

3-李代数的导子扩张和 Wells 正合列

徐森荣¹, 赵嘉^{2*}

(1.江苏大学数学科学学院, 江苏 镇江 212013; 2.南通大学理学院, 江苏 南通 226019)

摘要:给定一个3-李代数扩张 $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} L \xrightarrow{p} B \rightarrow 0$ 满足 $[A, A, L]_L = 0$, 其中 $i: A \rightarrow L$ 是包含映射。本文建立3-李代数的1-阶闭链、导子对和2-阶上同调群之间联系的 Wells 正合列, 特别地, 当上述扩张可裂时, 证明对应的 Wells 正合列约化为一个短正合列, 并且也是可裂的。

关键词:3-李代数; 扩张; 导子; 上同调; Wells 正合列

中图分类号:O152 **文献标志码:**A

引用格式:徐森荣, 赵嘉. 3-李代数的导子扩张和 Wells 正合列[J]. 山东大学学报(理学版), 2026, 61(4): 56-61, 68.

Derivation extensions and Wells exact sequences of 3-Lie algebras

XU Senrong¹, ZHAO Jia^{2*}

(1. School of Mathematical Sciences, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, Jiangsu, China; 2. School of Sciences, Nantong University, Nantong 226019, Jiangsu, China)

Abstract: Given an extension of 3-Lie algebras of the form $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} L \xrightarrow{p} B \rightarrow 0$ with $[A, A, L]_L = 0$, where $i: A \rightarrow L$ is the inclusion map. In this paper, we establish the Wells exact sequence which relates 1-order cocycles, derivation pairs and the second cohomology groups of 3-Lie algebras. In particular, when the above extension is split, we show that the corresponding Wells exact sequence is reduced to a short exact sequence and is also split.

Key words: 3-Lie algebra; extension; derivation; cohomology; Wells exact sequence

1 引言与预备知识

1985年, Filippov^[1]提出 n -李代数的概念。特别地, 3-李代数, 可追溯到1973年 Nambu^[2]在推广经典 Hamilton 力学时引入的3-元 Poisson 括号, 广泛应用于几何学、力学系统、弦论及 M2-膜理论, 日益受到数学界和物理学界的关注^[3-5]。3-李代数的表示、形变和上同调理论参见文献^[6-8], 在线性算子理论方面, 李代数、3-李代数的罗巴算子和相对罗巴算子研究参见文献^[9-11]。

给定一个群的扩张, 1971年 Wells^[12]研究一对兼容的自同构对可扩张为新的自同构的条件, 并且得到一个建立群的1-阶闭链、自同构群和2-阶上同调群联系的正合列, 现在称为 Wells 正合列。此后, 群、李环、李(超)代数等各种结构上的 Wells 正合列的构造和应用得到进一步研究^[13-16]。最近, Goswami 等^[17]对 Lie-Yamaguti 代数的交换扩张下自同构对可扩张的条件进行研究, 并给出相应的 Wells 正合列。

对于给定的一个3-李代数的扩张 $\varepsilon: 0 \rightarrow A \xrightarrow{i} L \xrightarrow{p} B \rightarrow 0$ 满足 $[A, A, L]_L = 0$ (下文称为强交换扩张), 文献^[18]中证明 ε 是强交换扩张时, 可以诱导出3-李代数的表示并且其不依赖于截面的选取(参见引理3)。基于上述启发, 本文主要考虑3-李代数的强交换扩张下, 满足兼容性的导子对的扩张性质, 并构造相应的

Wells 正合列,并且得到了上述扩张 ε 可裂时相应的 Wells 正合列的性质. 本文所有的向量空间和代数都在特征为零的域 K 上.

定义 1^[1] 3-李代数 $(L, [\cdot, \cdot, \cdot]_L)$ 是由一个向量空间 L 和一个三元线性运算 $[\cdot, \cdot, \cdot]_L: \wedge^3 L \rightarrow L$ 组成的二元组,且满足对 $x, y, z, w, t \in L$ 有如下基本恒等式成立:

$$[x, y, [z, w, t]_L]_L = [[x, y, z]_L, w, t]_L + [z, [x, y, w]_L, t]_L + [z, w, [x, y, t]_L]_L.$$

特别地,若对 $x, y, z \in L$ 有 $[x, y, z]_L = 0$, 则称 3-李代数 L 是交换的.

定义 2^[1] 3-李代数 $(L, [\cdot, \cdot, \cdot]_L)$ 上的一个导子是一个线性映射 $\partial_L: L \rightarrow L$ 满足

$$\partial_L([x, y, z]_L) = [\partial_L(x), y, z]_L + [x, \partial_L(y), z]_L + [x, y, \partial_L(z)]_L, \quad \forall x, y, z \in L.$$

记 $\text{Der}(L)$ 为 3-李代数 L 上所有导子的集合,其关于导子的换位括号作成李代数,称为导子李代数.

注意到,当 L 是交换 3-李代数时, $\text{Der}(L) = \text{End}(L)$.

定义 3^[6] 设 $(L, [\cdot, \cdot, \cdot]_L)$ 是 3-李代数, V 是向量空间,若存在一个双线性映射 $\rho: \wedge^2 L \rightarrow \text{End}(V)$ 满足对 $x, y, z, w \in L$ 有如下两个式子成立:

$$(i) \quad \rho(x, y)\rho(z, w) - \rho(z, w)\rho(x, y) = \rho([x, y, z]_L, w) + \rho(z, [x, y, w]_L);$$

$$(ii) \quad \rho(x, [y, z, w]_L) = \rho(z, w)\rho(x, y) - \rho(y, w)\rho(x, z) + \rho(y, z)\rho(x, w),$$

则称 (V, ρ) 为 3-李代数 L 在向量空间 V 上的表示,简记为 ρ .

3-李代数的上同调参见文献[8]. 设 (V, ρ) 是 3-李代数 L 的表示,定义 L 上面并且系数在 V 中的 p -阶上链空间 $C^p(L, V)$ 为如下多重线性映射的集合:

$$f: \underbrace{\wedge^2 L \otimes \cdots \otimes \wedge^2 L}_{(p-1)} \otimes L \rightarrow V.$$

令 $X_i = x_i \wedge y_i \in \wedge^2 L, z \in L$, 上边缘算子 $d_\rho: C^p(L, V) \rightarrow C^{p+1}(L, V)$ 定义为

$$\begin{aligned} & (d_\rho f)(X_1, \dots, X_p, z) \\ &= \sum_{1 \leq j < k \leq p} (-1)^j f(X_1, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{k-1}, [X_j, X_k]_F, X_{k+1}, \dots, X_p, z) \\ &+ \sum_{j=1}^p (-1)^j f(X_1, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_p, [X_j, z]_L) \\ &+ \sum_{j=1}^p (-1)^{j+1} \rho(X_j) f(X_1, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_p, z) \\ &+ (-1)^{p+1} (\rho(y_p, z) f(X_1, \dots, X_{p-1}, x_p) + \rho(z, x_p) f(X_1, \dots, X_{p-1}, y_p)), \end{aligned} \tag{1}$$

其中, $f \in C^p(L, V), [X_j, X_k]_F = [x_j, y_j, x_k]_L \wedge y_k + x_k \wedge [x_j, y_j, y_k]_L, [X_j, z]_L = [x_j, y_j, z]_L$. 用 $Z^p(L, V)$ 和 $B^p(L, V)$ 分别表示 p -阶闭链和 p -阶上边缘的集合,则 p -阶上同调群为

$$H^p(L, V) = Z^p(L, V) / B^p(L, V).$$

3-李代数的同态、子代数和理想以通常的方式定义^[6]. 假设 (A, ρ) 是 3-李代数 $(B, [\cdot, \cdot, \cdot]_B)$ 的表示,在这种情形下,将向量空间 A 看作交换 3-李代数,因此, $\text{Der}(A) = \text{End}(A)$. 设 $x_i \in B, a_i \in A$, 则 $B \oplus A$ 上的半直积 3-李代数 $B \ltimes_\rho A$ 结构由下式给出^[19]:

$$[x_1 + a_1, x_2 + a_2, x_3 + a_3]_\rho = [x_1, x_2, x_3]_B + \rho(x_1, x_2)a_3 + \rho(x_2, x_3)a_1 + \rho(x_3, x_1)a_2. \tag{2}$$

引理 1 设 $(\partial_B, \partial_A) \in \text{Der}(B) \times \text{Der}(A)$, 则 $(\partial_B, \partial_A) \in \text{Der}(B \ltimes_\rho A)$ 当且仅当

$$\partial_a \circ \rho(x, y) - \rho(x, y) \circ \partial_a = \rho(\partial_b(x), y) + \rho(x, \partial_b(y)), \quad \forall x \in B, a \in A. \tag{3}$$

证明 注意到 $(\partial_B, \partial_A)(x+a) = \partial_B(x) + \partial_A(a), \forall x \in B, a \in A$, 直接验证即得.

令 (A, ρ) 是 3-李代数 B 的表示. 对 $\alpha \in C^2(B, A)$ 和导子对 $(\partial_B, \partial_A) \in \text{Der}(B) \times \text{Der}(A)$, 定义 2-阶上链 $Ob_{(\partial_B, \partial_A)}^\alpha \in C^2(B, A)$ 为

$$\begin{aligned} Ob_{(\partial_B, \partial_A)}^\alpha(x, y, z) &= \partial_A(\alpha(x, y, z)) - \alpha(\partial_B(x), y, z) \\ &\quad - \alpha(x, \partial_B(y), z) - \alpha(x, y, \partial_B(z)), \quad x, y, z \in B; \end{aligned} \tag{4}$$

另一方面,令

$$G_\rho = \{ (\partial_B, \partial_A) \in \text{Der}(B) \times \text{Der}(A) \mid (\partial_B, \partial_A) \text{ 满足式(3)} \}. \tag{5}$$

引理 2^[18] 保持上述记号,则

(i) G_ρ 是 $\text{Der}(B) \times \text{Der}(A)$ 的李子代数。

(ii) 若 α 是 2-阶闭链,则 $Ob_{(\partial_B, \partial_A)}^\alpha$ 也是 2-阶闭链。

(iii) $\Phi: G_\rho \rightarrow \mathfrak{gl}(H^2(B, A))$ 是李代数 G_ρ 在 $H^2(B, A)$ 上的表示,其定义为

$$\Phi(\partial_B, \partial_A)([\alpha]) = [Ob_{(\partial_B, \partial_A)}^\alpha], \quad \forall (\partial_B, \partial_A) \in G_\rho, \quad \alpha \in Z^2(B, A).$$

令 $(A, [\cdot, \cdot, \cdot]_A), (B, [\cdot, \cdot, \cdot]_B)$ 是 3-李代数,则 B 通过 A 的扩张是一个 3-李代数的短正合列

$$\varepsilon: 0 \rightarrow A \xrightarrow{i} L \xrightarrow{p} B \rightarrow 0,$$

这里映射 i, p 是 3-李代数同态。如果 A 是交换的,则称上述扩张为交换扩张。不失一般性,下面总是假设 $i: A \rightarrow L$ 是包含映射。线性映射 $s: B \rightarrow L$ 如果满足 $p \circ s = \text{Id}_B$, 则称 s 为映射 p 的截面。特别地,如果截面 s 是 3-李代数同态,则称上述扩张 ε 是可裂的。

令 $\varepsilon: 0 \rightarrow A \xrightarrow{i} L \xrightarrow{p} B \rightarrow 0$ 是一个 3-李代数的扩张,一对导子 $(\partial_B, \partial_A) \in \text{Der}(B) \times \text{Der}(A)$ 称为可扩张的,如果存在导子 $\partial_L \in \text{Der}(L)$ 使得 $\partial_L \circ i = i \circ \partial_A, \partial_B \circ p = p \circ \partial_L$, 即有交换图

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & L & \xrightarrow{p} & B \longrightarrow 0 \\ & & \partial_A \downarrow & & \partial_L \downarrow & & \partial_B \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & L & \xrightarrow{p} & B \longrightarrow 0. \end{array} \quad (6)$$

对于上述扩张 ε , 固定映射 p 的截面 $s: B \rightarrow L$, 注意到 $L = s(B) \oplus A$, 且 L 和 $B \oplus A$ 作为向量空间同构,其映射由 $s(x) + a \mapsto x + a, x \in B, a \in A$ 给出,分别定义线性映射 $\rho: \wedge^2 B \rightarrow A, \omega: \wedge^3 B \rightarrow A$ 如下:

$$\rho(x, y)(a) = [s(x), s(y), a]_L, \quad \forall x, y \in B, a \in A; \quad (7)$$

$$\omega(x, y, z) = [s(x), s(y), s(z)]_L - s([x, y, z]_B), \quad \forall x, y, z \in B. \quad (8)$$

如果 3-李代数的扩张 $\varepsilon: 0 \rightarrow A \xrightarrow{i} L \xrightarrow{p} B \rightarrow 0$ 满足 $[A, A, L]_L = 0$, 即对 $a, b \in A, x \in L$ 有 $[a, b, x]_L = 0$, 则称上述扩张 ε 是 3-李代数 B 通过 A 的强交换扩张。显然,此时 A 是交换的,因此,强交换扩张一定是交换扩张,下面我们总是假设扩张 $\varepsilon: 0 \rightarrow A \xrightarrow{i} L \xrightarrow{p} B \rightarrow 0$ 是强交换的。

引理 3^[18,20] 设 $\varepsilon: 0 \rightarrow A \xrightarrow{i} L \xrightarrow{p} B \rightarrow 0$ 是一个 3-李代数的强交换扩张,则

(i) (A, ρ) 是 3-李代数 $(B, [\cdot, \cdot, \cdot]_B)$ 的一个表示,且不依赖于截面的选取。

(ii) ω 是关于表示 (A, ρ) 的一个 2-阶闭链,且上同调类 $[\omega]$ 不依赖于截面的选取。

在上述强交换扩张 $\varepsilon: 0 \rightarrow A \xrightarrow{i} L \xrightarrow{p} B \rightarrow 0$ 诱导的 3-李代数 B 的表示 (A, ρ) 情形时,应用式(4)和引理 3,则可得以下结果。

推论 1^[18] $Ob_{(\partial_B, \partial_A)}^\omega$ 是 2-阶闭链,且二阶上同调类 $[Ob_{(\partial_B, \partial_A)}^\omega]$ 不依赖于截面的选取。

引理 4^[18] 设 $\varepsilon: 0 \rightarrow A \xrightarrow{i} L \xrightarrow{p} B \rightarrow 0$ 是 3-李代数的强交换扩张,令 $(\partial_B, \partial_A) \in G_\rho$, 则 (∂_B, ∂_A) 是可扩张的当且仅当 2-阶上同调类 $[Ob_{(\partial_B, \partial_A)}^\omega]$ 是平凡的。

2 主要结论

设 $\varepsilon: 0 \rightarrow A \xrightarrow{i} L \xrightarrow{p} B \rightarrow 0$ 是 3-李代数 B 通过 A 的强交换扩张,固定映射 p 的截面 s ,由引理 3, (A, ρ) 是 3-李代数 $(B, [\cdot, \cdot, \cdot]_B)$ 的表示。将 A 看作交换 3-李代数,则 $\text{Der}(A) = \text{End}(A)$ 。

令 $\text{Der}_A(L) = \{\partial_L \in \text{Der}(L) \mid \partial_L(A) \subseteq A\}$, 则 $\text{Der}_A(L)$ 是 $\text{Der}(L)$ 的李子代数。对 $\partial_L \in \text{Der}_A(L)$, 分别定义两个线性映射 $\bar{\partial}_L \in \text{End}(B)$ 和 $\partial_L|_A \in \text{Der}(A)$ 如下:

$$\bar{\partial}_L(x) = p(\partial_L(s(x))), \quad x \in B, \quad \partial_L|_A(a) = \partial_L(a), \quad a \in A.$$

引理 5 对 $\partial_L \in \text{Der}_A(L)$, 有 $\bar{\partial}_L \in \text{Der}(B)$, 且 $\bar{\partial}_L$ 不依赖于截面的选取。

证明 设 s, s' 是 p 的两个截面,令 $\bar{\partial}_L = p \circ \partial_L \circ s, \bar{\partial}'_L = p \circ \partial_L \circ s'$ 。对 $x \in B, p(s(x) - s'(x)) = 0$, 因此 $s(x) - s'(x) \in \ker p = \text{im } i = A$, 得到 $\partial_L(s(x) - s'(x)) \in A$ 。由

$$(\bar{\partial}_L - \bar{\partial}'_L)(x) = p(\partial_L(s(x))) - p(\partial_L(s'(x))) = p(\partial_L(s(x) - s'(x))) = 0$$

可知, $\bar{\partial}_L$ 不依赖于截面的选取。另一方面, 令 $x, y, z \in B$, 利用 $p \circ s = \text{Id}_B$, 由式(8)得到

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_L([x, y, z]_B) &= p(\partial_L(s([x, y, z]_B))) = p(\partial_L([s(x), s(y), s(z)]_L - \omega(x, y, z))) \\ &= p([\partial_L(s(x)), s(y), s(z)]_L + [x, \partial_L(s(y)), s(z)]_L + [x, y, \partial_L(s(z))]_L) \\ &= [\bar{\partial}_L(x), y, z]_L + [x, \bar{\partial}_L(y), z]_L + [x, y, \bar{\partial}_L(z)]_L \text{ (由于 } p \text{ 是 3-李代数同态),} \end{aligned}$$

因此 $\bar{\partial}_L \in \text{Der}(B)$, 证毕。

由引理 5 可知, 存在如下线性映射 $\Theta: \text{Der}_A(L) \rightarrow \text{Der}(B) \times \text{Der}(A)$, 其定义为

$$\Theta(\partial_L) = (\bar{\partial}_L, \partial_L|_A), \tag{9}$$

注意到 Θ 不依赖于截面的选取。

引理 6 (i) 若 $(\partial_B, \partial_A) \in \text{im } \Theta$, 则 (∂_B, ∂_A) 是可扩张的。

(ii) 若 $(\partial_B, \partial_A) \in \text{Der}(B) \times \text{Der}(A)$ 是可扩张的, 则 $(\partial_B, \partial_A) \in G_\rho$ 。

证明 先证 (i)。设 $\Theta(\partial_L) = (\partial_B, \partial_A)$, 这里 $\partial_L \in \text{Der}_A(L)$ 。由式(6), 只需证

$$\partial_L \circ i = i \circ \partial_A, \quad \partial_B \circ p = p \circ \partial_L$$

根据 Θ 定义, $\bar{\partial}_L = \partial_B, \partial_L|_A = \partial_A$, 因此, $\partial_L \circ i = i \circ \partial_A$ 。另一方面,

$$(\partial_B \circ p)(s(x) + a) = \partial_B(x) = \bar{\partial}_L(x) = (p \circ \partial_L)(s(x) + a), \quad \forall x \in B, a \in A,$$

于是 $\partial_B \circ p = p \circ \partial_L$, 从而 (∂_B, ∂_A) 是可扩张的。

下面证 (ii)。回顾 G_ρ 定义式(5), 只需证

$$\partial_A \circ \rho(x, y) - \rho(x, y) \circ \partial_A = \rho(\partial_B(x), y) + \rho(x, \partial_B(y)), \quad \forall x, y \in B. \tag{10}$$

由于 (∂_B, ∂_A) 是可扩张的, 因此存在 $\partial_L \in \text{Der}(L)$ 使得 $\partial_L \circ i = i \circ \partial_A, \partial_B \circ p = p \circ \partial_L$ 。对 $x \in B$, 由于 $p(\partial_L(s(x)) - s(\partial_B(x))) = \partial_B(x) - \partial_B(x) = 0$, 因此可以定义线性映射 $\lambda: B \rightarrow A$ 为

$$\lambda(x) = \partial_L(s(x)) - s(\partial_B(x)), \quad \forall x \in B. \tag{11}$$

于是, 对 $x, y \in B, a \in A$, 有

$$\begin{aligned} (\partial_A \circ \rho(x, y) - \rho(x, y) \circ \partial_A)(a) &= \partial_A([s(x), s(y), a]_L) - [s(x), s(y), \partial_A(a)]_L \\ &= \partial_L([s(x), s(y), a]_L) - [s(x), s(y), \partial_A(a)]_L \\ &= [\partial_L(s(x)), s(y), a]_L + [s(x), \partial_L(s(y)), a]_L + [s(x), s(y), \partial_A(a)]_L - [s(x), s(y), \partial_A(a)]_L \\ &= [s(\partial_B(x)) + \lambda(x), s(y), a]_L + [s(x), s(\partial_B(y)) + \lambda(y), a]_L \\ &= [s(\partial_B(x)), s(y), a]_L + [s(x), s(\partial_B(y)), a]_L = (\rho(\partial_B(x), y) + \rho(x, \partial_B(y)))(a), \end{aligned}$$

结论成立。

由上述引理可知, $\text{im } \Theta \subseteq G_\rho$, 因此, Θ 是一个从 $\text{Der}_A(L)$ 到 G_ρ 的线性映射。

命题 1 $\Theta: \text{Der}_A(L) \rightarrow G_\rho$ 是李代数同态。

证明 只需证明 $\Theta([\partial_L, \partial'_L]) = [\Theta(\partial_L), \Theta(\partial'_L)], \forall \partial_L, \partial'_L \in \text{Der}_A(L)$ 。令 $\Theta(\partial_L) = (\partial_B, \partial_A), \Theta(\partial'_L) = (\partial'_B, \partial'_A)$, 因此, $[\partial_L, \partial'_L]|_A = \partial_L|_A \circ \partial'_L|_A - \partial'_L|_A \circ \partial_L|_A = [\partial_A, \partial'_A]$ 。另一方面, 由式(11), 对 $x \in B$, 分别定义线性映射 $\lambda, \lambda': B \rightarrow A$ 使得 $\lambda(x) = \partial_L(s(x)) - s(\partial_B(x)), \lambda'(x) = \partial'_L(s(x)) - s(\partial'_B(x))$, 则

$$\begin{aligned} \overline{[\partial_L, \partial'_L]}(x) &= p([\partial_L, \partial'_L])(s(x)) = p(\partial_L \circ \partial'_L - \partial'_L \circ \partial_L)(s(x)) \\ &= p(\partial_L(s(\partial'_B(x)) + \lambda'(x)) - \partial'_L(s(\partial_B(x)) + \lambda(x))) \\ &= \partial_B(\partial'_B(x)) + p(\partial_A(\lambda'(x))) - \partial'_B(\partial_B(x)) - p(\partial'_A(\lambda(x))) \\ &= (\partial_B \circ \partial'_B - \partial'_B \circ \partial_B)(x) = [\partial_B, \partial'_B](x), \end{aligned}$$

于是, 有

$$\Theta([\partial_L, \partial'_L]) = (\overline{[\partial_L, \partial'_L]}, [\partial_L, \partial'_L]|_A) = ([\partial_B, \partial'_B], [\partial_A, \partial'_A]) = [\Theta(\partial_L), \Theta(\partial'_L)],$$

结论得证。

回顾引理 3, 强交换扩张 $\varepsilon: 0 \rightarrow A \xrightarrow{i} L \xrightarrow{p} B \rightarrow 0$ 给出了 3-李代数 B 的表示 (A, ρ) 及相应的上同调。进一步地, 下面用映射 Θ 来刻画 1-阶闭链。

命题 2 作为向量空间同构,有 $\ker \Theta \cong Z^1(B, A)$ 。

证明 对于 $\partial_L \in \ker \Theta$, 有 $\bar{\partial}_L(x) = p(\partial_L(s(x))) = 0, x \in B$, 于是存在线性映射 $f \in C^1(B, A)$, 其定义为 $f(x) = \partial_L(s(x)), x \in B$ 。因为 $\partial_L|_A = 0$, 所以 f 不依赖于截面的选取。令 $X = x \wedge y \in \wedge^2 B, z \in B$ 。由式(1)和式(8), 直接计算可得

$$\begin{aligned} (d_\rho f)(X, z) &= -f([x, y, z]_B) + \rho(x, y)f(z) + \rho(y, z)f(x) + \rho(z, x)f(y) \\ &= -\partial_L(s([x, y, z]_B)) + \rho(x, y)f(z) + \rho(y, z)f(x) + \rho(z, x)f(y) \\ &= -\partial_L([s(x), s(y), s(z)]_L - \omega(x, y, z)) + \rho(x, y)f(z) + \rho(y, z)f(x) + \rho(z, x)f(y) \\ &= -[\partial_L(s(x)), s(y), s(z)]_L - [s(x), \partial_L(s(y)), s(z)]_L - [s(x), s(y), \partial_L(s(z))]_L \\ &\quad + [s(x), s(y), f(z)]_L + [s(y), s(z), f(x)]_L + [s(z), s(x), f(y)]_L = 0, \end{aligned}$$

这表明 $f \in Z^1(B, A)$, 得到如下线性映射 $\psi: \ker \Theta \rightarrow Z^1(B, A)$, $\psi(\partial_L) = \partial_L \circ s, \partial_L \in \ker \Theta$ 。另一方面, 若 $\psi(\partial_L) = 0$, 即 $\partial_L \circ s = 0$, 因为 $\partial_L \in \ker \Theta$, 所以 $\partial_L|_A = 0$, 有

$$\partial_L(s(x) + a) = \partial_L(s(x)) + \partial_L(a) = 0, \quad \forall x \in B, a \in A,$$

可知 ψ 是单射。对 $f \in Z^1(B, A)$, 定义 $\partial_L \in \text{End}(L)$ 为 $\partial_L(s(x) + a) = f(x), \forall x \in B, a \in A$ 。注意到 ∂_L 不依赖于截面的选取, 令 $x, y, z \in B, a, b, c \in A$, 于是

$$\begin{aligned} &\partial_L([s(x) + a, s(y) + b, s(z) + c]_L) \\ &= \partial_L([s(x), s(y), s(z)]_L + \rho(x, y)(c) + \rho(y, z)(a) + \rho(z, x)(b)) \\ &= \partial_L(s([x, y, z]_B) + \omega(x, y, z) + \rho(x, y)(c) + \rho(y, z)(a) + \rho(z, x)(b)) \\ &= f([x, y, z]_B) = \rho(y, z)f(x) + \rho(z, x)f(y) + \rho(x, y)f(z) \\ &= [\partial_L(s(x) + a), s(y) + b, s(z) + c]_L + [s(x) + a, \partial_L(s(y) + b), s(z) + c]_L \\ &\quad + [s(x) + a, s(y) + b, \partial_L(s(z) + c)]_L, \end{aligned}$$

可知 $\partial_L \in \text{Der}_A(L)$ 。因为 $\partial_L|_A = 0$, 且 $\bar{\partial}_L(x) = p(\partial_L(s(x))) = p(f(x)) = 0, x \in B$, 所以 $\partial_L \in \ker \Theta$ 。根据 ψ 和 ∂_L 定义, 有 $\psi(\partial_L)(x) = \partial_L(s(x)) = f(x)$, 可知 ψ 是满射。证毕。

根据引理 2 和推论 1, 定义映射 $\tilde{\omega}: G_\rho \rightarrow H^2(B, A)$ (称为 Wells 映射) 如下:

$$\tilde{\omega}(\partial_B, \partial_A) = [Ob_{(\partial_B, \partial_A)}^\omega], \quad \forall (\partial_B, \partial_A) \in G_\rho. \quad (12)$$

命题 3 $\text{im } \Theta = \ker \tilde{\omega}$ 。

证明 设 $(\partial_B, \partial_A) \in \text{im } \Theta$, 令 $\Theta(\partial_L) = (\partial_B, \partial_A)$, 其中 $\partial_L \in \text{Der}_A(L)$ 。由命题 6, $(\partial_B, \partial_A) \in G_\rho$ 并且是可扩张的, 由引理 4 可知

$$\tilde{\omega}(\partial_B, \partial_A) = [Ob_{(\partial_B, \partial_A)}^\omega] = 0,$$

从而 $\text{im } \Theta \subseteq \ker \tilde{\omega}$ 。另一方面, 设 $(\partial_B, \partial_A) \in \ker \tilde{\omega}$, 由式(12)知 $[Ob_{(\partial_B, \partial_A)}^\omega] = 0$, 存在 $f \in C^1(B, A)$ 使得 $Ob_{(\partial_B, \partial_A)}^\omega = d_\rho f$ 。定义 $\partial_L: L \rightarrow L$ 为

$$\partial_L(s(x) + a) = s(\partial_B(x)) + f(x) + \partial_A(a), \quad \forall x \in B, a \in A,$$

于是 $\partial_L(A) \subseteq A$ 。类似于命题 2 证明, 可知 $\partial_L \in \text{Der}(L)$, 于是 $\partial_L \in \text{Der}_A(L)$ 。又 $\Theta(\partial_L) = (\bar{\partial}_L, \partial_L|_A)$, 所以

$$\bar{\partial}_L(x) = p(\partial_L(s(x))) = \partial_B(x), \quad \partial_L|_A(a) = \partial_A(a), \quad \forall x \in B, a \in A,$$

因此 $\Theta(\partial_L) = (\partial_B, \partial_A)$, 即, $(\partial_B, \partial_A) \in \text{im } \Theta$, 从而 $\ker \tilde{\omega} \subseteq \text{im } \Theta$ 。证毕。

由命题 1—3, 得到如下关于 3-李代数导子扩张的正合列的结果。

定理 4 设 $\varepsilon: 0 \rightarrow A \xrightarrow{i} L \xrightarrow{p} B \rightarrow 0$ 是一个 3-李代数的强交换扩张, 则序列

$$0 \rightarrow Z^1(B, A) \rightarrow \text{Der}_A(L) \xrightarrow{\Theta} G_\rho \xrightarrow{\tilde{\omega}} H^2(B, A) \quad (13)$$

是正合的, 称为 Wells 正合列。

注意到, 类似于群和李代数的情形, 上述 3-李代数强交换扩张中的 Wells 映射 $\tilde{\omega}$ 只是集合上的映射。下面我们考虑 Wells 正合列的应用。首先我们给出 $\text{im } \Theta = G_\rho$ 的一个充分条件。

命题 4 设 3-李代数的强交换扩张 $\varepsilon: 0 \rightarrow A \xrightarrow{i} L \xrightarrow{p} B \rightarrow 0$ 是可裂的, 则 $\text{im } \Theta = G_\rho$ 。

证明 由式(13), 只需证 Wells 映射 $\tilde{\omega}$ 是零映射。设 $(\partial_B, \partial_A) \in G_\rho$, 因为强交换扩张 ε 可裂, 所以存在

截面 $s_0: B \rightarrow L$ 是 3-李代数同态,且关于这个截面 s_0 由式(8)定义的 $\omega_0 = 0$ 。由推论 1, $[Ob_{(\partial_B, \partial_A)}^{s_0}]$ 不依赖于截面的选取,于是 $\bar{\omega}(\partial_B, \partial_A) = [Ob_{(\partial_B, \partial_A)}^{s_0}] = 0$, 结论得证。

由命题 5 可知,对于上述可裂的强交换扩张 ε , Wells 正合列式(13)约化为如下的短正合列:

$$0 \rightarrow Z^1(B, A) \rightarrow \text{Der}_A(L) \xrightarrow{\theta} G_\rho \rightarrow 0.$$

推论 2 设 3-李代数的强交换扩张 $\varepsilon: 0 \rightarrow A \xrightarrow{i} L \xrightarrow{p} B \rightarrow 0$ 是可裂的,则短正合列 $0 \rightarrow Z^1(B, A) \rightarrow \text{Der}_A(L) \xrightarrow{\theta} G_\rho \rightarrow 0$ 也是可裂的。

证明 由于 ε 可裂,取 p 的截面 $s_0: B \rightarrow L$ 满足是 3-李代数同态。任取 $(\partial_B, \partial_A) \in G_\rho$, 定义 $\partial_L: L \rightarrow L$ 为 $\partial_L(s_0(x) + a) = s_0(\partial_B(x)) + \partial_A(a)$, $\forall x \in B, a \in A$ 。类似于命题 2 证明,可知 $\partial_L \in \text{Der}_A(L)$, 定义 $\Psi: G_\rho \rightarrow \text{Der}_A(L)$ 为 $\Psi(\partial_B, \partial_A) = \partial_L$, 对 $(\partial_B, \partial_A) \in G_\rho$, 由式(9), $\Theta(\partial_L) = (\bar{\partial}_L, \partial_L|_A)$ 且 $\bar{\partial}_L$ 不依赖于截面的选取,于是 $(\Theta \circ \Psi)(\partial_B, \partial_A) = \Theta(\partial_L) = (\bar{\partial}_L, \partial_L|_A) = (\partial_B, \partial_A)$, 即 $\Theta \circ \Psi = \text{Id}_{G_\rho}$ 。

下面只需证 Ψ 是李代数同态。对 $(\partial_B, \partial_A), (\partial'_B, \partial'_A) \in G_\rho, x \in B, a \in A$, 有

$$\begin{aligned} & [\Psi(\partial_B, \partial_A), \Psi(\partial'_B, \partial'_A)](s_0(x) + a) \\ &= \Psi(\partial_B, \partial_A)\Psi(\partial'_B, \partial'_A)(s_0(x) + a) - \Psi(\partial'_B, \partial'_A)\Psi(\partial_B, \partial_A)(s_0(x) + a) \\ &= \Psi(\partial_B, \partial_A)(s_0(\partial'_B(x)) + \partial'_A(a)) - \Psi(\partial'_B, \partial'_A)(s_0(\partial_B(x)) + \partial_A(a)) \\ &= s_0((\partial_B \circ \partial'_B)(x)) + (\partial_A \circ \partial'_A)(a) - s_0((\partial'_B \circ \partial_B)(x)) - (\partial'_A \circ \partial_A)(a) \\ &= \Psi(\partial_B \circ \partial'_B - \partial'_B \circ \partial_B, \partial_A \circ \partial'_A - \partial'_A \circ \partial_A)(s_0(x) + a) \\ &= \Psi([\partial_B, \partial'_B], [\partial_A, \partial'_A])(s_0(x) + a), \end{aligned}$$

因此 $[\Psi(\partial_B, \partial_A), \Psi(\partial'_B, \partial'_A)] = \Psi([\partial_B, \partial'_B], [\partial_A, \partial'_A])$, 结论成立。

参考文献:

[1] FILIPPOV V T. n -Lie algebras[J]. Siberian Mathematical Journal, 1985, 26(6):879-891.
 [2] NAMBU Y. Generalized Hamiltonian dynamics[J]. Physical Review D, 1973, 7:2405-2412.
 [3] CHERKIS S, SÄMANN C. Multiple M2-branes and generalized 3-Lie algebras[J]. Physical Review D, 2008, 78(6):1-11.
 [4] DE MEDEIROS P, FIGUEROA-O'FARRILL J, MÉNDEZ-ESCOBAR E, et al. On the Lie-algebraic origin of metric 3-algebras[J]. Communications in Mathematical Physics, 2009, 290(3):871-902.
 [5] SHENG Yunhe, TANG Rong. Symplectic, product and complex structures on 3-Lie algebras[J]. Journal of Algebra, 2018, 508:256-300.
 [6] KASYMOV S M. On a theory of n -Lie algebras[J]. Algebra and logic, 1987, 26(3):155-166.
 [7] FIGUEROA-O'FARRILL J. Deformations of 3-algebras[J]. Journal of Mathematical Physics, 2009, 50(11):1-27.
 [8] TAKHTAJAN L. Higher order analog of Chevalley-Eilenberg complex and deformation theory of n -gebras[J]. St Petersburg Mathematical Journal, 1995, 6(2):429-438.
 [9] TANG Rong, BAI Chengming, GUO Li, et al. Deformations and their controlling cohomologies of \mathcal{O} -operators[J]. Communications in Mathematical Physics, 2019, 368(2):665-700.
 [10] 白瑞蒲,刘培. 3-李代数 T 的齐性 Rota-Baxter 算子[J]. 山东大学学报(理学版), 2021, 56(8):61-66.
 BAI Ruipu, LIU Pei. Homogeneous Rota-Baxter operators of 3-Lie algebra T [J]. Journal of Shandong University(Natural Science), 2021, 56(8):61-66.
 [11] 徐森荣,谭易兰,赵嘉. 相对罗巴算子的拟迹函数方法和上同调[J]. 吉林大学学报(理学版), 2023, 61(6):1313-1318.
 XU Senrong, TAN Yilan, ZHAO Jia. Quasi-trace function method and cohomology of relative Rota-Baxter operators[J]. Journal of Jilin University(Science Edition), 2023, 61(6):1313-1318.
 [12] WELLS C. Automorphisms of group extensions[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1971, 155:189-194.
 [13] JIN Ping, LIU Heguo. The Wells exact sequence for the automorphism group of a group extension[J]. Journal of Algebra, 2010, 324(6):1219-1228.
 [14] JAMALI A R. The Wells exact sequence for the automorphism group of a Lie ring extension[J]. Journal of Algebra and Its Applications, 2019, 18(3):1-15.