子计数维度

$$\dim_{\text{box}}(S) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}. \quad (6)$$

## 2 基于多重分形优化的图像超分辨率重建算法

本章主要对所提出的基于多重分形的图像超分辨率方法进行介绍,该方法应用于 NSCT 域。首先,将整个图像分解为不同的带通图像。对于每个图像,使用由局部分形维度和低分辨率图像的分形维度构成的粗糙度描述符,将像素划分为不同的类别。其次,为每个分解的带通图像选取一个适配为了恢复更多的高频信息,应该增加高频子带中的粗糙度,的分形插值函数。对于低频图像,保持图像粗糙度的不变;对于高频图像,则依据图像特征增加图像粗糙度。因为图像粗糙度与高频细节高度相关,增强高频子带的粗糙度可恢复

更多高频信息。与现有仅采用单一分形插值的方法不同,本研究构建了一个多重分形函数——该函数是多个分形插值的组合而成,各分形具有不同的粗糙度等级,能够适配不同的图像特征,并能够在图像粗糙度约束条件下进行优化。最后,利用逆 NSCT 生成高分辨率图像。

### 2.1 基于 NSCT 分解图像

与传统金字塔或小波分解方法相比,NSCT 在不同尺度和方向上对图像纹理与边缘的描述更加稳定,使得分解后的各子带图像在纹理粗糙度和结构特性上表现出更高的一致性。在本文中,整幅图像被视为一个由多个分形子集构成的多重分形系统,鉴于不同频率成分和结构特征具有显著差异,本文采用非下采样金字塔结构滤波器组(NSP filter bank, NSPFB)对原始图像进行多子带分解,以避免在同一分形模型中混合不一致的频率信息。具体而言,图像先通过 NSPFB 实现多尺度分解,得到不同频率层级的子带图像;随后,各尺度下的高频子带进一步作为 NSDFB 的输入,从而获得具有方向信息的带通子带,整体分解流程如图 2 所示。

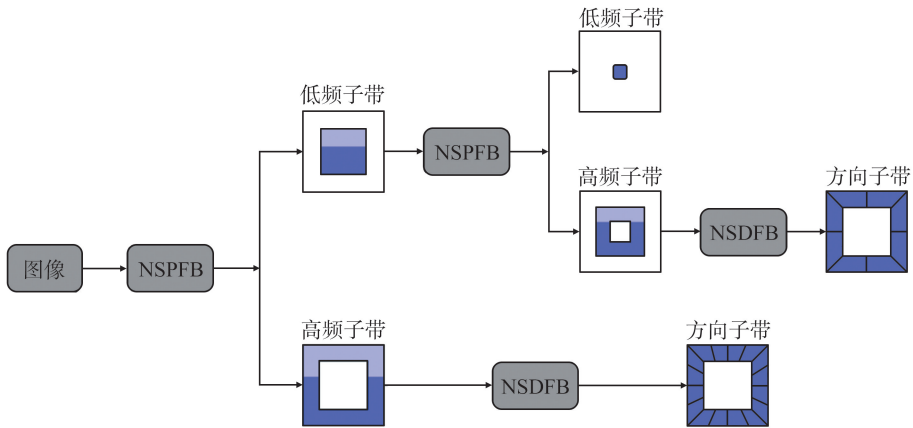


图 2 NSCT 分解过程

Fig.2 NSCT decomposition process

如图 3 所示,输入图像在第一级分解后被划分为低频子带和高频子带,其中低频子带继续作为输入进入下一层 NSP 分解,而高频子带则保留其对应尺度下的细节信息。且随着分解层级的增加,低频子带逐步聚合图像的整体结构信息,而高频子带则集中反映边缘、纹理以及局部不规则变化。第三级分解后,图像被表示为一个低频子带( $y_0$ )和多个不同尺度、不同频率特性的高频子带( $y_1, y_2, y_3$ ),这些子带在空间尺寸上保持一致,但在频率内容和纹理复杂度上存在明显差异。传统分形超分方法通常将整幅图像视为单一分形集合,并在统一的分形参数约束下进行插值重建。然而,在实际图像中,不同频率成分对应的结构复杂度和粗糙度水平存在显著差异,单一分形模型难以同时兼顾平滑区域与纹理丰富区域。通过 NSCT 分解,本文将原始图像映射到多个频率子带,使每个子带内的图像纹理特征在统计意义上更加集中,从而更符合分形插值所需的自相似性假设。

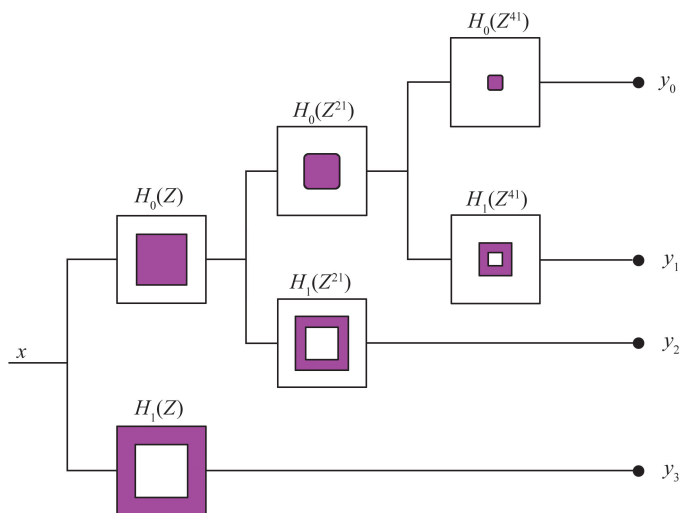


图 3 第 3 层次分解中的 NSP

Fig.3 NSP in decomposition at level 3

## 2.2 单个图像像素分类

如上所述,通过 NSCT 得到低频图像和高频图像。然而,子带图像仍然包含平滑区域和纹理丰富的区域。为了选择一个合适的分形插值函数,需先将像素分类到不同的类别中。各个像素对图像的粗糙度贡献存在差异,而分形维度是衡量图像的粗糙度的有效指标,因此本研究为每个像素构建了一个基于分形维度的分形特征。为更全面地刻画像素特性,本文同时引入全局与局部信息,并据此构建分形特征量,定义为粗糙度描述子(roughness descriptor, RD),其公式如下:

$$RD = \frac{RD_g + 2 * RD_l}{3}, \quad (7)$$

其中, $RD_g$  表示输入低分辨率图像的全局分形维度;而运算符  $*$  表示归一化加权乘积算子,用于融合全局分形维度与局部分形维度的信息,该算子首先对不同尺度下的分形维度进行归一化处理,以消除数值尺度差异,然后通过加权乘积形式,刻画局部粗糙度与整体纹理复杂度之间的耦合关系。需要说明的是,该算子不直接参与 IFS 的仿射映射计算,而是作为粗糙度判别机制,用于像素分类及垂直缩放因子的自适应调节。 $RD_l$  表示基于  $3 \times 3$  邻域计算的局部分形维度,定义为

$$RD_l = \frac{1}{9} * (LFD_{(i-2,j-2)} + LFD_{(i-2,j-1)} + LFD_{(i-2,j)} + LFD_{(i-1,j-2)} + LFD_{(i-1,j-1)} + LFD_{(i-1,j)} + LFD_{(i,j-2)} + LFD_{(i,j-1)} + LFD_{(i,j)}), \quad (8)$$

其中, $2 < i, j < N$ , LFD 表示以当前像素为中心、窗口大小为  $3 \times 3$  的局部分形维度,用于刻画像素邻域内的局部几何粗糙度特征。通过盒计数法<sup>[46]</sup>可以分别计算整幅图像的全局分形维度(FD)以及对应像素邻域的局部分形维度(LFD)。与全局分形维度侧重描述图像整体纹理复杂度不同,LFD 反映了局部区域内灰度变化的剧烈程度及其空间不规则性。在像素级分析中,LFD 被用于衡量不同像素邻域的局部粗糙度的差异。具体而言,当某一像素邻域内存在明显边缘、纹理或高频结构时,其对应的 LFD 值通常较大;而在平滑或低频区域,LFD 值相对较小。基于这一特性,可以根据 LFD 的数值范围将像素划分为粗糙区域与平滑区域,从而实现对不同结构类型像素的区分。

然而,仅依赖 LFD 进行像素分类容易受到局部噪声或异常纹理的影响,可能导致对局部结构的误判。为此,本文进一步引入全局分形维度 FD,与 LFD 共同构成粗糙度描述符 RD。FD 提供了对整幅图像纹理复杂度的全局约束,而 LFD 则刻画局部区域的细节变化,两者的结合使 RD 在像素级分类过程中同时兼顾局部结构特征与整体纹理分布。目前,每个像素对图像粗糙度的贡献已经被量化,与仅使用分形维度值相比,RD 能够在保持全局一致性的前提下,准确反映不同像素对图像粗糙度的相对贡献,因此,粗糙度描述符比仅使用 LFD 的描述符更为精确。

## 2.3 不同子带图像的自适应分形插值

对于现有的基于分形的超分辨率方法,图像通常被视为一个单一的分形集。然而,自相似性在不同区域是不同的。与之前的分形插值不同,本研究构建了一个多重分形公式来重建图像<sup>[47]</sup>。

受到 Barnsley<sup>[48]</sup>关于一元分形插值的启发,本研究将二元有理分形插值函数视为有理函数  $P_{i,j}(x,y)$  的“扰动”。方程 IFS 可以修改如下:

$$q_{i,j}(x,y) = P_{i,j}(\phi_i(x), \varphi_j(y)) - s_{i,j} B_{i,j}(x,y). \quad (9)$$

其中: $\phi_i(x)$  是  $x$  方向上的压缩函数, $\varphi_j(y)$  是  $y$  方向上的压缩函数, $s_{i,j}$  表示垂直比例因子; $F$  为插值函数,用于计算插值点的值; $P_{i,j}(\phi_i(x), \varphi_j(y))$  和  $B_{i,j}(x,y)$  是有理函数。详情请参考文献[51]。

定义

$$A = \begin{pmatrix} \omega_{0,0}(\theta, \alpha_{i,j}) \\ \omega_{0,1}(\theta, \alpha_{i,j}) \\ \omega_{1,0}(\theta, \alpha_{i,j}) \\ \omega_{1,1}(\theta, \alpha_{i,j}) \end{pmatrix}^T, \quad B = \begin{pmatrix} \omega_{0,0}(\eta, \beta_{i,j}) \\ \omega_{0,1}(\eta, \beta_{i,j}) \\ \omega_{1,0}(\eta, \beta_{i,j}) \\ \omega_{1,1}(\eta, \beta_{i,j}) \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$F = \begin{bmatrix} f_{i,j} - s_{i,j} f_{1,1} & f_{i,j+1} - s_{i,j} f_{1,M} & l_j d_{i,j} - s_{i,j} L_M d_{1,1} & l_j d_{i,j+1} - s_{i,j} L_M d_{1,M} \\ f_{i+1,j} - s_{i,j} f_{N,1} & f_{i+1,j+1} - s_{i,j} f_{N,M} & l_j d_{i+1,j} - s_{i,j} L_M d_{N,1} & l_j d_{i+1,j+1} - s_{i,j} L_M d_{N,M} \\ h_i d_{i,j}^* - s_{i,j} H_N d_{1,1}^* & h_i d_{i,j+1}^* - s_{i,j} H_N d_{1,M}^* & 0 & 0 \\ h_i d_{i+1,j}^* - s_{i,j} H_N d_{N,1}^* & h_i d_{i+1,j+1}^* - s_{i,j} H_N d_{N,M}^* & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

其中,  $H_N = x_N - x_1$ ,  $L_M = y_M - y_1$ ,  $\theta = (x - x_1 / (x_N - x_1))$ ,  $\eta = (y - y_1 / (y_N - y_1))$ 。  $\alpha$ 、 $\beta$  是有理分形插值函数的形状参数, 用于调节插值曲面的局部弯曲程度, 取值范围限定在  $[0, 1]$ 。  $\omega$  表示垂直缩放因子, 其取值范围限定在  $(-1, 1)$ , 以保证 IFS 的收敛性。  $f_{i,j}$  表示已知像素值,  $s_{i,j}$  是垂直比例因子,  $d_{i,j}^*$  和  $d_{i,j}$  分别是结点  $(x_i, y_i)$  处  $x$  方向和  $y$  方向的偏导数值。

公式(3)的矩阵形式如下:

$$\begin{cases} \phi_i(x) = a_i x + b_i, \\ \varphi_i(y) = c_j y + d_j, \\ F_{i,j}(x, y, z) = s_{i,j} z + AFB. \end{cases} \quad (12)$$

多重分形公式可表示为

$$MF_{(i,j)} = \{Z; pF_{i,j}(x, y, z), p^* F_{i,j}^*(x, y, z)\}, \quad (13)$$

其中,  $F_{i,j}(x, y, z)$  和  $F_{i,j}^*(x, y, z)$  是不同的分形函数,  $p$  和  $p^*$  表示概率,  $p + p^* = 1$ 。

为了解决单一分形公式的局限性, 本文提出了多重分形解决方法, 并验证该方法相较于单一分形<sup>[50-52]</sup>具有更优的性能。 每个分形表示是在不同的分形集上工作。 根据图像特征, 分别选择  $F_{i,j}(x, y, z)$  和  $F_{i,j}^*(x, y, z)$  表示不同的粗糙度。 对于超分辨率问题的表述如下:

$$\begin{cases} \phi_i(x_i) = \frac{x_{i+1} - x_i}{x_N - x_1} * x_i + \frac{x_N x_i - x_1 x_{i+1}}{x_N - x_1} \\ \varphi_j(y_j) = \frac{y_{j+1} - y_j}{y_M - y_1} * y_j + \frac{y_N y_j - y_1 y_{j+1}}{y_M - y_1}, \\ I_{i,j}(x^i, y^j) = MF_{(i,j)} \end{cases} \quad (14)$$

其中,  $(x, y)$  为 LR 图像中像素的位置,  $I(x, y)$  为 LR 图像中的像素值,  $(x^i, y^j)$  为对应 HR 图像的位置,  $MF_{(i,j)} = I_{i,j}(x^i, y^j)$  表示对应 HR 图像的像素值。 超分辨率过程如图 4 所示, 较大的球表示低分辨率图像中的已知像素, 较小的球表示高分辨率图像中的估计像素。 例如, 未知像素  $(i' - 2, j' - 1)$  是通过已知的  $(i' - 2, j' - 2)$ ,  $(i' - 2, j')$ ,  $(i' - 2, j' + 2)$ ,  $(i', j' - 2)$ ,  $(i', j')$ ,  $(i' + 2, j' - 2)$ ,  $(i' + 2, j' + 2)$  经式(12)计算像素值所得。

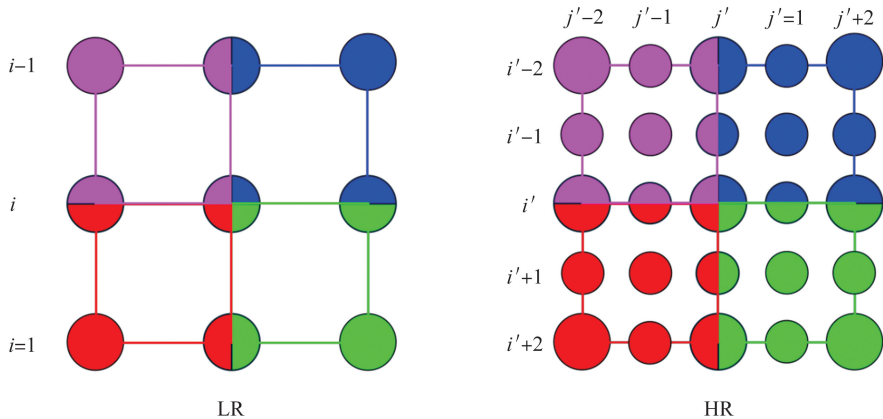


图 4 超分辨率过程中利用分形插值计算像素值  
Fig.4 Pixel value calculation via fractal interpolation in SR process

对于低频图像, 平滑区域和纹理丰富的区域仍然存在。 本研究保持平滑区域的粗糙度不降低, 由于高频损失与纹理丰富区域高度相关, 纹理丰富的区域的图像粗糙度必须增加。 对于高频图像, 使用  $F_{i,j}(x, y, z)$  作为分形插值, 公式如下:

$$\begin{cases} \phi_i(x_i) = \frac{x_{i+1}-x_i}{x_N-x_1} * x_i + \frac{x_N x_i - x_1 x_{i+1}}{x_N - x_1}, \\ \varphi_j(y_j) = \frac{y_{j+1}-y_j}{y_M-y_1} * y_j + \frac{y_N y_j - y_1 y_{j+1}}{y_M - y_1}, \\ I_{i,j}(x^i, y^j) = s_{i,j} z + AFB, \end{cases} \quad (15)$$

其中,  $\omega_{r,s}$  是基函数,

$$\begin{cases} \omega_{0,0}(\theta, \alpha, \beta, \gamma) = \frac{(1-\theta)^2(\alpha+\theta\gamma)}{(1-\theta)^2\alpha+\theta(1-\theta)\gamma+\theta^2\beta}, \\ \omega_{0,1}(\theta, \alpha, \beta, \gamma) = \frac{\theta^2((1-\theta)\gamma+\beta)}{(1-\theta)^2\alpha+\theta(1-\theta)\gamma+\theta^2\beta}, \\ \omega_{1,0}(\theta, \alpha, \beta, \gamma) = \frac{\theta(1-\theta)^2\alpha}{(1-\theta)^2\alpha+\theta(1-\theta)\gamma+\theta^2\beta}, \\ \omega_{1,1}(\theta, \alpha, \beta, \gamma) = \frac{\theta^2(1-\theta)\beta}{(1-\theta)^2\alpha+\theta(1-\theta)\gamma+\theta^2\beta}. \end{cases} \quad (16)$$

对于低频图像,仍然存在平滑区和纹理丰富区。对于光滑区域的低频子带中的给定像素点,式(15)是一个有理插值函数,因为垂直比例因子的值等于0。

对于高频子带纹理丰富区域中的给定像素,公式  $F_{i,j}^*(x, y, z)$  是分形插值函数。目前,只有一个参数即垂直缩放因子尚未确定,在接下来的部分,将优化垂直缩放因子。

对于高频图像,本文使用  $F_{i,j}^*(x, y, z)$  作为分形插值,表达式如下:

$$\begin{cases} \phi_i(x_i) = \frac{x_{i+1}-x_i}{x_N-x_1} * x_i + \frac{x_N x_i - x_1 x_{i+1}}{x_N - x_1}, \\ \varphi_j(y_j) = \frac{y_{j+1}-y_j}{y_M-y_1} * y_j + \frac{y_N y_j - y_1 y_{j+1}}{y_M - y_1}, \\ I_{i,j}(x^i, y^j) = s_{i,j} z + A^* F^* B^*, \end{cases} \quad (17)$$

$$A^* = \begin{pmatrix} \omega_{0,0}^*(\theta, \alpha) \\ \omega_{0,1}^*(\theta, \alpha) \\ \omega_{1,0}^*(\theta, \alpha) \\ \omega_{1,1}^*(\theta, \alpha) \end{pmatrix}^T, \quad B^* = \begin{pmatrix} \omega_{0,0}^*(\eta, \beta) \\ \omega_{0,1}^*(\eta, \beta) \\ \omega_{1,0}^*(\eta, \beta) \\ \omega_{1,1}^*(\eta, \beta) \end{pmatrix}, \quad (18)$$

其中,  $\omega_{r,s}^*$  是基函数,

$$\begin{cases} \omega_{0,0}^*(\theta, \alpha, \beta) = \frac{(1-\theta)^2(1-\theta+\theta\alpha)}{(1-\theta)^3+\theta(1-\theta)^2\alpha+\theta^2(1-\theta)\beta+\theta^3}, \\ \omega_{0,1}^*(\theta, \alpha, \beta) = \frac{\theta^2(\theta+(1-\theta)\beta)}{(1-\theta)^3+\theta(1-\theta)^2\alpha+\theta^2(1-\theta)\beta+\theta^3}, \\ \omega_{1,0}^*(\theta, \alpha, \beta) = \frac{\theta(1-\theta)^2}{(1-\theta)^3+\theta(1-\theta)^2\alpha+\theta^2(1-\theta)\beta+\theta^3}, \\ \omega_{1,1}^*(\theta, \alpha, \beta) = \frac{-\theta^2(1-\theta)}{(1-\theta)^3+\theta(1-\theta)^2\alpha+\theta^2(1-\theta)\beta+\theta^3}. \end{cases} \quad (19)$$

对于高频子带纹理丰富区域的给定像素,公式(17)为分形插值函数。对于光滑区域高频子带中的给定像素,由于垂直缩放因子的值为0,因此公式(17)为有理插值函数。到目前为止,只有一个名为垂直缩放因子的参数未确定。在下一节中,将优化垂直缩放因子。

### 2.4 优化垂直缩放因子以增加图像粗糙度

本研究中,多重分形公式是为多子带图像超分辨率而构建的。图像粗糙度由分形维度来衡量,并且图像粗糙度与高频信息细节紧密相关,高频细节的损失会导致纹理混乱和边缘模糊,因此,图像超分辨率问题被

转化为一个优化问题,通过优化过程增加分形维度。在分形理论中,垂直缩放因子用于计算分形维度,垂直缩放因子  $s_{i,j}$  和分形维度(FD)满足以下公式:

$$FD = 2 + \frac{\log \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M s_{i,j}}{\log M}, \quad (20)$$

其中,  $s_{i,j}$  表示垂直缩放因子,  $M$  代表图像块的数量。根据式(20),图像超分辨率问题转化为获取一个合适的垂直缩放因子的问题,一旦分形维度被确定,就可以通过式(20)估计垂直缩放因子。由于不同子带中的高频损失是不同的,因此低频图像和高频图像的约束条件必须不同。本研究假设低频图像包含较少的高频信息,即图像粗糙度几乎与低分辨率图像相同,并且在低频图像中约束分形维度不降低。对于高频图像,由于高频细节的损失主要与纹理丰富区域有关,因此图像粗糙度应该增加。低分辨率图像的 LFD 可以通过“盒计数”方法计算。LFD<sub>HR</sub> 的值初始化为拓扑维度(曲面的拓扑维度等于 2)。本研究将低分辨率图像和高分辨率图像的分形维度变化定义为如下算法。

### 算法 1 图像粗糙度优化

输入:低分辨率带通图像。

输出:高分辨率带通图像。

- ① 将带通图像分割成若干子块。
- ② 计算给定子块的 LFD<sub>HR</sub>。
- ③ 通过 LFD<sub>HR} - 2 初始化垂直缩放因子。</sub>
- ④ 通过适当的插值函数估算高分辨率子块。
- ⑤ 通过盒计数法计算高分辨率子块的 LFD<sub>HR</sub>。
- ⑥ 如果  $\arg \min_{s_{i,j}} \| \text{LFD}_{\text{HR}} - (1 + \varepsilon_i) * \text{LFD}_{\text{LR}} \| \leq \tau$ , 其中  $\tau = 0.05$ , 表示 HR 分形维数已与期望粗糙度一致, 转到第 7 步; 否则, 更新垂直缩放因子  $S + \delta * (\text{LFD}_{\text{HR}}^t - \text{LFD}_{\text{HR}}^{t-1})$ , 并转到第 3 步。
- ⑦ 获得最终结果。

寻找最优解,

$$\arg \min_{s_{i,j}} \| \text{LFD}_{\text{HR}} - (1 + \varepsilon_i) * \text{LFD}_{\text{LR}} \|, \quad (21)$$

根据式(21),可将式(22)写成

$$\arg \min_{s_{i,j}} \left\| \frac{\log \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M s_{i,j}}{\log M} - (1 + \varepsilon_i) * \text{LFD}_{\text{LR}} \right\|, \quad (22)$$

垂直缩放因子  $s_{i,j}$  更新为

$$s_{i,j}^{t+1} = s_{i,j}^t + \delta * (\text{LFD}_{\text{HR}}^t - \text{LFD}_{\text{HR}}^{t-1}), \quad (23)$$

其中,  $\delta$  是权重系数, 设  $\delta = 0.6$ 。算法 1 总结了优化过程的细节。经过反复实验, 本研究设置低频子带  $\varepsilon_0 = 0.05$ , 在高频子带  $(y_1, y_2, y_3)$  中, 设置  $\varepsilon_1 = 0.10$ ,  $\varepsilon_2 = 0.15$ ,  $\varepsilon_3 = 0.20$ 。

## 3 实验结果与分析

在这一部分中,通过将本文算法与 ANR<sup>[51]</sup>、SelfexSR<sup>[29]</sup>、SRCNN<sup>[52]</sup>、MsLapSRN<sup>[53]</sup>、Xu's<sup>[33]</sup>、Yao's<sup>[42]</sup>、ZSSR<sup>[54]</sup>、Wang's<sup>[35]</sup>等先进方法比较,从定量和定性两个方面评估本文方法的性能优势。且将提出的方法与现有的方法在不同的图像数据集上进行比较,包括 Set5<sup>[55]</sup>、Set14<sup>[55]</sup>、Texture20、Texture17、Kodak<sup>[56]</sup>及 Urban100<sup>[29]</sup>。Set5 和 Set14 分别由 5 幅和 14 幅自然图像组成。Texture20 和 Texture17 由纹理丰富的图像组成。Kodak 包含 24 幅自然图像。Urban100 由 100 张图像组成,用于上采样评估。

### 3.1 定量对比分析

在不同公开数据集上的实验结果表明,所提出的方法在多种评价指标下均表现出较为稳定的优势。本文采用峰值信噪比(peak signal-to-noise ratio, PSNR)、结构相似性指数(structural similarity index, SSIM)和特征相似性指数(feature similarity index, FSIM)3 项指标对图像的重建质量进行定量评估,其结果汇总于表

1。实验结果显示,在以自然图像为主的 Set5、Set14 以及 Kodak 等数据集上,本文方法在 3 项评价指标上整体优于对比方法,尤其在 PSNR 指标上表现更为突出。这一结果表明,本文方法在结构信息保持方面具有更强的建模能力。当实验拓展至纹理特征更加复杂的 Texture17、Texture20、Urban100 数据集时,3 项指标仍然保持领先。与 Xu's、Yao's 等典型分形超分方法相比,本文方法在 SSIM 和 FSIM 上呈现出更稳定的提升趋势,引证其在纹理一致性和特征结构相似性方面具有更好的适应性。尤其是在 Urban100 数据集上,随着上采样因子的增大,部分对比方法的性能出现明显衰减,而本文方法的各项指标变化相对平缓,显示出较强的尺度鲁棒性。

从整体实验结果分析,上采样因子的改变并未削弱本文方法的性能优势。无论是在中等放大倍率还是较大放大倍率条件下,PSNR、SSIM 和 FSIM 均保持协同提升的关系,这在一定程度上体现了多重分形建模的稳定性。结合实验现象可以发现,本文方法并非单纯追求某一指标的提升,而是在结构相似性与感知质量之间实现了较为合理的平衡,这一点在纹理丰富区域的重建结果中表现的尤为明显。需要指出的是,所有实验均在统一的计算环境下完成,以确保结果的可比性与公平性。实验硬件配置为 Intel i9 处理器、32 GB 内存以及 NVIDIA RTX 4090 GPU(24 GB 显存),软件环境为 Python 3.8、PyTorch 1.10 和 CUDA 11.3。在该实验配置下,本文方法在不同数据集和不同尺度因子下的性能表现均保持良好的一致性。

表 1 本文方法与其他方法的定量对比分析  
Table 1 Quantitative comparison of this method and others

数据集	倍数	指标	ANR	SelfExSR	SRCNN	MsLap-SRRA	Xu's	ZSSR	Wang's	Yao's	本文方法
Set5	2	PSNR	28.750	27.495	30.869	30.595	30.994	29.232	28.175	33.863	35.662
		SSIM	0.876	0.811	0.861	0.856	0.931	0.830	0.902	0.921	0.935
		FSIM	0.907	0.865	0.895	0.893	0.948	0.872	0.903	0.939	0.949
Set14	2	PSNR	25.949	24.500	27.373	27.580	26.299	27.512	28.363	31.516	32.417
		SSIM	0.847	0.797	0.793	0.826	0.893	0.822	0.868	0.915	0.930
		FSIM	0.910	0.887	0.885	0.898	0.938	0.891	0.912	0.947	0.968
texture17	2	PSNR	16.667	18.919	28.043	27.850	27.355	27.481	25.784	31.947	32.047
		SSIM	0.291	0.409	0.737	0.729	0.839	0.727	0.825	0.848	0.856
		FSIM	0.683	0.732	0.855	0.851	0.924	0.851	0.892	0.926	0.940
texture20	2	PSNR	15.534	17.329	28.551	28.296	27.929	28.301	26.409	32.471	32.945
		SSIM	0.275	0.359	0.772	0.765	0.873	0.767	0.857	0.878	0.889
		FSIM	0.644	0.674	0.869	0.864	0.934	0.867	0.904	0.935	0.952
Urban100	2	PSNR	18.327	21.941	25.401	24.761	23.900	25.176	27.891	29.514	29.823
		SSIM	0.732	0.913	0.908	0.911	0.947	0.913	0.959	0.963	0.971
		FSIM	0.857	0.947	0.940	0.943	0.967	0.944	0.970	0.976	0.981
Kodak	2	PSNR	22.149	25.980	24.861	28.658	27.155	28.971	30.409	32.246	32.364
		SSIM	0.604	0.864	0.548	0.861	0.930	0.853	0.936	0.940	0.951
		FSIM	0.843	0.936	0.656	0.928	0.952	0.926	0.947	0.961	0.977
Set5	3	PSNR	24.645	23.813	23.900	—	—	26.327	24.427	30.401	31.741
		SSIM	0.759	0.686	0.740	—	—	0.725	0.857	0.845	0.859
		FSIM	0.835	0.795	0.827	—	—	0.803	0.873	0.882	0.903
Set14	3	PSNR	22.636	24.425	21.436	—	—	24.425	26.187	28.048	28.192
		SSIM	0.706	0.628	0.652	—	—	0.680	0.837	0.806	0.807
		FSIM	0.832	0.794	0.812	—	—	0.810	0.909	0.883	0.892
texture17	3	PSNR	16.026	17.085	18.891	—	—	23.935	23.789	27.889	28.582
		SSIM	0.258	0.330	0.373	—	—	0.549	0.725	0.710	0.721
		FSIM	0.670	0.692	0.566	—	—	0.763	0.824	0.842	0.853
texture20	3	PSNR	14.953	15.738	20.197	—	—	24.253	24.302	28.292	28.429
		SSIM	0.249	0.302	0.397	—	—	0.591	0.755	0.739	0.742
		FSIM	0.640	0.648	0.591	—	—	0.782	0.840	0.856	0.857

表1(续)

数据集	倍数	指标	ANR	SelfExSR	SRCNN	MsLap-SRNA	Xu's	ZSSR	Wang's	Yao's	本文方法
Urban100	3	PSNR	17.518	18.934	23.029	—	—	22.321	25.578	23.945	25.876
		SSIM	0.615	0.820	0.955	—	—	0.833	0.920	0.911	0.932
		FSIM	0.805	0.884	0.955	—	—	0.881	0.935	0.936	0.954
Kodak	3	PSNR	21.383	22.982	23.697	—	—	26.289	28.897	29.178	29.993
		SSIM	0.582	0.718	0.512	—	—	0.722	0.854	0.839	0.853
		FSIM	0.794	0.843	0.597	—	—	0.837	0.903	0.899	0.914
Set5	4	PSNR	22.525	21.545	21.814	24.074	24.650	24.056	25.532	28.422	28.866
		SSIM	0.674	0.594	0.660	0.633	0.811	0.634	0.801	0.813	0.818
		FSIM	0.739	0.749	0.786	0.753	0.864	0.758	0.832	0.855	0.859
Set14	4	PSNR	23.051	19.612	19.861	22.260	21.764	22.820	25.406	26.817	27.488
		SSIM	0.700	0.544	0.560	0.567	0.728	0.581	0.732	0.779	0.789
		FSIM	0.827	0.745	0.765	0.746	0.839	0.758	0.827	0.859	0.872
texture17	4	PSNR	15.531	16.083	18.278	21.933	21.873	22.049	22.972	26.274	26.440
		SSIM	0.238	0.283	0.352	0.438	0.655	0.440	0.643	0.639	0.657
		FSIM	0.668	0.672	0.567	0.705	0.814	0.728	0.786	0.798	0.801
texture20	4	PSNR	14.524	14.852	19.342	22.033	22.006	22.189	23.302	26.821	26.945
		SSIM	0.232	0.264	0.587	0.469	0.678	0.476	0.671	0.686	0.697
		FSIM	0.641	0.636	0.587	0.719	0.824	0.739	0.798	0.813	0.821
Urban100	4	PSNR	16.904	17.431	20.058	20.165	19.844	20.892	24.283	24.810	24.937
		SSIM	0.527	0.651	0.370	0.640	0.791	0.658	0.829	0.833	0.862
		FSIM	0.760	0.807	0.553	0.798	0.864	0.805	0.889	0.899	0.907
Kodak	4	PSNR	20.807	21.693	22.938	24.351	22.549	24.958	26.981	28.230	28.567
		SSIM	0.534	0.630	0.491	0.626	0.761	0.636	0.793	0.802	0.813
		FSIM	0.761	0.794	0.573	0.778	0.850	0.788	0.863	0.884	0.889

注：“—”表示无法计算得出。

### 3.2 定性比较分析

在图5中,本文给出了“头”图像的对比结果。其中,图5(e)、(h)中给出了某些工件,图5(b)—(h)中出现了纹理扭曲和锯齿状伪影。比其他方法相比,由于本文方法实现了更多高频细节的恢复,因此生成了更多的纹理细节和尖锐的边缘。



图5 “头”图像对比结果( $\times 2$ )

Fig.5 Comparison results ( $\times 2$ ) on head image

图 6 展示了本文方法在保留纹理细节和减少某些伪影方面的优越性能。对于纹理丰富的区域,本文提出的方法能够生成更精细的细节。基于学习的方法则无法恢复出精细的纹理细节,具体如图 6(c)、(d)、(e)、(g) 所示。在图 6(h)、(i)、(j) 的重建结果中,出现了边缘模糊和无关伪影等问题。通过高频约束,提出的方法相较于其他方法可更好地还原精细的像素级纹理细节。此外,我们的方法可以有效地减少不必要的伪影。

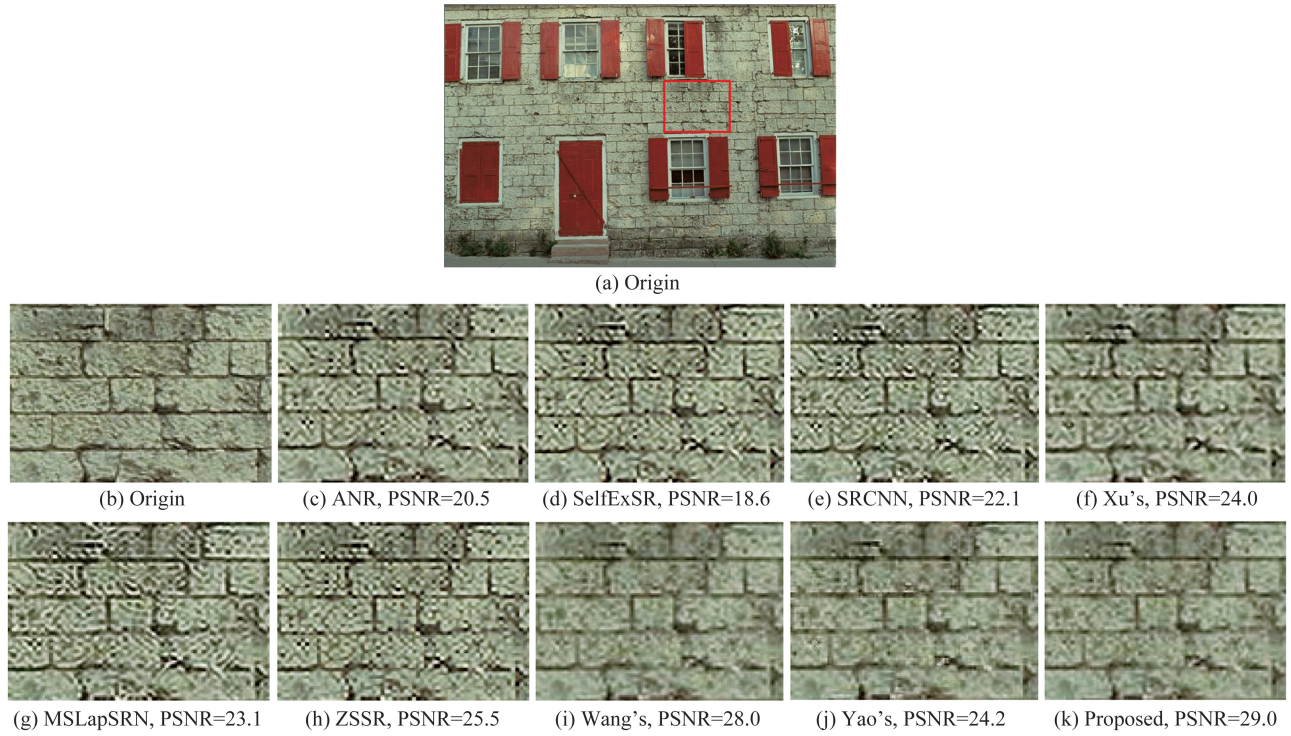


图 6 “墙”图像对比结果(×2)

Fig.6 Comparison results (×2) on wall image

为了进一步验证所提方法的有效性,我们还针对上采样因子为 3 的情况对所提方法进行了评估。如图 7 所示,现有的方法如 ANR<sup>[51]</sup>、SelfExSR<sup>[29]</sup>、SRCNN<sup>[52]</sup>、ZSSR<sup>[54]</sup>。在 Wang<sup>[35]</sup> 和 Yao<sup>[42]</sup> 的显著地丢失了形状细节并产生了不必要的伪影,本文方法的性能表现优于基于学习的方法。与 Wang 和 Yao 等方法相比,本文方法在边缘结构与纹理细节的保持方面表现出更为稳定的优势。

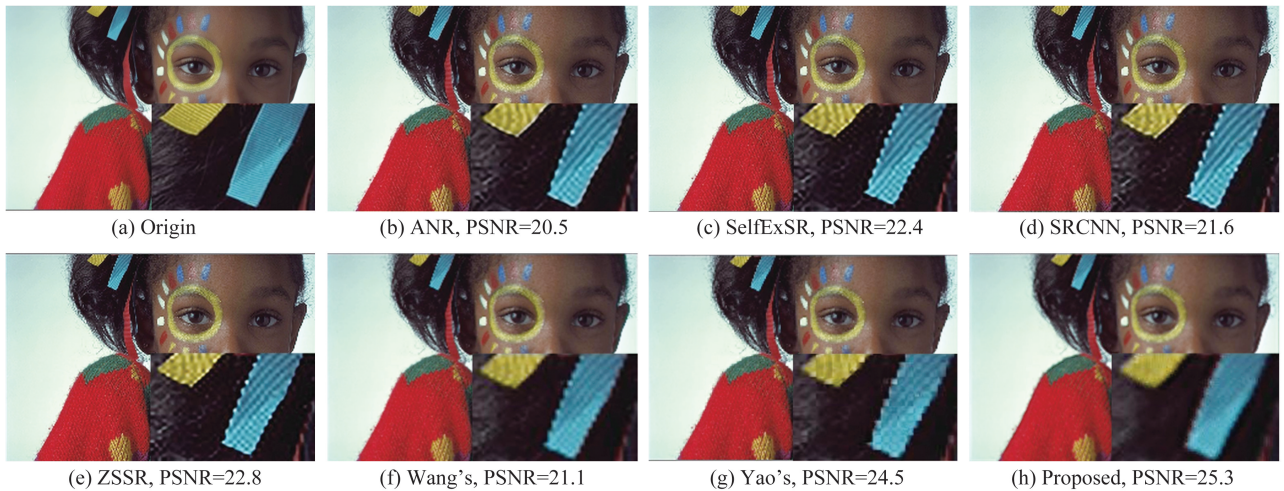
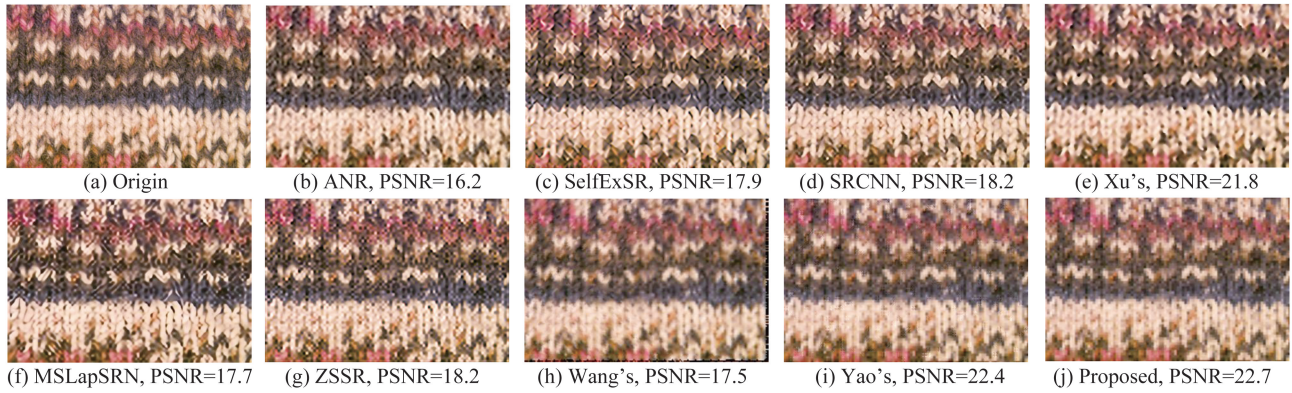


图 7 “女孩”图像对比结果(×2)

Fig.7 Comparison results (×2) on girl image

图 8 给出了上采样因子为 4 时的上采样结果。可以在 ANR<sup>[51]</sup>、SelfExSR<sup>[29]</sup>、SRCNN<sup>[52]</sup>、MSLapSRN<sup>[53]</sup>、ZSSR<sup>[54]</sup> 的结果中观察到锯齿状边缘和纹理扭曲现象。Xu<sup>[33]</sup>、Wang<sup>[35]</sup> 和 Yao<sup>[42]</sup> 的实验结果比上述基于学习的方法表现出更少的伪影。与 Xu、Wang 和 Yao 的方法相比,本文提出的方法仍然能够恢复出更好的纹理细节。

图8 “毛衣”图像对比结果( $\times 2$ )Fig.8 Comparison results ( $\times 2$ ) on sweater image

## 4 结论与展望

针对超分辨率重建过程中高频信息难以实现自适应建模、易导致纹理失真与边缘模糊的问题,本文提出的基于多重分形优化的图像超分辨率方法。首先采用 NSCT 对图像进行多子带分解,使不同尺度和方向的结构信息在频率域内得到有效区分。在此基础上,根据各子带的频率特性,自适应构建差异化的分形表示,克服了单一分形模型对复杂纹理刻画能力不足的局限。同时,引入图像粗糙度作为显式约束,通过分形维度与模型参数之间的调节关系,对高频子带中的细节增强过程进行有效控制,并稳定保留低频结构。从整体效果来看,所提出的方法在频率分解、分形建模与粗糙度约束 3 个层面相互配合。实验结果表明,在不同数据集和放大倍率条件下,本文方法在纹理一致性和结构保持方面均表现出较为稳定的优势,验证了多重分形建模在高频细节恢复中的有效性。

### 参考文献:

- [1] ZHOU F Q, LI X J, LI Z X. High-frequency details enhancing DenseNet for super-resolution[J]. Neurocomputing, 2018, 290:34-42.
- [2] LIU Y, WANG Y C, LI N, et al. An attention-based approach for single image super resolution[C]//2018 24th International Conference on Pattern Recognition (ICPR). Beijing: IEEE, 2018:2777-2784.
- [3] CUI Z, CHANG H, SHAN S G, et al. Deep network cascade for image super-resolution[C]//Computer Vision-ECCV 2014. Cham: Springer, 2014:49-64.
- [4] HUANG H B, HE R, SUN Z N, et al. Wavelet-SRNet: a wavelet-based CNN for multi-scale face super resolution[C]//2017 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV). Venice: IEEE, 2017:1698-1706.
- [5] GRIBBON K T, BAILEY D G. A novel approach to real-time bilinear interpolation[C]//Proceedings of DELTA 2004. Second IEEE International Workshop on Electronic Design, Test and Applications. Perth: IEEE, 2005:126-131.
- [6] ZHANG C M, ZHANG X, LI X M, et al. Cubic surface fitting to image with edges as constraints [C]//2013 IEEE International Conference on Image Processing. Melbourne: IEEE, 2014:1046-1050.
- [7] MATSUMOTO S, KAMADA M, MIJIDORJ R O. Adaptive image interpolation by cardinal splines in piecewise constant tension[J]. Optimization Letters, 2012, 6(7):1265-1280.
- [8] SUN J, SUN J, XU Z B, et al. Gradient profile prior and its applications in image super-resolution and enhancement[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2011, 20(6):1529-1542.
- [9] PICKUP L, ROBERTS S, ZISSERMAN A. A sampled texture prior for image super-resolution[J]. Advances in neural information processing systems, 2003, 16:1-8.
- [10] ZHAO J W, HU H P, CAO F L. Image super-resolution via adaptive sparse representation[J]. Knowledge-Based Systems, 2017, 124:23-33.
- [11] ZHANG H C, YANG J C, ZHANG Y N, et al. Image and video restorations via nonlocal kernel regression[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2013, 43(3):1035-1046.
- [12] FATTAL R. Image upsampling via imposed edge statistics[C]//34th Annual Meeting of the Association for Computing Machinery's Special Interest Group on Graphics. San Diego: ACM, 2007:95.
- [13] TAI Y W, LIU S C, BROWN M S, et al. Super resolution using edge prior and single image detail synthesis[C]//2010

- IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. San Francisco; IEEE, 2010:2400-2407.
- [14] YAN Q, XU Y, YANG X K, et al. Single image superresolution based on gradient profile sharpness[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2015, 24(10):3187-3202.
- [15] BAKER S, KANADE T. Limits on super-resolution and how to break them[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2002, 24(9):1167-1183.
- [16] LIU H, CAO F L, WEN C L, et al. Lightweight multi-scale residual networks with attention for image super-resolution[J]. Knowledge-Based Systems, 2020, 203:106103.
- [17] TIAN C W, ZHUGE R, WU Z H, et al. Lightweight image super-resolution with enhanced CNN[J]. Knowledge-Based Systems, 2020, 205:106235.
- [18] DUN Y J, DA Z Y, YANG S, et al. Kernel-attended residual network for single image super-resolution[J]. Knowledge-Based Systems, 2021, 213:106663.
- [19] ESMAEILZEHI A, AHMAD M O, SWAMY M N S. MuRNet: a deep recursive network for super resolution of bicubically interpolated images[J]. Signal Processing: Image Communication, 2021, 94:116228.
- [20] ZAREAPOOR M, CELEBI M E, YANG J. Diverse adversarial network for image super-resolution[J]. Signal Processing: Image Communication, 2019, 74:191-200.
- [21] WANG Q, TANG X O, SHUM H. Patch based blind image super resolution[C]//Tenth IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV'05), Volume 1. Beijing: IEEE, 2005:709-716.
- [22] CHANG H, YEUNG D Y, XIONG Y M. Super-resolution through neighbor embedding[C]//Proceedings of the 2004 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, CVPR 2004. Washington, DC: IEEE, 2004:1.
- [23] YANG J C, WRIGHT J, HUANG T S, et al. Image super-resolution via sparse representation[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2010, 19(11):2861-2873.
- [24] ZHANG J, SHAO M H, YU L L, et al. Image super-resolution reconstruction based on sparse representation and deep learning[J]. Signal Processing: Image Communication, 2020, 87:115925.
- [25] ZHANG K B, GAO X B, TAO D C, et al. Single image super-resolution with non-local means and steering kernel regression [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2012, 21(11):4544-4556.
- [26] HE H, SIU W C. Single image super-resolution using Gaussian process regression[C]//CVPR 2011. Colorado Springs: IEEE, 2011:449-456.
- [27] TIAN Y P, ZHOU F, YANG W M, et al. Anchored neighborhood regression based single image super-resolution from self-examples[C]//2016 IEEE International Conference on Image Processing (ICIP). Phoenix: IEEE, 2016:2827-2831.
- [28] WEI X Y, DRAGOTTI P L. FRESH: FRI-based single-image super-resolution algorithm[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2016, 25(8):3723-3735.
- [29] HUANG J B, SINGH A, AHUJA N. Single image super-resolution from transformed self-exemplars[C]//2015 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). Boston: IEEE, 2015:5197-5206.
- [30] HAN Z J, DENNEY T S. Interpolation of 2-D fractional Brownian motion using first order increments[C]//Proceedings 1998 International Conference on Image Processing. ICIP98. Chicago: IEEE, 2002:222-226.
- [31] HAN Z J, DENNEY T S. Incremental Fourier interpolation of 2-D fractional Brownian motion[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2001, 48(5):920-925.
- [32] WEE Y C, SHIN H J. A novel fast fractal super resolution technique[J]. IEEE Transactions on Consumer Electronics, 2010, 56(3):1537-1541.
- [33] XU H T, ZHAI G T, YANG X K. Single image super-resolution with detail enhancement based on local fractal analysis of gradient[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology, 2013, 23(10):1740-1754.
- [34] ZHANG Y F, FAN Q L, BAO F X, et al. Single-image super-resolution based on rational fractal interpolation[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2018, 27(8):3782-3797.
- [35] ZHANG Y F, WANG P, BAO F X, et al. A single-image super-resolution method based on progressive-iterative approximation[J]. IEEE Transactions on Multimedia, 2020, 22(6):1407-1422.
- [36] KRUPIŃSKI M, WAWRZASZEK A, DRZEWIECKI W, et al. What can multifractal analysis tell us about hyperspectral imagery?[J]. Remote Sensing, 2020, 12(24):4077.
- [37] 王晨泽,沈雪豪,黄振立,等. 基于定位数据的全景超分辨率图像交互可视化框架[J]. 计算机研究与发展,2024,61(7):1741-1753.
- WANG Chenze, SHEN Xuehao, HUANG Zhenli, et al. Interactive visualization framework for panoramic super-resolution images based on localization data[J]. Journal of Computer Research and Development, 2024, 61(7):1741-1753.
- [38] 范清兰,张云峰,包芳勋,等. 基于 NSCT 的区域自适应图像插值算法[J]. 计算机研究与发展,2018,55(3):629-642.

- FAN Qinglan, ZHANG Yunfeng, BAO Fangxun, et al. An region adaptive image interpolation algorithm based on the NSCT [J]. *Journal of Computer Research and Development*, 2018, 55(3):629-642.
- [39] DU C J, SUN D W. Recent developments in the applications of image processing techniques for food quality evaluation[J]. *Trends in Food Science & Technology*, 2004, 15(5):230-249.
- [40] MENDOZA F, DEJMEK P, AGUILERA J M. Colour and image texture analysis in classification of commercial potato chips [J]. *Food Research International*, 2007, 40(9):1146-1154.
- [41] LEE K C, HO S J, HO S Y. Accurate estimation of surface roughness from texture features of the surface image using an adaptive neuro-fuzzy inference system[J]. *Precision Engineering*, 2005, 29(1):95-100.
- [42] YAO X X, WU Q, ZHANG P, et al. Weighted adaptive image super-resolution scheme based on local fractal feature and image roughness[J]. *IEEE Transactions on Multimedia*, 2021, 23:1426-1441.
- [43] CHEN Z Y, MURAMATSU S, ABE Y. Fast image super-resolution via multiple directional transforms[C] // 2016 IEEE International Conference on Image Processing (ICIP). Phoenix: IEEE, 2016:1434-1438.
- [44] FRITSCH M, GU S H, TIMOFTE R. Frequency separation for real-world super-resolution [C] // 2019 IEEE/CVF International Conference on Computer Vision Workshop (ICCVW). Seoul: IEEE, 2019:3599-3608.
- [45] DA CUNHA A L, ZHOU J, DO M N. The nonsubsampling contourlet transform: theory, design, and applications[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2006, 15(10):3089-3101.
- [46] BARNESLEY M F. Fractal functions and interpolation[J]. *Constructive Approximation*, 1986, 2(1):303-329.
- [47] MANDELBROT B B. *The fractal geometry of nature*[M]. New York: WH Freeman and Company, 1982:131-147.
- [48] BOUDA M, CAPLAN J S, SAIERS J E. Box-counting dimension revisited: presenting an efficient method of minimizing quantization error and an assessment of the self-similarity of structural root systems[J]. *Frontiers in Plant Science*, 2016, 7:149.
- [49] BAO F X, YAO X X, SUN Q H, et al. Smooth fractal surfaces derived from bicubic rational fractal interpolation functions [J]. *Science China Information Sciences*, 2018, 61(9):099104.
- [50] EBERHART, SHI Y H. Particle swarm optimization: developments, applications and resources[C] // Proceedings of the 2001 Congress on Evolutionary Computation. Seoul: IEEE, 2002:81-86.
- [51] TIMOFTE R, DE V, VAN GOOL L. Anchored neighborhood regression for fast example-based super-resolution[C] // 2013 IEEE International Conference on Computer Vision. Sydney: IEEE, 2014:1920-1927.
- [52] DONG C, LOY C C, HE K M, et al. Learning a deep convolutional network for image super-resolution[C] // Computer Vision-ECCV 2014. Cham: Springer, 2014:184-199.
- [53] LAI W S, HUANG J B, AHUJA N, et al. Fast and accurate image super-resolution with deep Laplacian pyramid networks [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2019, 41(11):2599-2613.
- [54] SHOCHER A, COHEN N, IRANI M. Zero-shot super-resolution using deep internal learning[C] // 2018 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Salt Lake City: IEEE, 2018:3118-3126.
- [55] ZEYDE R, ELAD M, PROTTER M. On single image scale-up using sparse-representations[C] // Curves and Surfaces. Berlin, Heidelberg: Springer, 2012:711-730.
- [56] FRANZEN R. Kodak lossless true color image suite[DS/OL]. (2024-10-25)[2026-01-14]. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2402.16855>.

(编辑:胡春燕)

(上接第95页)

- [20] ZELLINGER W, GRUBINGER T, LUGHOFFER E, et al. Central moment discrepancy (CMD) for domain-invariant representation learning[EB/OL]. (2017-02-28)[2024-07-04]. <https://arxiv.org/abs/1702.08811>.
- [21] YU Weimeng, XU Hua, YUAN Ziqi, et al. Learning modality-specific representations with self-supervised multi-task learning for multimodal sentiment analysis[C] // Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence. Virtual: AAAI Press, 2021, 35(12):10790-10797.
- [22] ZADEH A, ZELLERS R, PINCUS E, et al. Mosi: multimodal corpus of sentiment intensity and subjectivity analysis in online opinion videos[EB/OL]. (2016-06-20)[2024-07-04]. <https://arxiv.org/abs/1606.06259>.
- [23] LIN Han, ZHANG Pinglu, LIN Jiading, et al. PS-mixer: a polar-vector and strength-vector mixer model for multimodal sentiment analysis[J]. *Information Processing & Management*, 2023, 60(2):103229.

(编辑:李艺)