山东大学学报(理学版)2026 年 4 月 第 61 卷 第 4 期
Journal of Shandong University(*Natural Science*), Vol.61, No.4, 2026 http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn

文章编号:1671-9352(2026)04-0046-06 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2024.043

一类斜 Calabi-Yau 代数的 Van den Bergh 对偶

李玟,刘立宇*
(扬州大学数学学院, 江苏 扬州 225002)

摘要:利用二元多项式代数的非分次 Ore 扩张构造一类三维斜 Calabi-Yau 代数,计算这类斜 Calabi-Yau 代数的 Nakayama 自同构,并建立其 Hochschild 同调和上同调的 Van den Bergh 对偶。

关键词:斜 Calabi-Yau 代数; Van den Bergh 对偶; Nakayama 自同构; Ore 扩张
中图分类号:O154 **文献标志码**:A
引用格式:李玟,刘立宇. 一类斜 Calabi-Yau 代数的 Van den Bergh 对偶[J]. 山东大学学报(理学版),2026,61(4):46-51.

Van den Bergh duality for a class of skew Calabi-Yau algebras

LI Wen, LIU Liyu*
(School of Mathematics, Yangzhou University, Yangzhou 225002, Jiangsu, China)

Abstract: A class of three-dimensional skew Calabi-Yau algebras is constructed using ungraded Ore extensions of the polynomial algebra in two variables. The Nakayama automorphisms of these skew Calabi-Yau algebras are computed, and the Van den Bergh duality between their Hochschild homology and cohomology is established.

Key words: skew Calabi-Yau algebras; Van den Bergh duality; Nakayama automorphisms; Ore extensions

0 引言

对于具有同调光滑性的非交换 Gorenstein 代数,Van den Bergh 给出 Hochschild 同调与上同调的对偶关系,这一关系称为 Van den Bergh 对偶[1]。斜 Calabi-Yau 代数的 Van den Bergh 对偶与这个代数 Nakayama 自同构(与 Frobenius 代数的 Nakayama 自同构不是同一个概念)有关。一般来说,Nakayama自同构的计算比较困难,目前只计算出了特殊类型的代数的 Nakayama 自同构。文献[2-4]研究 Ore 扩张和斜多项式扩张的 Nakayama 自同构和斜 Calabi-Yau 性质。Zhu 等[5]研究 Koszul Artin-Schelter 正则代数的双 Ore 扩张的 Nakayama 自同构。文献[6-7]计算 Noetherian Artin-Schelter 正则代数的扭曲张量积的 Nakayama 自同构,以及二维 Artin-Schelter 正则代数的分次 Ore 扩张的 Nakayama 自同构。Chan 等[8]研究 Noetherian Artin-Schelter 正则代数的 Nakayama 自同构和 Hopf 内忠实作用之间的联系。文献[9-10]利用 Nakayama 自同构研究三维 Artin-Schelter 正则代数上的 Hopf 作用,计算一类代数的Nakayama自同构。Liu 等[11]计算 n 元多项式代数的非分次 Ore 扩张的 Nakayama 自同构。如何在Nakayama自同构的基础上建立斜 Calabi-Yau 代数的 Van den Bergh 对偶,马雯[12]对这一问题进行研究并对广义 Weyl 代数建立 Van den Bergh 对偶。

本文在文献[11]的基础上计算二元多项式代数的一类 de Jonquieres 型 Ore 扩张的 Nakayama 自同构,并建立其 Van den Bergh 对偶。

收稿日期:2024-01-31; **网络出版时间**:2025-07-09
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11971418)
第一作者:李玟(2000—),女,硕士研究生,研究方向为非交换代数. E-mail:1512494051@qq.com
* **通信作者**:刘立宇(1984—),男,副教授,博士,研究方向为非交换代数. E-mail:lyliu@yzu.edu.cn

1 预备知识

设 k 是一个域,线性是指 k-线性,$R=k[x,y]$ 是二元多项式代数,令 σ 是 R 的代数自同构,定义为 $\sigma(x)=x+f(y)$, $\sigma(y)=y$,其中 $f(y)\in k[y]$。再令 δ 是 R 的 σ-导子,即 δ 是满足 $\delta(ab)=\delta(a)b+\sigma(a)\delta(b)$ $(\forall a,b\in R)$ 的一个线性映射,定义为 $\delta(x)=g(y)$, $\delta(y)=0$,其中 $g(y)\in k[y]$。记 $A=R[z;\sigma,\delta]$ 为 R 的 Ore 扩张,于是有 $za=\sigma(a)z+\delta(a)$ $(\forall a\in R)$。

定义 1　设 τ 是 A 的代数自同态,M 是 A-双模,记 M_τ 表示如下 A-双模,M_τ 作为线性空间就是 M,模结构由 $a\cdot m\cdot b=am\tau(b)$ 给出,其中 $a,b\in A$, $m\in M$。类似地,${}_\tau M$ 表示如下 A-双模,${}_\tau M$ 作为线性空间就是 M,模结构由 $a\cdot m\cdot b=\tau(a)mb$ 给出,其中 $a,b\in A$, $m\in M$。

定义 2　设 A 是一个代数,A^e 是 A 的包络代数,如果存在整数 $d\geqslant 0$ 以及 A 的自同构 υ 使得下面 2 个条件成立:

(1) A 是同调光滑的,即 A 作为左 A^e-模有一个有限长的有限生成投射分解,

(2) 存在 A^e-模同构

$$\mathrm{Ext}^i_{A^e}(A,A^e)\cong\begin{cases}0, & i\neq d,\\ A_\upsilon, & i=d,\end{cases}$$

那么 A 称为 d 维斜 Calabi-Yau 代数,υ 称为 A 的 Nakayama 自同构。

$H^n(A,M)$ 和 $H_n(A,M)$ 分别表示系数在 M 中的 A 的第 n 个 Hochschild 上同调群和同调群,定理 1 是将 Van den Bergh 对偶应用于斜 Calabi-Yau 代数的结果。

定理 1　设 A 是一个 d 维斜 Calabi-Yau 代数,υ 为它的 Nakayama 自同构,对于任意 A-双模 M 和整数 i,有自然同构 $H^i(A,M)\cong H_{d-i}(A,M_\upsilon)$。

引理 1[13]　设 $A=R[z;\sigma,\delta]$ 是 R 的 Ore 扩张,则 A-双模序列

$$0\longrightarrow A_\sigma\otimes_R A\xrightarrow{t}A\otimes_R A\longrightarrow A\longrightarrow 0$$

是一个短正合列,其中 $t(a\otimes_R b)=az\otimes_R b-a\otimes_R zb$, $a,b\in A$。

引理 2　对于 $R=k[x,y]$,存在 Koszul 分解为

$$0\longrightarrow R\otimes R\xrightarrow{d_2}(R\otimes R)^2\xrightarrow{d_1}R\otimes R\xrightarrow{\varepsilon}R\longrightarrow 0,$$

其中 d_1,d_2,ε 是 R-双模同态,满足 $\varepsilon(1\otimes 1)=1$, $d_1(1\otimes 1,0)=x\otimes 1-1\otimes x$, $d_1(0,1\otimes 1)=y\otimes 1-1\otimes y$, $d_2(1\otimes 1)=(1\otimes y-y\otimes 1,x\otimes 1-1\otimes x)$。

定义线性映射 $\Delta:k[y]\to k[y]\otimes k[y]$, $\Delta(y^i)=\sum\limits_{k=0}^{i-1}y^{i-1-k}\otimes y^k$。由于 $k[y]\subseteq A$,因此 $\Delta(h(y))$ 可以看作 $A\otimes A$ 中的元素,其中 $h(y)\in k[y]$。

2 双模自由分解

命题 1　图 1 中,每个箭头都表示 A-双模同态,其中 $\varepsilon(1\otimes 1)=1\otimes_R 1$, $\varepsilon'(1\otimes 1)=1\otimes_R 1$, $d_1(1\otimes 1,0)=x\otimes 1-1\otimes x$, $d_1(0,1\otimes 1)=y\otimes 1-1\otimes y$, $d_2(1\otimes 1)=(1\otimes y-y\otimes 1,x\otimes 1-1\otimes x)$, $d'_1(1\otimes 1,0)=x\otimes 1-1\otimes x+f(y)\otimes 1$, $d'_1(0,1\otimes 1)=y\otimes 1-1\otimes y$, $d'_2(1\otimes 1)=(1\otimes y-y\otimes 1,x\otimes 1-1\otimes x+f(y)\otimes 1)$, $\tilde{t}_0(1\otimes 1)=z\otimes 1-1\otimes z$, $\tilde{t}_1(1\otimes 1,0)=(z\otimes 1-1\otimes z,-\Delta(g(y))-\Delta(f(y))z)$, $\tilde{t}_1(0,1\otimes 1)=(0,z\otimes 1-1\otimes z)$, $\tilde{t}_2(1\otimes 1)=z\otimes 1-1\otimes z$($t$ 同引理 1),则

(a) 2 个竖列分别是 $A\otimes_R A$ 和 $A_\sigma\otimes_R A$ 的 A-双模分解,

(b) 图 1 中 3 个方块交换。

$$
\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
& A\otimes A \arrow[r, "\tilde{t}_2"] \arrow[d, "d_2'"] & A\otimes A \arrow[d, "d_2"] & & \\
& (A\otimes A)^2 \arrow[r, "\tilde{t}_1"] \arrow[d, "d_1'"] & (A\otimes A)^2 \arrow[d, "d_1"] & & \\
& A\otimes A \arrow[r, "\tilde{t}_0"] \arrow[d, "\varepsilon'"] & A\otimes A \arrow[d, "\varepsilon"] & & \\
0 \arrow[r] & A_\sigma\otimes_R A \arrow[r, "t"] \arrow[d] & A\otimes_R A \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] & 0 \\
& 0 & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

图 1　交换图 1

Fig.1　Commutative diagram 1

为了证明命题 1,先证明引理 3。

引理 3　对于任意多项式 $h(y)\in k[y]$,有 $y\Delta(h(y))-\Delta(h(y))y=h(y)\otimes 1-1\otimes h(y)$。

证明　根据 Δ 的线性性,不妨设 $h(y)=y^n$,则有

$$
\begin{aligned}
y\Delta(h(y))-\Delta(h(y))y &=(y^n\otimes 1+y^{n-1}\otimes y+\cdots+y^2\otimes y^{n-2}+y\otimes y^{n-1})-(y^{n-1}\otimes y+y^{n-2}\otimes y^2+\cdots+y\otimes y^{n-1}+1\otimes y^n)\\
&=y^n\otimes 1-1\otimes y^n\\
&=h(y)\otimes 1-1\otimes h(y),
\end{aligned}
$$

引理 3 得证。

下面证明命题 1。

证明　由文献[11]易得命题 1(a),要证明命题 1(b),即证明

$$\tilde{t}_1 d_2'=d_2\tilde{t}_2, \tag{1}$$

$$\tilde{t}_0 d_1'=d_1\tilde{t}_1, \tag{2}$$

$$t\varepsilon'=\varepsilon\tilde{t}_0 \tag{3}$$

成立。

由于

$$
\begin{aligned}
\tilde{t}_1 d_2'(1\otimes 1)&=\tilde{t}_1(1\otimes y-y\otimes 1,x\otimes 1-1\otimes x+f(y)\otimes 1)\\
&=\tilde{t}_1(1\otimes y,0)-\tilde{t}_1(y\otimes 1,0)+\tilde{t}_1(0,x\otimes 1)-\tilde{t}_1(0,1\otimes x)+\tilde{t}_1(0,f(y)\otimes 1),
\end{aligned} \tag{4}
$$

其中

$$\tilde{t}_1(1\otimes y,0)=(z\otimes y-1\otimes zy,-\Delta(g(y))y-\Delta(f(y))zy), \tag{5}$$

$$\tilde{t}_1(y\otimes 1,0)=(yz\otimes 1-y\otimes z,-y\Delta(g(y))-y\Delta(f(y))z), \tag{6}$$

$$\tilde{t}_1(0,x\otimes 1)=(0,zx\otimes 1-x\otimes z-f(y)z\otimes 1-g(y)\otimes 1), \tag{7}$$

$$\tilde{t}_1(0,1\otimes x)=(0,z\otimes x-1\otimes xz-1\otimes f(y)z-1\otimes g(y)), \tag{8}$$

$$\tilde{t}_1(0,f(y)\otimes 1)=(0,f(y)z\otimes 1-f(y)\otimes z), \tag{9}$$

将式(5)—(9)代入式(4),可得

$$\tilde{t}_1 d_2'(1\otimes 1)=(z\otimes y-1\otimes zy-yz\otimes 1+y\otimes z,B)=(z\otimes y-zy\otimes 1+y\otimes z-1\otimes yz,B), \tag{10}$$

其中

$$
\begin{aligned}
B=\;&zx\otimes 1-z\otimes x-(x\otimes z-1\otimes xz)+1\otimes f(y)z-f(y)\otimes z+1\otimes g(y)-g(y)\otimes 1\\
&-\Delta(g(y))y-\Delta(f(y))zy+y\Delta(g(y))+y\Delta(f(y))z。
\end{aligned} \tag{11}
$$

根据引理 3,有

$$y\Delta(g(y))-\Delta(g(y))y+y\Delta(f(y))z-\Delta(f(y))zy=g(y)\otimes 1-1\otimes g(y)+f(y)\otimes z-1\otimes f(y)z, \tag{12}$$

将式(12)代入式(11)可得 $B=zx\otimes 1-z\otimes x+1\otimes xz-x\otimes z$,从而有

$$\tilde{t}_1 d_2'(1\otimes 1)=(z\otimes y-zy\otimes 1+y\otimes z-1\otimes yz, zx\otimes 1-z\otimes x+1\otimes xz-x\otimes z)。$$

又因为

$$\begin{aligned} d_2\tilde{t}_2(1\otimes 1)&=d_2(z\otimes 1-1\otimes z)\\ &=(z\otimes y-zy\otimes 1, zx\otimes 1-z\otimes x)-(1\otimes yz-y\otimes z, x\otimes z-1\otimes xz)\\ &=(z\otimes y-zy\otimes 1+y\otimes z-1\otimes yz, zx\otimes 1-z\otimes x+1\otimes xz-x\otimes z),\end{aligned}$$

所以 $\tilde{t}_1 d_2'(1\otimes 1)=d_2\tilde{t}_2(1\otimes 1)$,故式(1)成立,图 1 中最上面的方块是交换的。

由于

$$\begin{aligned} \tilde{t}_0 d_1'(1\otimes 1,0)&=\tilde{t}_0(x\otimes 1-1\otimes x+f(y)\otimes 1)\\ &=xz\otimes 1-x\otimes z-(z\otimes x-1\otimes zx)+f(y)z\otimes 1-f(y)\otimes z\\ &=(zx-f(y)z-g(y))\otimes 1-x\otimes z-z\otimes x+1\otimes(xz+f(y)z+g(y))+f(y)z\otimes 1-f(y)\otimes z\\ &=(zx\otimes 1-z\otimes x)-(x\otimes z-1\otimes xz)-(f(y)\otimes z-1\otimes f(y)z)-(g(y)\otimes 1-1\otimes g(y)), \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} d_1\tilde{t}_1(1\otimes 1,0)&=d_1(z\otimes 1-1\otimes z,-\Delta(g(y))-\Delta(f(y))z)\\ &=(zx\otimes 1-z\otimes x)-(x\otimes z-1\otimes xz)-d_1(0,\Delta(f(y))z)-d_1(0,\Delta(g(y))), \end{aligned} \tag{14}$$

根据引理 3,有

$$d_1(0,\Delta(f(y))z)=f(y)\otimes z-1\otimes f(y)z, \tag{15}$$

$$d_1(0,\Delta(g(y)))=g(y)\otimes 1-1\otimes g(y), \tag{16}$$

将式(15)、(16)代入式(14)可得

$$d_1\tilde{t}_1(1\otimes 1,0)=(zx\otimes 1-z\otimes x)-(x\otimes z-1\otimes xz)-(f(y)\otimes z-1\otimes f(y)z)-(g(y)\otimes 1-1\otimes g(y)), \tag{17}$$

可得 $\tilde{t}_0 d_1'(1\otimes 1,0)=d_1\tilde{t}_1(1\otimes 1,0)$。同理可证 $\tilde{t}_0 d_1'(0,1\otimes 1)=d_1\tilde{t}_1(0,1\otimes 1)$,故式(2)成立,图 1 中中间的方块是交换的。

最后,式(3)显然成立,图 1 中最下面的方块是交换的。

定理 2　A 有一个双模自由分解为

$$0\to A\otimes A\xrightarrow{\alpha_3}(A\otimes A)^3\xrightarrow{\alpha_2}(A\otimes A)^3\xrightarrow{\alpha_1}A\otimes A\xrightarrow{\varepsilon}A\to 0, \tag{18}$$

其中 $\varepsilon(1\otimes 1)=1$, $\alpha_1(1\otimes 1,0,0)=x\otimes 1-1\otimes x$, $\alpha_1(0,1\otimes 1,0)=y\otimes 1-1\otimes y$, $\alpha_1(0,0,1\otimes 1)=z\otimes 1-1\otimes z$, $\alpha_2(1\otimes 1,0,0)=(1\otimes y-y\otimes 1,x\otimes 1-1\otimes x,0)$, $\alpha_2(0,1\otimes 1,0)=(z\otimes 1-1\otimes z,-\Delta(g(y))-\Delta(f(y))z,1\otimes x-x\otimes 1-f(y)\otimes 1)$, $\alpha_2(0,0,1\otimes 1)=(0,z\otimes 1-1\otimes z,1\otimes y-y\otimes 1)$, $\alpha_3(1\otimes 1)=(z\otimes 1-1\otimes z,y\otimes 1-1\otimes y,1\otimes x-x\otimes 1-f(y)\otimes 1)$,并且 A 有 Nakayama 自同构 υ,定义为

$$\upsilon(x)=x-f(y),\quad \upsilon(y)=y,\quad \upsilon(z)=z。 \tag{19}$$

证明　将复形(18)删去 A,所得复形记作 P。由命题 1 可知 P 是 $\tilde{t}_i$ 的映射锥,由文献[11]可知该映射锥就是 A 的一个双模自由分解。此外,根据 α_3 和文献[11]可知 A 的 Nakayama 自同构是存在的,可由式(19)给出。

3　Van den Bergh 对偶

仍令 P 为定理 2 证明过程中的复形,将函子 $\mathrm{Hom}_{A^e}(-,A\otimes A)$ 作用于 P,并利用同构 $\mathrm{Hom}_{A^e}((A\otimes A)^n, A\otimes A)\cong(A\otimes A)^n$,可得引理 4。

引理 4　A_υ 的 A-双模自由分解为

$$0\to A\otimes A\xrightarrow{\alpha_1^*}(A\otimes A)^3\xrightarrow{\alpha_2^*}(A\otimes A)^3\xrightarrow{\alpha_3^*}A\otimes A\xrightarrow{\varepsilon}A_\upsilon\to 0, \tag{20}$$

其中 $\varepsilon(1\otimes 1)=1$, $\alpha_1^*(1\otimes 1)=(1\otimes x-x\otimes 1,1\otimes y-y\otimes 1,1\otimes z-z\otimes 1)$, $\alpha_2^*(1\otimes 1,0,0)=(y\otimes 1-1\otimes y,1\otimes z-z\otimes 1,0)$, $\alpha_2^*(0,1\otimes 1,0)=(1\otimes x-x\otimes 1,-\Delta(g(y))-z\Delta(f(y)),1\otimes z-z\otimes 1)$, $\alpha_2^*(0,0,1\otimes 1)=(0,x\otimes 1-1\otimes x-1\otimes f(y),y\otimes 1-1\otimes y)$, $\alpha_3^*(1\otimes 1,0,0)=1\otimes z-z\otimes 1$, $\alpha_3^*(0,1\otimes 1,0)=1\otimes y-y\otimes 1$, $\alpha_3^*(0,0,1\otimes 1)=x\otimes 1-1\otimes x-1\otimes f(y)$。

将分解(20)删去 A_υ 记作 $P^\vee$,注意到 $\upsilon^{-1}: {}_\upsilon A_\upsilon\to A$ 是双模同构。

命题 2　存在链映射 $s:P^\vee\to P$, 使得 s 是 υ^{-1} 的提升,图 2 交换,其中每个箭头都表示 A-双模同态,

$\alpha_i,\alpha_i^*,\varepsilon(i=1,2,3)$同上,$s_i$定义为 $s_0(1\otimes1)=1\otimes1$, $s_1(1\otimes1,0,0)=-(0,0,1\otimes1)$, $s_1(0,1\otimes1,0)=-(0,1\otimes1,0)$, $s_1(0,0,1\otimes1)=(1\otimes1,\Delta(f(y)),0)$, $s_2(1\otimes1,0,0)=(0,0,1\otimes1)$, $s_2(0,1\otimes1,0)=-(0,1\otimes1,0)$, $s_2(0,0,1\otimes1)=-(1\otimes1,0,0)$, $s_3(1\otimes1)=1\otimes1$。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A\otimes A \arrow[r, "\alpha_3"] & (A\otimes A)^3 \arrow[r, "\alpha_2"] & (A\otimes A)^3 \arrow[r, "\alpha_1"] & A\otimes A \arrow[r, "\varepsilon"] & A \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & {}_vA\otimes A \arrow[r, "\alpha_1^*"] \arrow[u, "s_3"] & ({}_vA\otimes A)^3 \arrow[r, "\alpha_2^*"] \arrow[u, "s_2"] & ({}_vA\otimes A)^3 \arrow[r, "\alpha_3^*"] \arrow[u, "s_1"] & {}_vA\otimes A \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[u, "s_0"] & {}_vA_v \arrow[r] \arrow[u, "\boldsymbol{v}^{-1}"] & 0
\end{tikzcd}$$

图 2　交换图 2

Fig.2　Commutative diagram 2

证明　要证明图 2 中 4 个方块是交换的,只须要证明

$$s_2\alpha_1^*=\alpha_3 s_3, \tag{21}$$

$$s_1\alpha_2^*=\alpha_2 s_2, \tag{22}$$

$$s_0\alpha_3^*=\alpha_1 s_1, \tag{23}$$

$$\boldsymbol{v}^{-1}\varepsilon=\varepsilon s_0 \tag{24}$$

成立。

由于

$$\begin{aligned}
s_2\alpha_1^*(1\otimes1)&=s_2(1\otimes x-x\otimes1,1\otimes y-y\otimes1,1\otimes z-z\otimes1)\\
&=(0,0,1\otimes x)-(0,0,\boldsymbol{v}^{-1}(x)\otimes1)-(0,1\otimes y,0)+(0,\boldsymbol{v}^{-1}(y)\otimes1,0)-(1\otimes z,0,0)+(\boldsymbol{v}^{-1}(z)\otimes1,0,0)\\
&=(z\otimes1-1\otimes z,y\otimes1-1\otimes y,1\otimes x-x\otimes1-f(y)\otimes1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_3 s_3(1\otimes1)&=\alpha_3(1\otimes1)\\
&=(z\otimes1-1\otimes z,y\otimes1-1\otimes y,1\otimes x-x\otimes1-f(y)\otimes1),
\end{aligned}$$

可得 $s_2\alpha_1^*(1\otimes1)=\alpha_3 s_3(1\otimes1)$,故式(21)成立,图 2 中最左边的方块是交换的。

由于

$$\begin{aligned}
s_1\alpha_2^*(1\otimes1,0,0)&=s_1(y\otimes1-1\otimes y,1\otimes z-z\otimes1,0)\\
&=-(0,0,\boldsymbol{v}^{-1}(y)\otimes1)+(0,0,1\otimes y)-(0,1\otimes z,0)+(0,\boldsymbol{v}^{-1}(z)\otimes1,0)\\
&=(0,z\otimes1-1\otimes z,1\otimes y-y\otimes1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_2 s_2(1\otimes1,0,0)&=\alpha_2(0,0,1\otimes1)\\
&=(0,z\otimes1-1\otimes z,1\otimes y-y\otimes1),
\end{aligned}$$

可得 $s_1\alpha_2^*(1\otimes1,0,0)=\alpha_2 s_2(1\otimes1,0,0)$,同理可证 $s_1\alpha_2^*(0,1\otimes1,0)=\alpha_1 s_2(0,1\otimes1,0)$, $s_1\alpha_2^*(0,0,1\otimes1)=\alpha_2 s_2(0,0,1\otimes1)$,故式(22)成立,可知图 2 中左边第 2 个方块是交换的。

同理可证式(23)成立,图 2 中左边第 3 个方块是交换的。

最后,式(24)显然成立,图 2 中最右边的方块是交换的。

定理 3　对任意 A-双模 M,有交换图 3。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_v \arrow[r, "\tilde\alpha_3"] & (M_v)^3 \arrow[r, "\tilde\alpha_2"] & (M_v)^3 \arrow[r, "\tilde\alpha_1"] & M_v \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\tilde\alpha_1^*"] \arrow[u, "\tilde s_3"] & M^3 \arrow[r, "\tilde\alpha_2^*"] \arrow[u, "\tilde s_2"] & M^3 \arrow[r, "\tilde\alpha_3^*"] \arrow[u, "\tilde s_1"] & M \arrow[r] \arrow[u, "\tilde s_0"] & 0
\end{tikzcd}$$

图 3　交换图 3

Fig.3　Commutative diagram 3

图 3 中,$\tilde\alpha_i,\tilde\alpha_i^*,\tilde s_j$ 是由 α_i,α_i^*, $s_j(i=1,2,3;j=0,1,2,3)$诱导得出。若图 3 的 2 个水平行取(上)同调,则 $\tilde s$ 诱导出 Van den Bergh 对偶 $H^i(A,M)\cong H_{3-i}(A,M_v)$。

证明　将函子 $M_v\otimes_{A^e}$-作用于命题 2 的交换图 2,再利用同构

$$\mathrm{Hom}_{A^e}(P,M)\cong M\otimes_{A^e}\mathrm{Hom}_{A^e}(P,A^e)\cong M\otimes_{A^e}P^\vee\cong M_v\otimes_{A^e}{}_vP^\vee,$$

可得定理 3。

参考文献:

[1] VAN DEN BERGH M. A relation between Hochschild homology and cohomology for Gorenstein rings[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1998, 126(5):1345-1348.

[2] BROWN K, HAGAN S, ZHANG J, et al. Connected Hopf algebras and iterated Ore extensions[J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2015, 219(6):2405-2433.

[3] GOODMAN J, KRÄHMER U. Untwisting a twisted Calabi-Yau algebra[J]. Journal of Algebra, 2014, 406:272-289.

[4] LIU Liyu, WANG Shengqiang, WU Quanshui. Twisted Calabi-Yau property of Ore extensions[J]. Journal of Noncommutative Geometry, 2014, 8(2):587-609.

[5] ZHU Can, VAN OYSTAEYEN F, ZHANG Yinhuo. Nakayama automorphisms of double Ore extensions of Koszul regular algebras[J]. Manuscripta Mathematica, 2017, 152:555-584.

[6] SHEN Yuan, ZHOU Guisong, LU Diming. Nakayama automorphisms of twisted tensor products[J]. Journal of Algebra, 2018, 504(2):445-478.

[7] SHEN Yuan, GUO Yang. Nakayama automorphisms of graded Ore extensions of Koszul Artin-Schelter regular algebras[J]. Journal of Algebra, 2021, 579:114-151.

[8] CHAN K, WALTON C, ZHANG J. Hopf actions and Nakayama automorphisms[J]. Journal of Algebra, 2014, 409:26-53.

[9] LÜ Jiafeng, MAO Xuefeng, ZHANG James. Nakayama automorphism and applications[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 2014, 369(4):2425-2460.

[10] LÜ Jiafeng, MAO Xuefeng, ZHANG James. The Nakayama automorphism of a class of graded algebras[J]. Israel Journal of Mathematics, 2015, 219(2):707-725.

[11] LIU Liyu, MA Wen. Nakayama automorphisms of Ore extensions over polynomial algebras[J]. Glasgow Mathematical Journal, 2020, 62(3):518-530.

[12] 马雯. 广义 Weyl 代数上同调的 Batalin-Vilkovisky 结构[D]. 扬州:扬州大学, 2020.
MA Wen. Batalin-Vilkovisky structures on the Hochschild cohomology of generalized Weyl algebras[D]. Yangzhou: Yangzhou University, 2020.

[13] MCCONNELL J C, ROBSON J C. Noncommutative noetherian rings[M]. Chichester: Wiley, 1987.

(编辑:陈丽萍)

(上接第 45 页)

[5] YANG Xueli, CAO Chenchen, ZHANG Chi. New criteria of supersolubility of finite groups[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2023, 53(5):41-45.

[6] GUO W B, SKIBA A N. On Π-permutable subgroups of finite groups[J]. Monatshefte für Mathematik, 2018, 185(3):443-453.

[7] DANIEL G. Finite groups[M]. New York: Chelsea Publishing Company, 1980: 229-230.

[8] 韦华全.子群特性与有限群结构[D]. 广州:中山大学,2006.
WEI Huaquan. Subgroup characteristics and finite group structure[D]. Guangzhou: Sun Yat-sen University, 2006.

(编辑:陈丽萍)