

## 三类半环上矩阵的正交性

程冲华,王爱法\*,王丽丽

(重庆理工大学数学科学学院,重庆400054)

**摘要:**对于 $n \times n$ 阶矩阵 $A$ 和 $B$ ,若矩阵 $AB$ 和 $BA$ 均为零矩阵,则称 $A$ 和 $B$ 正交。若 $A^2$ 为零矩阵,则称 $A$ 为自正交。本文研究一类特殊tropical $(0, -1)$ 矩阵的正交性以及二元布尔代数和链半环上矩阵的自正交性。研究二元布尔代数上矩阵的自正交性,间接刻画二元布尔代数上的零方矩阵形式。

**关键词:**Tropical代数;正交性;二元布尔代数;链半环

**中图分类号:**O151 **文献标志码:**A

**引用格式:**程冲华,王爱法,王丽丽. 三类半环上矩阵的正交性[J]. 山东大学学报(理学版),2026,61(4):37-41.

## The orthogonality of matrices over three kinds of semirings

CHENG Chonghua, WANG Aifa\*, WANG Lili

(School of Mathematical Sciences, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054, China)

**Abstract:** For  $n \times n$  matrices  $A$  and  $B$ , they are considered orthogonal when both  $AB$  and  $BA$  are zero matrices, and  $A$  is deemed self-orthogonal when  $A^2$  is a zero matrix. The orthogonality of a specific class of tropical  $(0, -1)$  matrices, as well as the self-orthogonality of matrices on binary Boolean algebras and chain semirings is studied. The self-orthogonality of matrices on binary Boolean algebras are studied and the zero-square matrix form on those algebras is indirectly characterized.

**Key words:** tropical algebra; orthogonality; binary Boolean algebra; chain semiring

## 0 引言

$\mathbf{R}$ 为实数集, $T = \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ ,在 $T$ 上定义 $\oplus$ (加法运算)和 $\otimes$ (乘法运算): $(\forall a, b \in T) a \oplus b = \max\{a, b\}$ , $a \otimes b = a + b$ ,则 $T$ 为tropical代数<sup>[1]</sup>。Tropical代数理论是在tropical半环基础上发展起来的代数学理论<sup>[2-3]</sup>。目前,tropical代数理论已发展成为代数学的一个重要领域,应用于涵盖优化问题<sup>[4]</sup>、控制理论<sup>[5]</sup>以及几何群论<sup>[6]</sup>等。由于众多应用领域中的问题都可以通过tropical线性代数方程组来表达,因此tropical代数中的许多问题都与矩阵密切相关。

Johnson等<sup>[7]</sup>探讨tropical $2 \times 2$ 矩阵乘法半群的结构,刻画半群上的Green关系、幂等矩阵以及tropical $2 \times 2$ 矩阵乘法子群。Hollings等<sup>[8]</sup>对tropical矩阵半群上的Green D关系进行刻画,并从几何学的角度提出了一些新的见解。Izhakian等<sup>[9]</sup>研究不含特定元素 $-\infty$ 的tropical矩阵乘法半群,并证明tropical矩阵乘法半群的任意子群都可以嵌入到 $n \times n$ 阶tropical可逆矩阵的乘法群中。Yu等<sup>[10]</sup>在正规tropical矩阵半环上引入一个与Kleene stars相关的同余,随后证明了该同余是双半格同余。Bakhadly等<sup>[11]</sup>研究在tropical乘法下相互正交的正规矩阵对,并对最小正交对进行详细刻画。Deng等<sup>[12]</sup>给出多个正规tropical矩阵上的同余关系,并深入探讨这些同余关系之间的相互联系。Bakhadly等<sup>[13]</sup>研究集合 $\{0, -1\}$ 上正规矩阵的正交性以及

收稿日期:2024-05-17;网络出版时间:2025-07-09

基金项目:国家自然科学基金资助项目(12371024);重庆市教委科学技术研究项目(KJZD-K202401102);重庆市自然科学基金创新发展联合基金(CSTB2025NSQC-LZX0067)

第一作者:程冲华(1998—),男,硕士研究生,研究方向为半群代数学。E-mail:cch1034200822@126.com

\*通信作者:王爱法(1980—),男,教授,博士,研究方向为代数学。E-mail:wangaf@cqut.edu.cn

正交集的性质。

本文讨论一类特殊 tropical(0, -1) 矩阵的正交性以及二元布尔代数和链半环上的矩阵的自正交性。

## 1 预备知识

设  $S$  为非空集合, 若在集合  $S$  上定义  $\oplus$  (加法) 和  $\otimes$  (乘法), 使得

(1)  $(S, \oplus)$  是一个交换半群;

(2)  $(S, \otimes)$  是一个半群;

(3) 对任意的  $a, b, c \in S$ , 有  $a \otimes (b \oplus c) = a \otimes b \oplus a \otimes c$ ,  $(b \oplus c) \otimes a = b \otimes a \oplus c \otimes a$ ,

则称  $(S, \oplus, \otimes)$  是半环, 简记为  $S$ 。

设  $M_n(S)$  ( $n \geq 2$ ) 表示元素来自于  $S$  的  $n \times n$  矩阵集合, 类似于线性代数中矩阵的加法和乘法运算, 定义  $M_n(S)$  上矩阵之间的加法  $\oplus$  和乘法  $\otimes$  运算如下:

对任意  $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_n(S)$ ,  $A \oplus B = (a_{ij} \oplus b_{ij})$ ,  $A \otimes B = (\bigoplus_{k=1}^{k=n} a_{ik} \otimes b_{kj})$ 。

设  $K = \{0, -1\}$ , 在  $K$  上定义加法  $\oplus$  和乘法  $\otimes$ :

对于任意的  $x, y \in K$ ,  $x \oplus y = \max\{x, y\}$ ,  $x \otimes y = x + y$ ,

其中  $(-1) \otimes (-1) = (-1) + (-1) = -1$ 。由半环定义知,  $(K, \oplus, \otimes)$  为一个半环, 也称  $(K, \oplus, \otimes)$  为 tropical(0, -1) 半环。

设  $k$  为任意正整数, 令  $B_k$  为  $k$  元素集合  $S_k$  的幂集,  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$  表示  $S_k$  的单元素子集,  $B_k$  中元素空集记为 0,  $B_k$  中元素  $S_k$  记为 1。定义  $B_k$  上的加法  $\oplus$  和乘法  $\otimes$ :

对任意  $x, y \in B_k$ ,  $x \oplus y = x \cup y$ ,  $x \otimes y = x \cap y$ ,

称  $B_k$  为布尔代数。若  $k=1$ , 称  $B_1$  为二元布尔代数。根据半环的定义可知,  $(B_k, \oplus, \otimes)$  为一个半环。

设  $L$  为至少含 2 个元素的集合, 若  $L$  在关系 “ $<$ ” 下为全序集, 含有一个上界 (记为 1) 和一个下界 (记为 0), 以及  $L$  上的加法  $\oplus$  和乘法  $\otimes$  定义:

对于任意的  $x, y \in L$ ,  $x \oplus y = \max\{x, y\}$ ,  $x \otimes y = \min\{x, y\}$ 。

称  $(L, \oplus, \otimes)$  为链半环。特别地, 若  $L$  为实数区间  $[0, 1]$ , 称  $(L, \oplus, \otimes)$  为模糊半环。

半环  $S \in \{K, B_1, L\}$ , 符号  $[n]$  表示集合  $\{1, 2, \dots, n\}$ ,  $[n_0]$  表示集合  $\{0\} \cup \{1, 2, \dots, n\}$ 。对于  $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_n(S)$ , 将矩阵  $A$  与  $B$  的乘积  $A \otimes B$  简记为  $AB$ ,  $A^k$  表示  $k$  个  $A$  相乘。用  $a_{ij}$  或  $A_{ij}$  表示矩阵  $A$  中的  $(i, j)$  位置处的元素,  $A_{i*}$  和  $A_{*j}$  分别表示矩阵  $A$  的第  $i$  行和第  $j$  列。记  $R_A = \{i | \forall j \in [n], a_{ij} = 0\}$ ,  $C_A = \{j | \forall i \in [n], a_{ij} = 0\}$ 。若对任意的  $i, j \in [n]$ , 有  $a_{ij} = 0$ , 则称  $A$  为  $M_n(S)$  上的零矩阵。若  $A^2$  为零矩阵, 则称  $A$  为零方矩阵, 一般地,  $Z$  表示  $M_n(S)$  上的零矩阵。

设  $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_n(S)$ , 若  $AB = BA = Z$ , 称  $A$  和  $B$  正交。若  $A^2 = Z$ , 称  $A$  为自正交。

## 2 一类特殊 tropical(0, -1) 矩阵的正交性

设  $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ , 若对任意的  $i \in [n]$ , 有  $a_{ii} = 0$ , 称  $A$  为正规矩阵。令  $M_n^r$  为  $M_n(K)$  上所有正规矩阵的集合, 则有如下命题。

**命题 1** 设  $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_n^r$ , 则

(1) 若  $C_A \cap R_B \neq \emptyset$ , 则  $AB = Z$ ,  $BA$  自正交;

(2) 若  $R_A \cup R_B = [n]$ , 则  $AB = BA = Z$ ;

(3) 若  $C_A \cup C_B = [n]$ , 则  $AB = BA = Z$ 。

**证明** (1) 若  $C_A \cap R_B \neq \emptyset$ , 则对任意  $i, j \in [n]$ , 存在  $l \in C_A \cap R_B$ , 使得  $a_{il} \otimes b_{lj} = 0$ , 即  $AB = Z$ 。由于  $l \in C_A \cap R_B$ , 因此对任意  $j \in [n]$ , 有

$$(BA)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{k=n} b_{ik} \otimes a_{kj} = b_{ij} \otimes a_{jj} = 0 + 0 = 0,$$

即  $(BA)_{i*}$  的分量都为 0。同理有  $(BA)_{*i}$  的分量都为 0, 因此  $(BA)^2 = Z$ , 即  $BA$  自正交。

(2) 若  $R_A = \emptyset$  或  $R_B = \emptyset$ , 显然  $AB = BA = Z$ 。假设  $R_A \neq \emptyset$  且  $R_B \neq \emptyset$ , 则有如下 2 种情况:

情况 1  $R_A \cap R_B = \emptyset$ , 对任意  $k \in [n]$ ,  $i \in R_A, j \in R_B (i \neq j)$ , 有

$$(AB)_{ik} = a_{ik} \otimes b_{kk} = 0, \quad (AB)_{jk} = a_{ij} \otimes b_{jk} = 0。$$

由于  $R_A \cup R_B = [n]$ , 因此  $AB = Z$ 。类似地, 可得  $BA = Z$ ,  $A$  和  $B$  正交。

情况 2  $R_A \cap R_B \neq \emptyset$ , 分如下 2 种情况:

(i)  $R_A \subseteq R_B = [n]$  或  $R_B \subseteq R_A = [n]$ , 此时  $AB = BA = Z$  显然成立。

(ii) 存在  $i \in R_A, j \in R_B \setminus (R_A \cap R_B)$  且  $i \neq j$ , 因为  $R_A \cup (R_B \setminus R_A \cap R_B) = [n]$  和  $R_A \cap (R_B \setminus R_A \cap R_B) = \emptyset$ , 所以, 对任意  $k \in [n], i \in R_A, j \in R_B \setminus (R_A \cap R_B) (i \neq j)$ , 有

$$(AB)_{ik} = a_{ik} \otimes b_{kk} = 0, \quad (AB)_{jk} = a_{ij} \otimes b_{jk} = 0。$$

因为  $R_A \cup (R_B \setminus R_A \cap R_B) = [n]$ , 所以  $AB = Z$ 。类似地, 可得  $BA = Z$ , 故  $A$  和  $B$  正交。

(3) 证明过程与命题 1(2) 的类似, 证明略。

引理 1 设  $A = (a_{ij})$ 、 $B = (b_{ij})$  和  $D = (d_{ij}) \in M_n(K)$ ,  $l, k$  为正整数,  $m$  为非负整数, 其中

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & i+j=l+mk, \\ -1, & \text{其他,} \end{cases}$$
$$b_{ij} = \begin{cases} 0, & i+j=1+2m, \\ -1, & \text{其他,} \end{cases}$$
$$d_{ij} = \begin{cases} 0, & i+j=2m, \\ -1, & \text{其他,} \end{cases}$$

则有

- (1)  $A, B$  和  $D$  都是对称矩阵;
- (2) 若  $AB = Z (AD = Z)$ , 则  $AB = BA = Z (AD = DA = Z)$ ;
- (3) 若  $i$  为奇数, 则对任意偶数(奇数) $j$ , 有  $b_{ij} = 0 (d_{ij} = 0)$ ;
- (4) 若  $i$  为偶数, 则对任意奇数(偶数) $j$ , 有  $b_{ij} = 0 (d_{ij} = 0)$ 。

证明 根据矩阵  $A, B$  和  $D$  的定义, 引理(1) — (4) 显然成立。

定理 1 按照引理 1 的方式定义矩阵  $A, B$  和  $D$ , 则有

- (1) 若  $k > l, n \geq 2k$ , 且  $l$  为偶数,  $k$  为奇数, 则  $A$  和  $B$  正交,  $A$  和  $D$  正交;
- (2) 若  $l > k, n \geq l+k-1$ , 且  $l$  为偶数,  $k$  为奇数, 则  $A$  和  $B$  正交,  $A$  和  $D$  正交;
- (3) 若  $l = k, n \geq 2l$ , 且  $l$  为奇数, 则  $A$  和  $B$  正交,  $A$  和  $D$  正交。

证明 (1) 根据矩阵  $A$  的定义, 当  $i+j=l+k_2k (k_2 \in [n_0])$  时, 有  $a_{ij} = 0$ 。对  $i$  分 3 种情况讨论  $a_{ij}$  为 0 的情况。

情况 1  $1 \leq i < l$ 。设  $j_1 = l-i, j_2 = l-i+k$ , 可知当  $i$  是奇数(偶数)时,  $j_1$  是奇数(偶数),  $j_2$  为偶数(奇数)。  $n \geq 2k$  和  $k > l$ , 有  $j_1 < n$  和  $j_2 < 2k \leq n$ 。又由于  $i+j_1 = l, i+j_2 = l+k$ , 因此  $a_{ij_1} = a_{ij_2} = 0$ 。

情况 2  $i = l$ 。设  $j_1 = k, j_2 = 2k$ , 则  $j_1$  和  $j_2$  分别为奇数和偶数。因为  $i+j_1 = l+k, i+j_2 = l+2k$ , 所以  $a_{ij_1} = a_{ij_2} = 0$ 。

情况 3  $l < i \leq n$ , 则有如下 2 种情况:

(i)  $i = l+k, k (k_1 \in [n])$ 。设  $j_1 = k, j_2 = 2k$ , 则  $j_1$  和  $j_2$  分别为奇数和偶数。由于  $i+j_1 = l+(k_1+1)k, i+j_2 = l+(k_1+2)k$ , 因此  $a_{ij_1} = a_{ij_2} = 0$ 。

(ii)  $l+k_2k < i < l+(k_2+1)k (k_2 \in [n_0])$ 。设  $j_1 = l+(k_2+1)k-i, j_2 = j_1+k$ , 则  $0 < j_1 < k, k < j_2 < 2k$ , 且易知  $a_{ij_1} = a_{ij_2} = 0$ 。进一步地, 若  $i$  为奇数,  $k_2$  为奇数(偶数), 则  $j_1$  为奇数(偶数),  $j_2$  为偶数(奇数)。对偶地, 若  $i$  为偶数,  $k_2$  为奇数(偶数), 则  $j_1$  为偶数(奇数),  $j_2$  为奇数(偶数)。

设  $C = AB$ , 由引理 1(1) 知  $B$  为对称矩阵, 因此

$$c_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n a_{ik} \otimes b_{kj} \leftrightarrow c_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n a_{ik} \otimes b_{jk}。$$

通过上述分析, 有如下 4 种情况:

- (i) 若  $i$  和  $j$  都是奇数, 则存在一个偶数  $k \in [n]$ , 使得  $a_{ik} = 0$ 。进一步地, 由引理 1(3) 知  $b_{jk} = 0$ , 因此

$c_{ij}=0$ 。

(ii) 若  $i$  和  $j$  分别为奇数和偶数, 则存在一个奇数  $k \in [n]$ , 使得  $a_{ik}=0$ 。进一步地, 由引理 1(4) 知,  $b_{jk}=0$ , 因此  $c_{ij}=0$ 。

(iii) 若  $i$  和  $j$  分别为偶数和奇数, 则存在一个偶数  $k \in [n]$ , 使得  $a_{ik}=0$ 。进一步地, 由引理 1(3) 知,  $b_{jk}=0$ , 因此  $c_{ij}=0$ 。

(iv) 若  $i$  和  $j$  都为偶数, 则存在一个奇数  $k \in [n]$ , 使得  $a_{ik}=0$ 。进一步地, 由引理 1(4) 知,  $b_{jk}=0$ , 因此  $c_{ij}=0$ 。

综上所述, 可得  $AB=Z$ 。由引理 1(2) 知,  $AB=BA=Z$ , 因此  $A$  和  $B$  正交。通过上述类似分析, 可得  $A$  和  $D$  正交。

(2) 证明过程与定理(1)类似, 略。

(3) 证明过程与定理(1)类似, 略。

### 3 二元布尔代数和链半环上的矩阵的自正交性

设  $A=(a_{ij}) \in M_n(B_1)$ , 若  $a_{ij}=1$ , 且  $A$  的其它位置元素都为零, 则称  $A$  为  $M_n(B_1)$  的一个细胞, 记为  $E_{ij}$ 。通过  $M_n(B_1)$  上矩阵的乘法可知, 若  $j \neq l$ , 则  $E_{ij}E_{lh}=Z$ 。若  $j=l$ , 则  $E_{ij}E_{lh}=E_{ih}$ 。由于  $M_n(B_1)$  上任意矩阵  $B=$

$(b_{ij}) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij}E_{ij}$ , 因此  $b_{ij} \in \{0, 1\}$ 。综上可知  $M_n(B_1)$  上所有的矩阵都为一些细胞的和。

**命题 2** 设  $A=(a_{ij}) \in M_n(B_1)$ , 且  $A$  中有  $m$  个元素为 1, 则有

(1) 若  $m=0$ , 则  $A^2=Z$ ;

(2) 若  $m=1$ , 则  $A^2=Z$  当且仅当对任意的  $i \in [n]$ ,  $A \neq e_{ii}$ ;

(3) 若  $m \geq 2$ , 令  $A = \sum_{k=1}^m E_{i_k j_k}$ 。则  $A^2=Z$  当且仅当对任意的  $k, l \in [m]$ ,  $i_k$  与  $j_l$  互不相同。

**证明** (1)和(2)显然。

(3) 充分性。若对任意的  $k, l \in [m]$ ,  $i_k$  与  $j_l$  互不相同, 则  $A^2 = (\sum_{k=1}^m E_{i_k j_k}) \otimes (\sum_{k=1}^m e_{i_k j_k}) = Z$  (因为当  $j \neq l$ ,  $E_{ij}E_{lh}=Z$ )。

必要性。若存在  $k, l \in [m]$ , 使得  $i_k=j_l$ ,  $A_{i_k j_k}=A_{i_l j_l}=1$ , 对任意  $a, b \in B_1$ , 有  $1 \otimes 1 \oplus a \otimes b = 1$ , 则  $(A^2)_{i_j k} = \oplus_{p=1}^m A_{i_p p} \otimes A_{p j_k} = A_{i_j j_l} \otimes A_{j_l j_k} = A_{i_j j_l} \otimes A_{i_k j_k} = 1 \otimes 1 = 1 \neq 0$  与  $A^2=Z$  矛盾, 故对任意的  $k, l \in [m]$ ,  $i_k$  与  $j_l$  互不相同。

下面讨论链半环  $L$  上的矩阵的自正交性。

设  $\alpha \in L$  且  $\alpha \neq 0$ , 对于任意的  $x \in L$ , 若  $\alpha < x$  或  $\alpha = x$  (简记为  $\alpha \leq x$ ), 令  $x^\alpha = 1$ , 否则  $x^\alpha = 0$ 。进一步地, 若  $A=(a_{ij}) \in M_n(L)$ , 记  $A^\alpha = ((a_{ij})^\alpha)$ , 则  $A^\alpha \in M_n(B_1)$ , 此时称  $A^\alpha$  为  $A$  的  $\alpha$ -模式。可知, 对某个  $i, j \in [n]$ ,  $A$  的  $a_{ij}$ -模式的自正交性与  $A$  的自正交性无关。下面通过一个例子说明该情况。

**例** 设  $A=(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(L)$ , 其中  $L=[0, 1]$  为模糊半环, 链半环  $L$  上的加法  $\oplus$  和乘法  $\otimes$  定义如下

下, 对于任意的  $x, y \in L$ ,  $x \oplus y = \max\{x, y\}$ ,  $x \otimes y = \min\{x, y\}$ , 则  $A$  的  $a_{21}$ -模式为  $A^{a_{21}} = A^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  且

$(A^{a_{21}})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 即  $A^{a_{21}}$  为自正交, 而  $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 因此  $A^2$  不为自正交。

**定理 2** 设  $A=(a_{ij}) \in M_n(L)$ , 且  $A$  不为零矩阵, 则  $A$  为自正交矩阵当且仅当  $A$  的所有  $a_{ij}$ -模式都为自正交矩阵。

**证明 必要性。** 设  $A = (a_{ij}) \in M_n(L)$ , 则对任意  $a_{ij} \neq 0$ ,  $(A^2)^{a_{ij}}$  的  $(m, l)$  项  $(m, l \in [n])$ , 有如下 2 种情况:

(i) 若  $(A^2)^{a_{ij}}$  的  $(m, l)$  项为 1, 则  $a_{ij} \leq (A^2)_{ml} = \sum_{k=1}^n a_{mk} \otimes a_{kl}$ , 即存在  $f \in [n]$ , 使得  $a_{ij} \leq a_{mf} \otimes a_{fl}$ 。由于  $a_{mf} \otimes a_{fl} = \min(a_{mf}, a_{fl})$ , 因此  $a_{ij} \leq a_{mf}$  且  $a_{ij} \leq a_{fl}$ 。进一步地, 可知  $A^{a_{ij}}$  的  $(m, f)$  项和  $(f, l)$  项为 1, 则  $A^{a_{ij}} \otimes A^{a_{ij}}$  的  $(m, l)$  项为 1。

(ii) 若  $(A^2)^{a_{ij}}$  的  $(m, l)$  项为 0, 则  $(A^2)_{ml} = \sum_{k=1}^n a_{mk} \otimes a_{kl} < a_{ij}$ , 即对任意  $f \in [n]$ , 有  $a_{mf} \otimes a_{fl} < a_{ij}$ 。因为  $a_{mf} \otimes a_{fl} = \min(a_{mf}, a_{fl})$ , 所以对任意  $f \in [n]$  有  $a_{mf} < a_{ij}$  或  $a_{fl} < a_{ij}$ 。进一步地, 可知对任意  $f \in [n]$ ,  $A^{a_{ij}}$  的  $(m, f)$  项或  $(f, l)$  项为 0, 则  $A^{a_{ij}} \otimes A^{a_{ij}}$  的  $(m, l)$  项为 0。

综上所述,  $A^{a_{ij}} \otimes A^{a_{ij}} = (A^2)^{a_{ij}}$ , 因此, 若  $A^2 = Z$ , 则  $(A^2)^{a_{ij}} = Z$ , 故  $A^{a_{ij}} \otimes A^{a_{ij}} = Z$ , 即  $A^{a_{ij}}$  为自正交矩阵。

**充分性。** 假设  $A$  不为自正交矩阵, 则存在  $i, j \in [n]$ ,  $(A^2)_{ij} \neq 0$ ,  $(A^2)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \otimes a_{kj}$ , 设  $(A^2)_{ij} = a_{ix} \otimes a_{xj}$ , 因为  $a_{ix} \otimes a_{xj} = \min(a_{ix}, a_{xj})$ , 所以有  $a_{ix}, a_{xj} \neq 0$ , 且  $(A^2)_{ij} = a_{ix}$  或  $(A^2)_{ij} = a_{xj}$ 。设  $(A^2)_{ij} = a_{ix}$ , 则  $a_{ix} \leq a_{xj}$ , 此时,  $A^{a_{ix}}$  的  $(i, x)$  项和  $(x, j)$  项都为 1, 因此  $A^{a_{ix}} \otimes A^{a_{ix}}$  的  $(i, j)$  项为 1, 即  $A^{a_{ix}}$  不为自正交矩阵, 与  $A$  的所有  $a_{ij}$ -模式都为自正交矩阵矛盾, 所以  $A$  为自正交矩阵。

**参考文献:**

- [1] BUTKOVIČ P. Max-linear systems: theory and algorithms[M]. London: Springer, 2010.
- [2] CUNINGHAME-GREEN R A. Process synchronisation in a stellworks – a problem of feasibility [M]. London: English University Press, 1960.
- [3] CUNINGHAME-GREEN R A. Minimax algebra[M] // BECKMANN M, KÜNZI H P. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Berlin: Springer, 1979.
- [4] BUTKOVIČ P. Max-algebra: the linear algebra of combinatorics? [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2003, 367:313-335.
- [5] COHEN G, GAUBERT S, QUADRAT J. Max-plus algebra and system theory: where we are and where to go now[J]. Annual Reviews in Control, 1999, 23(1):207-219.
- [6] BIERI R, GROVES J. The geometry of the set of characters induced by valuations[J]. Journal Für Die Reine Und Angewandte Mathematik, 1984, 347:168-195.
- [7] JOHNSON M, KAMBITES M. Multiplicative structure of 2x2 tropical matrices[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2011, 435:1612-1625.
- [8] HOLLINGS C, KAMBITES M. Tropical matrix duality and Green’s D relation[J]. Journal of the London Mathematical Society, 2012, 2:520-538.
- [9] IZHAKIAN Z, JOHNSON M, KAMBITES M. Tropical matrix groups[J]. Semigroup Forum, 2018, 96:178-196.
- [10] YU Baomin, ZHAO Xianzhong, ZENG Lingli. A congruence on the semiring of normal tropical matrices [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2018, 555:21-335.
- [11] BAKHADLY B, GUTERMAN A, DE LA PUENTE M J. Orthogonality for  $(0, -1)$  tropical normal matrices[J]. Special Matrices, 2020, 8:40-60.
- [12] DENG Weina, YU Baomin. Certain congruences on the semiring of normal tropical matrices [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2023, 668:110-130.
- [13] BAKHADLY B, GUTERMAN A, DE LA PUENTE M J. Normal tropical  $(0, -1)$ -matrices and their orthogonal sets[J]. Journal of Mathematical Sciences, 2023, 269:614-631.

(编辑:陈丽萍)