

新型箱式集成房顶框组件力学性能研究

陈志华^{1,2}, 刘雪杰^{1,3}, 刘佳迪^{2*}, 孙鹏⁴, 红涛⁴

(1. 天津城建大学 土木工程学院, 天津 300384; 2. 天津大学 建筑工程学院, 天津 300072;
3. 天津城建大学 天津市土木建筑结构防护与加固重点实验室, 天津 300384;
4. 诚栋集成房屋河北有限公司, 河北 唐山 063399)

摘要: 文中阐述了一种由预制轻钢构件与螺栓连接而成的新型箱式集成房顶框组件, 为研究其受力性能, 对该组件进行了足尺承载力试验, 分析了在各级荷载作用下顶框组件位移和应变的变化规律, 还研究了该组件的传力机理及破坏模式。试验结果表明: 新型箱式集成房顶框组件具有较好的承载能力; 试件的破坏模式主要表现为: 长边主梁发生弯扭变形的同时, 短边次梁发生屈曲破坏; 之后, 采用ABAQUS有限元软件建立了该组件的有限元计算模型, 对比了各关键位置的荷载-位移曲线, 且有限元模型计算结果与试验结果吻合较好。基于验证后的有限元模型, 对长边主梁、短边次梁截面厚度、短边次梁间距、钢材强度以及主次梁节点连接形式等影响因素进行了参数分析, 以揭示各因素对结构整体力学性能的影响规律。结果表明: 增加长边主梁与短边次梁截面厚度、减小短边次梁间距、提高短边次梁钢材强度、优化主次梁节点连接形式等方式均可以提高顶框组件的承载能力。

关键词: 箱式集成房; 顶框组件; 螺栓连接; 承载力试验; 破坏模式; 有限元分析; 参数分析

中图分类号: TU311

文献标志码: A

文章编号: 1671-9379(2026)01-0105-14

DOI: 10.13969/j.jzgjgz.20240820001

Mechanical Properties of Roof Frame Assembly for New Container Assembling House

CHEN Zhihua^{1,2}, LIU Xuejie^{1,3}, LIU Jiadi^{2*}, SUN Peng⁴, HONG Tao⁴

(1. College of Civil Engineering, Tianjin Chengjian University, Tianjin 300384, China; 2. College of Civil Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China; 3. Tianjin Key Laboratory of Civil Structure Protection and Reinforcement, Tianjin Chengjian University, Tianjin 300384, China; 4. Chengdong Integrated Housing Hebei Co.Ltd., Tangshan 063399, China)

*Corresponding author: jdliu@tju.edu.cn

Abstract: This paper describes a new type of container assembling house roof frame assembly made of prefabricated lightweight steel components connected with bolts. In order to study its structural performance, a full-scale bearing capacity test was carried out on the assembly, the change rule of displacement and strain under different loading levels was analyzed, and the mechanism of force transmission and failure modes were investigated. The test results show that the roof frame assembly of the new container assembling house has a high load-bearing capacity. The failure mode of the tested specimen is mainly manifested as follows: while the main beam on the long side undergoes bending and torsion deformation, the secondary beam on the short side undergoes buckling damage. Using ABAQUS finite

收稿日期: 2024-08-20

基金项目: 国家自然科学基金(52008292)

作者简介:

陈志华(1966—), 男, 博士, 教授, 主要从事钢结构、空间结构与组合结构方面的研究。E-mail: zhchen@tju.edu.cn。

通信作者:

刘佳迪(1986—), 男, 博士, 副教授, 主要从事钢结构模块建筑方面的研究。E-mail: jdliu@tju.edu.cn。

element software, a finite element model was established to compare the load-displacement curves at each key position, and the finite element model results were consistent with the test results. Based on the verified finite element model, the influencing factors such as the cross-sectional thickness of long-side primary beams and short-side secondary beams, the spacing of short-side secondary beams, the strength of steel, and the joint connection form of primary and secondary beams were parametrically analyzed. The results show that increasing the section thickness of long-side main beams and short-side secondary beams, reducing the spacing of short-side secondary beams, improving the strength of short-side secondary beams, and optimizing the joint connection forms of main and secondary beams can improve the load carrying capacity of the top frame assembly.

Keywords: container assembling house; roof frame assembly; bolted connection; load bearing capacity test; failure mode; finite element analysis; parametric analysis

箱式集成房^[1]作为一种现代化装配式建筑形式,由多种轻钢预制构件组装而成;其设计与构建方式旨在实现建筑的模块化集成、快速组装与可重复利用。这些预制构件通常在工厂内完成设计、制造和组装,然后运输到施工现场进行快速装配。箱式集成房具有装配高速快捷、成本经济可控、绿色低碳环保等优点,适用于临时办公居住、应急救援安置、旅游度假等场景,传统的箱式集成房主要由顶框组件、底框组件、墙板、角柱及围护结构组成,如图1所示。

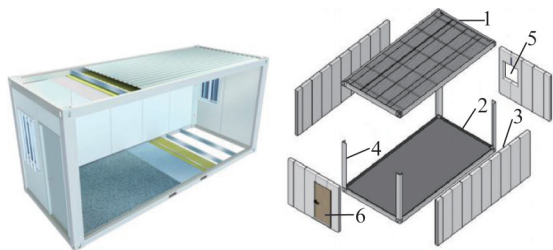


图1 箱式集成房模块及其拆分

Fig. 1 Modular units and splits of container assembling house

注:1—顶框;2—底框;3—侧板;4—角柱;5,6—围护结构

目前广泛应用的箱式集成房顶框组件,通常在工厂内采用标准化预制构件焊接成基本框架,该组件在运输过程中对运输条件的要求尤为严格。为进一步减小箱式集成房顶框组件的运输体积,提升运输装载效率与灵活性,本研究将箱式集成房顶框焊接框架优化为螺栓连接结构形式,如图2所示。

目前,已有的研究成果主要侧重于箱式集成房的整体受力性能和构件连接形式等方面。在箱式集成房整体受力性能研究方面,CHEN等^[2]通过建立理论方程、构建并验证有限元模型,研究了模块之间的连接形式、高宽比等因素对集成房屋整体稳定性的影响。张俊峰等^[3-6]对箱式集成房开展了竖向、侧向加载试验,研究了箱式集成房的抗弯刚度、竖向承载能力和抗侧性能,分析了整体结构在不同荷载下的变化规律和破坏特征。熊伟等^[7]、帅逸群等^[8]以单个集装箱为研究对象,通过数值模拟分析,分别

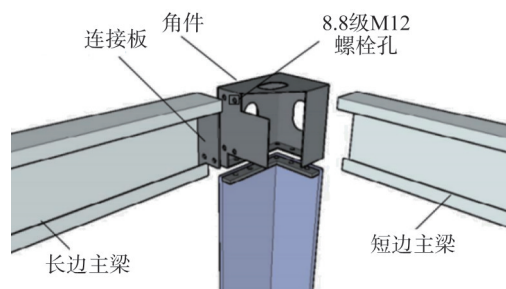


图2 螺栓连接节点

Fig. 2 Bolted connection joints

研究了单个集装箱和多个集装箱组合结构的抗侧刚度和极限承载力,并提出了有关集装箱组合结构的设计原则。查晓雄等^[9]、范坤杰等^[10]、尹静等^[11]通过推导集装箱水平抗侧刚度的计算公式,分析了箱式集成房顶部在水平均布荷载作用下的抗侧刚度及角件处的局部效应。

在构件连接形式方面,LIU等^[12]对集装箱式模块、框架模块与组合模块三种不同形式模块的抗侧刚度进行了比较,研究发现在横向荷载作用下,集装箱式模块具有更高的初始刚度。WANG等^[13]针对箱式集成住宅模块内及模块间连接节点,开展了拟静力试验研究,采用ABAQUS有限元软件,通过试验结果与数值模拟结果的对比验证及刚度分析,提出了连接节点的简化方法。LUO等^[14]基于LS-DYNA的替代荷载路径方法,对参考结构的结构响应进行了模拟分析,揭示了在底角模块拆除后典型建筑的变形特征、荷载再分配机制以及破坏模式。

本文对一种新型箱式集成房顶框组件进行了静力加载试验,并建立了合适的有限元模型,系统研究了主次梁壁厚、次梁间距、钢材强度、主次梁连接方式等参数对顶框组件受力性能的影响。新型箱式集成房不仅弥补了集装箱与轻钢活动房在拆装、运输方面的不足,更在装配、拆卸及运输方面展现出明显优势。

1 试验概述

1.1 试验设计

本次试验采用1:1足尺模型,顶框组件全长6 055 mm,

宽2 990 mm。节点处,角件焊接固定于短边主梁端部,通过M12螺栓与长边主梁连接,构成基本框架;长边主梁内侧焊接次梁连接配件,采用M10螺栓与短边次梁连接;顶框组件按设计要求铺设压型钢板,以便后续施加荷

载。试验时,将顶框组件放置在500 mm高的刚性支座上,如图3所示。顶框各构件截面尺寸如图4所示,其截面的公称几何尺寸和实测尺寸见表1。

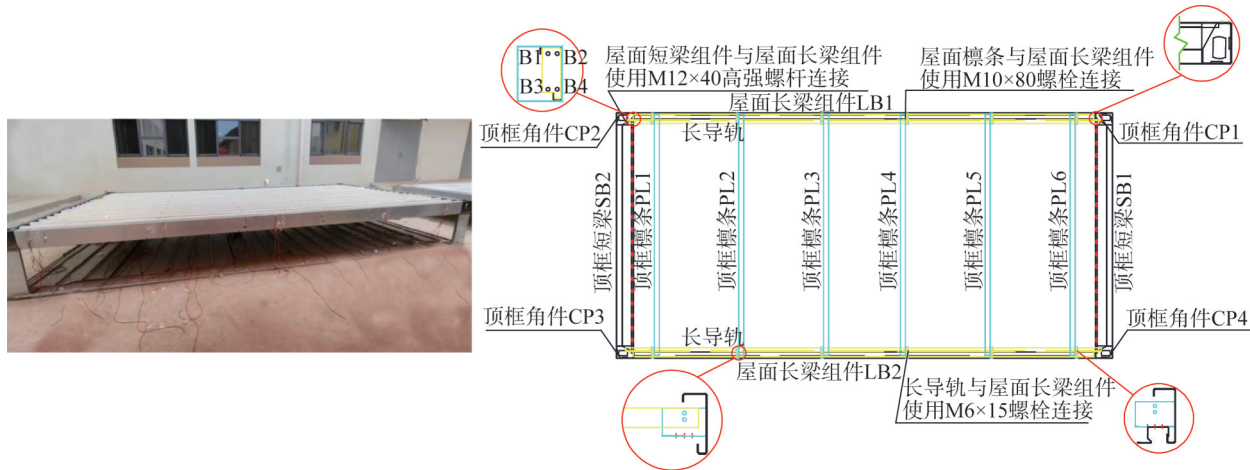


图3 箱式集成房顶框组件

Fig. 3 Roof frame assembly for container assembling house

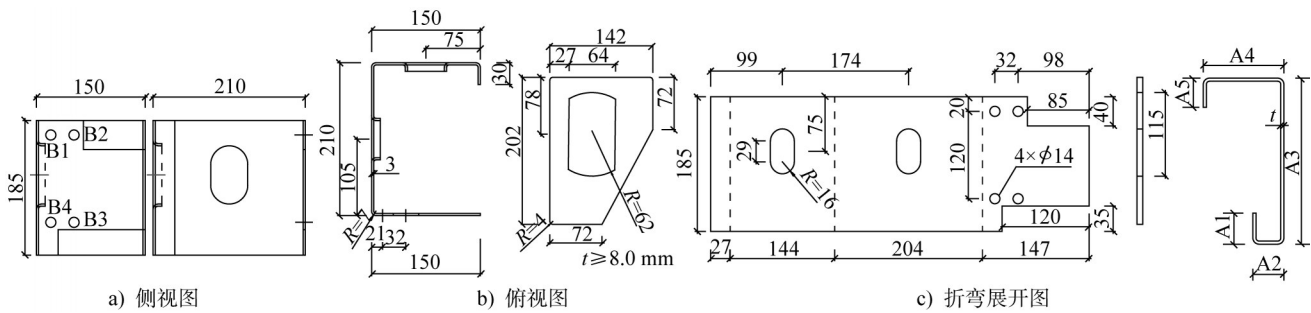


图4 顶框角件、长边主梁截面几何尺寸(单位:mm)

Fig. 4 Geometric dimensions of roof frame connection joints and long-side main beam cross-section (unit:mm)

表1 长边/短边主梁公称与实际尺寸偏差

Table 1 Nominal and actual size deviation of long-side or short-side main beams

| 参数 | 公称尺寸/mm | 实际尺寸/mm | | | |
|----------------|---------|---------|-------|-------|------|
| | | LB1 | LB2 | SB1 | SB2 |
| A ₁ | 30 | 29.8 | 29.9 | 29.6 | 29.4 |
| A ₂ | 30 | 30.1 | 28.7 | 29.9 | 30.1 |
| A ₃ | 185 | 184.5 | 184.8 | 185.4 | 185 |
| A ₄ | 75 | 74.7 | 74.9 | 74.6 | 74.8 |
| A ₅ | 25 | 25.2 | 24.9 | 25.1 | 24.9 |
| t | 3 | 2.92 | 2.89 | 2.96 | 2.95 |

注:冷弯薄壁型钢截面自上而下依次为上卷边A₁、上翼缘A₂、腹板A₃、下翼缘A₄、下卷边A₅;LB1为远端屋面长梁组件;LB2为近端屋面长梁组件;SB1为右边顶框矩梁;SB2为左边顶框矩梁;t为截面厚度。

1.2 试件材料特性

顶框组件材性试验依照《金属材料 拉伸试验 第1部分:室温试验方法》(GB/T 228.1—2021)的规定,分别在顶框各构件相应位置各切取3个试件进行金属拉伸试验,如图5所示。通过对每种试件其3个试件的力学数据求平均后,将试验数据整理如表2所示,其中: f_y 为屈服平台上的最低屈服强度; f_u 为抗拉强度; E_s 为弹性模量; λ 为各试件的平均伸长率。

1.3 测点布置

为测量顶框组件承受竖向荷载时的位移变化,分别在顶框梁的梁端、跨中、1/4截面处及短边次梁跨中位置布置位移计(Y1~Y12),如图6所示。以Y1为起始点,按从左到右、从下到上的顺序依次编号,分别为Y1~Y12。同时,为观察顶框组件在各区域的应力变化情况,分别在顶框梁、角件处设置应变片,编号依次为S1~S47,其中,



图5 金属材料拉伸试验

Fig. 5 Tensile testing of metal properties

顶框梁端是构件受力最大的位置,且跨中及1/4截面处变形明显;分别在上翼缘、下翼缘与腹板截面几何中心位置布置应变片。因角件处应力复杂,主应变方向难以判

表2 顶框各试件材性试验数据

Table 2 Material property test data of roof frame specimens

| 试件编号 | 厚度/mm | f_y /MPa | f_u /MPa | E_s /MPa | 强屈比 f_y/f_u | λ /% |
|------|-------|------------|------------|------------|---------------|--------------|
| LB | 3 | 319 | 395 | 18 7529 | 0.807 | 19.2 |
| SB | 3 | 317 | 390 | 18 4416 | 0.812 | 19.2 |
| PL | 1.5 | 143 | 176 | 19 0472 | 0.812 | 16.1 |
| CP | 3.5 | 320 | 388 | 18 4034 | 0.824 | 18.4 |

注:PL为顶框檩条;CP为顶框角件。

断,故在此处布置应变片。为充分研究顶框各关键部位的受力性能,确定影响顶框承载能力的主要因素,在短边次梁跨中及1/4截面处截面下侧分别布置应变片,如图6所示。

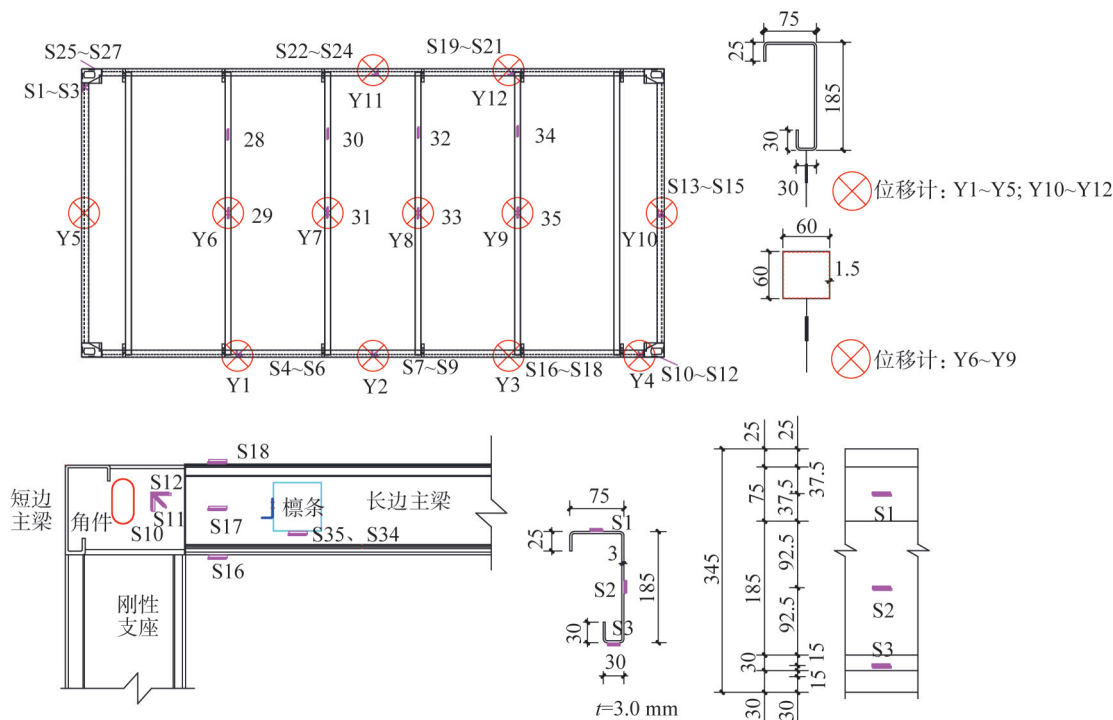


图6 顶框组件位移计、应变片布置(单位:mm)

Fig. 6 Displacement meter and strain gauge arrangement of roof frame assembly (unit: mm)

1.4 加载制度

顶框组件在均布荷载作用下的传力机理为:短边次梁率先承担荷载,经主次梁连接节点将荷载传至基本框架。为此,本次试验将顶框组件划分为18个区格,在各区格处对称布置铅块,均布施加荷载(本试验用以加载的铅块规格为25 kg),如图7所示。

正式加载前需对顶框组件进行预加载处理,预加载值设定为ABAQUS模拟极限荷载的5%左右,以确保试

件各部分接触良好;待组件进入正常工作状态,随后检查位移计、应变片是否均工作正常;确保预加载卸载后,将各通道进行清零处理,开始正式加载,正式加载时每级荷载设定为 $0.28 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-2}$,每次加载后静置3~5 min,直至试件发生破坏,停止试验。

1.5 破坏判断标准

针对箱式集成房顶框,参照《钢结构设计标准》(GB 50017—2017)^[15]中的相关规定,将顶框构件挠度超出规

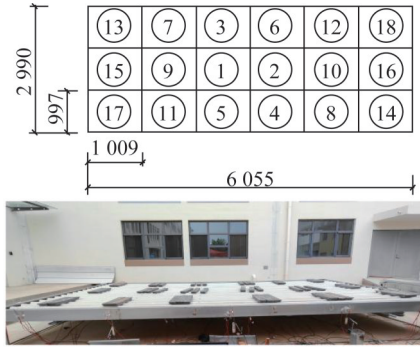


图7 试验加载(单位:mm)
Fig. 7 Test loading (unit:mm)

范限定值,作为判断其是否达到正常使用极限状态的标准。在此基础上,继续加载至试件发生破坏,将顶框各构件应力超过其材料屈服强度、长边主梁发生较大屈曲变形、长边主梁与角件连接节点发生破坏这三类情形,作为判断其是否达到承载能力极限状态的依据。

2 试验现象及分析

2.1 试验现象

试件在加载初期位移增加缓慢,长边主梁发生扭转变形并伴随着水平与竖向变形,三种变形均在跨中位置表现最为显著,如图8a)所示。当加载至 $0.83 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-2}$ 时,次梁配件端部连接处存在轻微压弯变形,其跨中相对挠度为 16.1 mm ,为 $L/180$ (L 为跨度)。在均布荷载加载过程中长边主梁跨中截面的弯矩-转角曲线图8b)所示。

当荷载增加至 $1.52 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-2}$ 时,在荷载保持不变的情

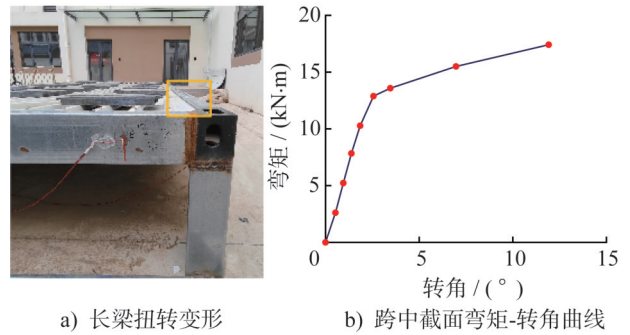


图8 长边主梁扭转变形及弯矩-转角曲线

Fig. 8 Torsional deformation and moment-rotation curves of long-side main beams

况下,短边次梁PL3跨中位置的荷载-位移曲线斜率明显增大,由此判断短边次梁率先屈服,试件已进入塑性变形阶段。在节点处,角件CP1与长边主梁LB1端部连接处发生扭转分离变形,如图9a)所示。此时,长边主梁LB1跨中扭转角增加至 3.46° ,如图10所示;跨中位置处相对挠度为 14.9 mm ,为的 $L/400$ 。加载至 $1.72 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-2}$ 时,短边次梁PL3端部连接处存在明显的压弯变形,如图9b)所示;同时,长边主梁LB1扭转角不断增加至 6.97° 并呈现出明显的非线性增长趋势,如图9c)所示。当荷载增大到 $1.86 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-2}$ 时,长边主梁LB1与角件CP1的张角逐渐扩大,螺栓部分被拔出,如图9d)所示,角件CP1与长边主梁LB1连接节点处的刚度降低,试件整体变形增大。静置12h后,短边次梁跨中变形迅速扩展,试件整体垮塌,如图9e)所示。卸载后,长边主梁与短边次梁的变形均有一定恢复,但仍存在较大的残余变形。

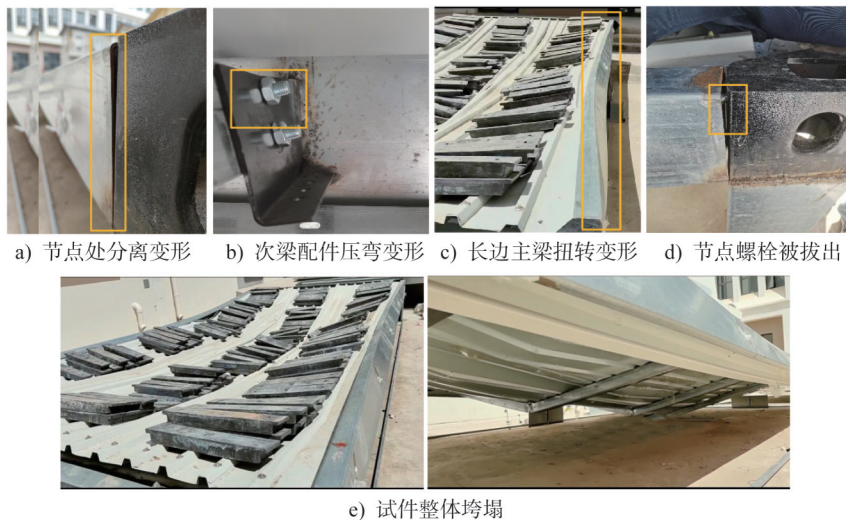


图9 顶框组件试验现象

Fig. 9 Test phenomena of roof frame assembly

综合以上试验现象,将荷载 $0.83 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-2}$ 确定为箱式集成房顶框正常使用极限状态对应的均布荷载。出于安

全考虑,将荷载 $1.52 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-2}$ 确定为箱式集成房顶框承载能力极限状态对应的均布荷载。

2.2 荷载-位移曲线

将测得的顶框组件短边次梁的荷载和位移进行均值处理,绘制如图10所示的荷载-位移曲线。由图可知:短边次梁在加载初期处于弹性状态;当荷载增加至 $1.38 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-2}$ 时,短边次梁PL3荷载-位移曲线的斜率先开始下降,其荷载的增长速度减缓,而位移的增加速度变快;这表明短边次梁的刚度开始减弱,并逐步进入弹塑性工作状态。直到荷载增至 $1.48 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-2}$,此时荷载增加减缓,但位移却明显增大,说明短边次梁PL3已经进入屈服阶段并产生塑性变形。短边次梁PL2、PL3跨中截面位置的荷载-位移曲线整体变化趋势基本相同,取短边次梁PL2、PL3荷载-位移平均值曲线中首次趋于平缓的数据点进行对比,结果显示短边次梁跨中截面的屈服位移值与1/4截面的屈服位移值相差29.7%。

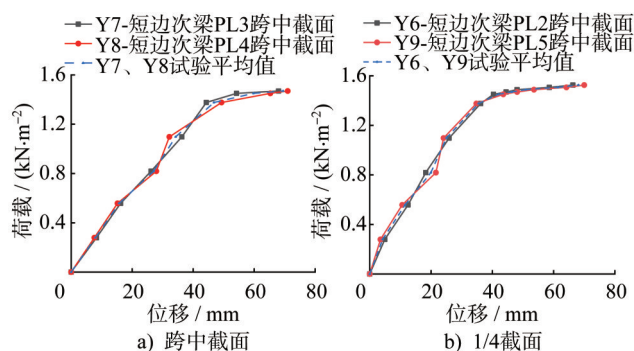


图10 短边次梁荷载-位移曲线

Fig. 10 Load-displacement curves of short-side secondary beams

注:由于加载现场铅块堆荷载较大,为确保试验安全,在短边次梁构件屈服后拆除位移计。因此,在整个记录过程中,未能监测到试件破坏的极限位移。

将测得的长边主梁跨中截面、1/4截面的荷载和位移进行均值处理,绘制如图11所示的荷载-位移曲线,由图可知:荷载加载至 $1.38 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-2}$ 前,长边主梁LB1各测点的荷载-位移曲线呈近似直线增长趋势,说明长边主梁的整体刚度在初始加载阶段比较稳定。在加载初期,长边主梁LB1发生轻微扭曲,各测点相对应的荷载-位移曲线差别较小。随着荷载增加,长边主梁同时承受弯曲和扭转的作用,出现了弯扭耦合效应,导致结构整体刚度降低,从而使荷载-位移曲线的斜率逐渐变小;此时,长边主梁跨中截面产生塑性变形。继续加载至承载能力极限状态附近时,长边主梁产生一定位移的情况下,仍能维持一点承载能力且未立即失效,展现出良好的延性。

2.3 荷载-应变曲线

将测得的短边次梁在不同位置的荷载和应变进行均值处理,绘制如图12所示的荷载-应变曲线,可以看出:短

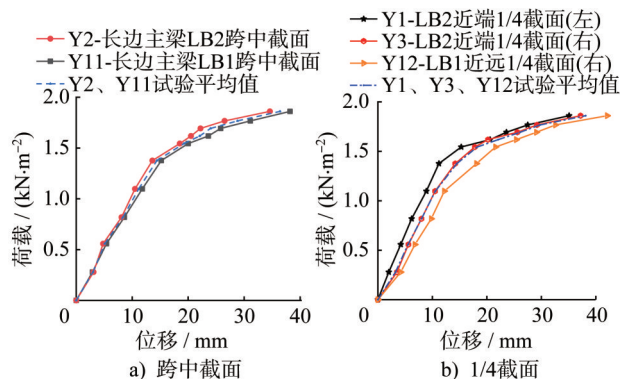


图11 长边主梁荷载-位移曲线

Fig. 11 Load-displacement curves of long-side main beams

边次梁在跨中截面及1/4截面的荷载-应变曲线变化趋势基本相似。其原因在于施加均布荷载导致短边次梁受力分布近似线性,从而在跨中截面和1/4截面出现类似的弯曲和剪切力的作用。以测点S29、S31为例,在加载初期,这两个测点的应变随荷载的增加呈线性增长趋势,表明结构处于弹性工作状态。当荷载达到 $1.48 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-2}$ 时,短边次梁PL2达到屈服应变,结构开始进入塑性工作状态。

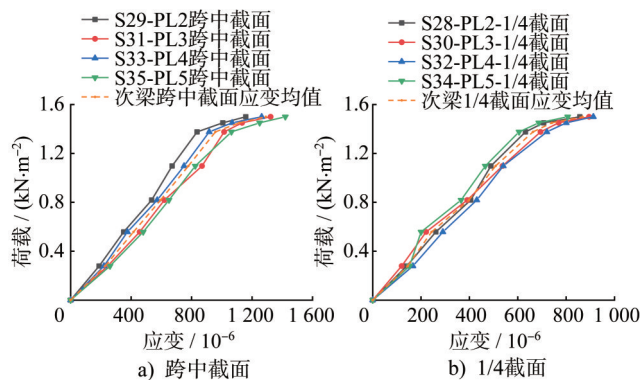


图12 短边次梁荷载-应变曲线

Fig. 12 Load-strain curves of short-side secondary beams

将测得的顶框长边主梁在跨中截面以及1/4截面的上、下翼缘和腹板处的荷载和应变进行均值处理,绘制如图13所示的荷载-应变关系曲线。由图可知:长边主梁的荷载-应变曲线在跨中与1/4截面处呈现出相似的变化趋势。这种一致性主要是由于长边主梁主要承受弯曲力,导致其上、下翼缘和腹板的受力特点呈现出一定的对称性。其中,应力最大的位置发生在长边主梁下翼缘处。在加载初期,长边主梁跨中截面腹板处测点S8、S23的应变接近0,而其1/4截面腹板处测点S5、S20的应变小于 $100 \mu\epsilon$ 且均为负值,表明此时长边主梁处于较小的受力状态并存在轻微的平面内扭转变形。这种初始扭转变形可能是由于结构在受到初始荷载时的不均匀作用,或安装过程中的微小偏差所引起的。随着荷

载增加,上、下翼缘测点应变呈线性增长趋势。当均布荷载达到 $1.72 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-2}$ 时,长边主梁 PL2 跨中截面下翼缘测点 S22 达到屈服应变。同时,测点 S4、S19 应变均值为 $574.6 \mu\epsilon$ 。1/4 截面处测点最大应变约为跨中屈服应变的 63.5%,说明了长边主梁在受力过程中应力分布相对一致,1/4 截面处的应变已达到较高水平。

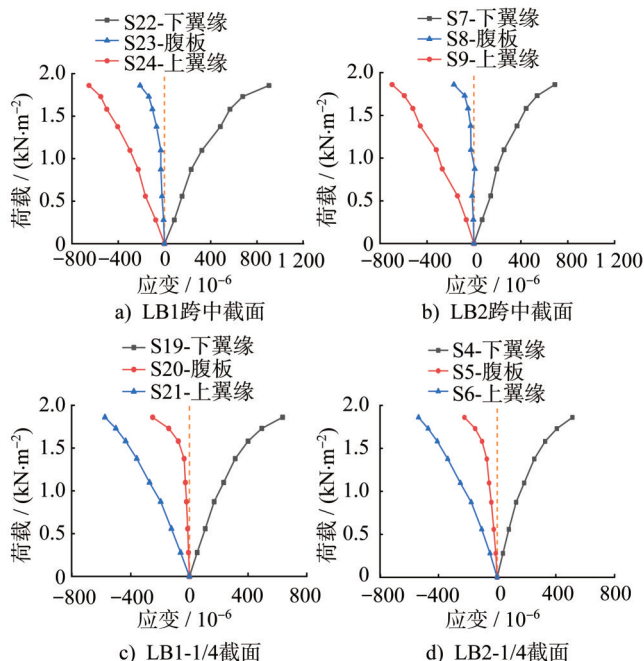


图 13 长边主梁荷载-应变曲线

Fig. 13 Load-strain curves of long-side main beams

将测得的顶框角件的荷载和应变进行均值处理,绘制如图 14 所示的荷载-应变关系曲线。由图可知:在加载初期阶段,测点 S11、S12 的应变随荷载增加呈线性增长趋势。同时,测点 S10 的应变保持在较低水平,测点 S11 的应变为正值, S12 的应变为负值,这表明角件沿长边主梁长度方向受压,而垂直于长边主梁长度方向则处于较小的受力状态,同时,在角件竖向与长边主梁相交 45° 方向上,表现为拉应力。在加载的整个过程中,各测点应变均处于屈服应变以下,这说明节点处的应变仍处于弹性变形范围内,节点具有足够的刚度。

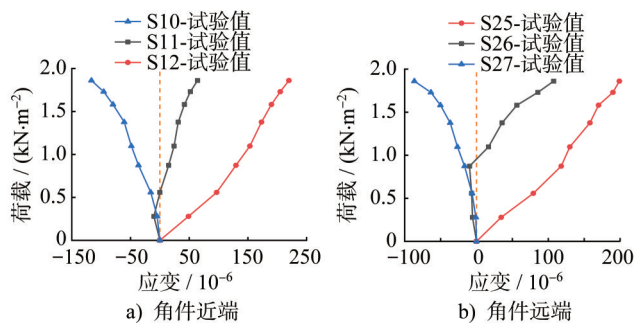


图 14 角件荷载-应变曲线

Fig. 14 Load-strain curves of joints

3 有限元模型验证

3.1 有限元模型建立

在 ABAQUS 有限元软件中通过 C3D8R 实体单元建立了顶框组件 1:1 的足尺模型 M1。设置各构件均为理想弹塑性材料,并根据材性试验结果输入相应的材料性质,由于各构件实测尺寸与公称尺寸相近,故本次建模均采用公称尺寸。通过扫略方法中的中性轴算法生成比较规则的六面体单元网格,为兼顾计算精度与效率,对受力较大的区域采用加密网格划分,对次要构件及受力较小的区域采用稀疏网格划分,如图 15a) 所示。模型 M1 在角件节点处,按照绑定约束与短边主梁连接,并通过 M12 螺栓与长边主梁相连,该角件节点处螺栓的平均屈服应力为 640 MPa ,平均抗拉应力为 800 MPa ,并对其施加了 35.4 kN 的预紧力。主次梁节点采用 M10 螺栓连接,如图 15b)、c) 所示。

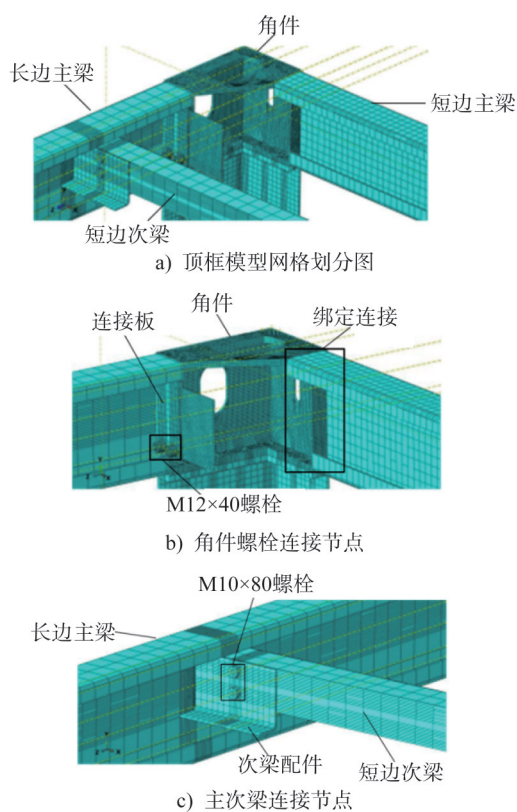


图 15 顶框组件有限元模型网格划分

Fig. 15 Mesh generation in finite element model of roof frame assembly

有限元建模时,针对长边主梁配件与角件、次梁配件与短边次梁间存在相对滑动与挤压行为,需定义接触关系。其中法向采用硬接触,切向设定为无摩擦接触,同时在分析步中启用几何非线性,以进行模型分析。为准确模拟试件实际试验的边界条件,在有限元模型中对刚性支座底部施加 $U_x=U_y=U_z=0$ 铰接约束,从而等效模拟

实际试验中试件底部的铰约束,如图16所示。

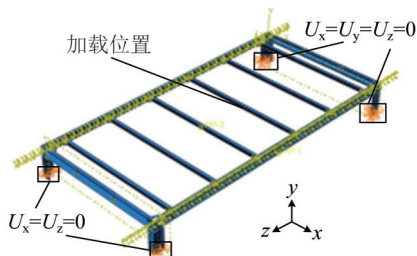


图16 有限元模型边界条件

Fig. 16 Finite element model boundary conditions

3.2 有限元结果验证

对顶框组件进行有限元分析时,长边主梁在跨中截面处存在明显的应力集中现象,且该部位表现出显著的变形特征。随着荷载增加,长边主梁跨中截面产生扭转变形,节点处出现轻微张角,这些现象与试验中观察到的结果相吻合,验证了有限元模型的准确性,有限元模拟与试验现象对比如图17所示。

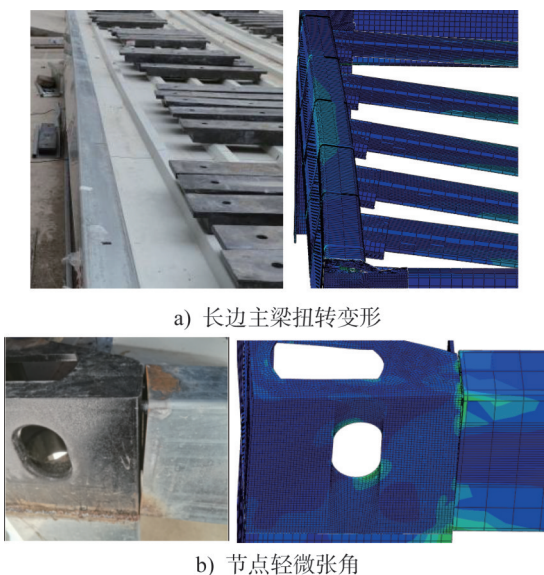


图17 有限元模拟与试验现象对比

Fig. 17 Comparison of finite element simulation and test phenomena

通过有限元计算分析,分别对顶框短边次梁、长边主梁跨中截面及1/4截面的模拟结果与试验值进行对比分析,如图18所示。

图18a)为顶框短边次梁有限元模拟与试验的荷载-位移曲线对比,从图中可以看出:当加载试件处于弹性阶段时,模拟值与试验值趋于吻合。在荷载达到 $1.45 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-2}$ 后,有限元模拟值略高于试验值,这可能是由于顶部短边次梁出现了屈服现象,同时压型钢板的整体效应(蒙皮效应)使得跨中挠度增长较为迟缓。其中,在有限元模拟中

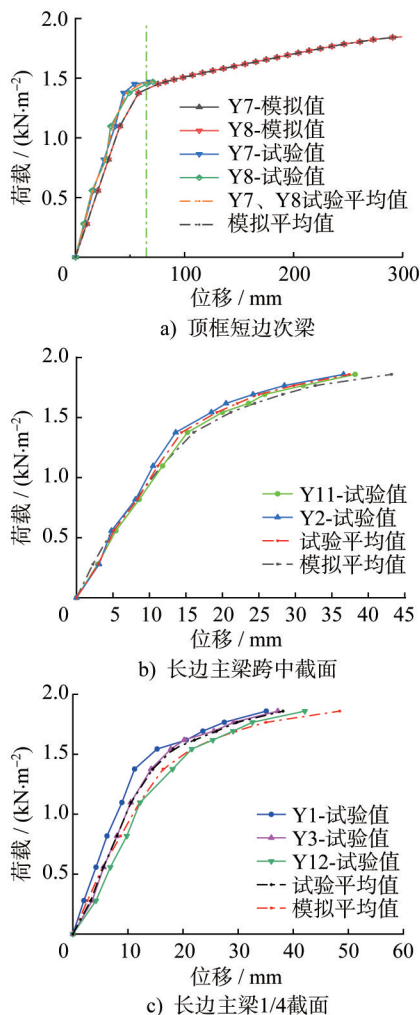


图18 顶框组件各关键测点试验与有限元模拟荷载-位移曲线结果对比

Fig. 18 Comparison of load-displacement curve results between test and finite element simulation for key measurement points of the roof frame assembly

该顶框组件的屈服荷载 P_y 为 $1.56 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-2}$,对应短边次梁跨中位移为 73.7 mm ;在试验中该顶框组件的屈服荷载 P_y 为 $1.45 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-2}$,对应短边次梁跨中位移为 59.7 mm 。短边次梁跨中位置挠度有限元模拟结果与试验实测结果相差19%,模拟值与试验值基本吻合。图18b)、c)分别为长边主梁跨中、1/4截面处有限元模拟与试验的荷载-位移曲线对比,从中可以看出:模拟值与试验值基本吻合。

参照《建筑结构荷载规范》(GB 50009—2012)^[16]中第5.3.3条:不上人的屋面均布活荷载可不与雪荷载和风荷载同时组合,即不上人屋面活荷载和雪荷载二者中取较大值,屋面恒荷载约为 $0.15 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-2}$,假定屋面活荷载取 $0.5 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-2}$,屋面雪荷载取 $0.5 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-2}$ 、 $1.2 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-2}$ 。

荷载效应组合标准值为:

$$S_y = S_d + S_L \quad (1)$$

当雪荷载取 $0.5 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-2}$ 时,荷载效应组合设计值为:

$$S_{C1} = 1.3S_d + 1.5S_L \quad (2)$$

当雪荷载取 $1.2 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-2}$ 时,荷载效应组合设计值为:

$$S_{C2} = 1.3S_d + 0.7S_s \quad (3)$$

式中: S_y 为荷载效应组合标准值; S_c 为荷载效应组合设计值; S_d 为结构自重计算截面产生的荷载效应标准值; S_L 为活荷载在计算截面产生的荷载效应标准值; S_s 为雪荷载在计算截面产生的荷载效应标准值。

将长边主梁、短边次梁对应测点位移平均值与有限元结果进行对比,对比结果如表3所示。由表3可知:在荷载效应组合作用下,短边次梁跨中截面下翼缘竖向位移最大相对误差不超过20%;长边主梁跨中及1/4截面处竖向位移相对挠度均未超过18%,平均误差未超过15%。由此得出:有限元为结果与试验结果基本一致,验证了有限元模型的有效性。

表3 荷载效应组合下各截面位移值对比

Table 3 Comparison of displacements of each cross-section under load effect combinations

| 荷载效应组合/($\text{kN}\cdot\text{m}^{-2}$) | 位移计测点 | 试验值/mm | 模拟值/mm | $\frac{ \text{试验值} - \text{模拟值} }{\text{试验值}}/\%$ |
|--|-------|--------|--------|---|
| 0.650 | Y1 | 3.94 | 3.36 | 14.7 |
| | Y2 | 6.84 | 5.26 | 23.1 |
| | Y6 | 13.62 | 15.77 | 15.8 |
| | Y7 | 14.16 | 16.05 | 13.3 |
| 0.945 | Y1 | 6.19 | 7.18 | 16.0 |
| | Y2 | 10.21 | 10.82 | 5.9 |
| | Y6 | 18.07 | 21.53 | 16.1 |
| | Y7 | 25.28 | 29.55 | 14.4 |
| 1.305 | Y1 | 9.38 | 8.69 | 7.3 |
| | Y2 | 11.14 | 12.97 | 16.4 |
| | Y6 | 37.12 | 42.85 | 15.4 |
| | Y7 | 37.95 | 45.26 | 19.2 |

通过分析有限元数值模拟的应力与位移云图可知:试件在CP1、CP3处应力较大,最大应力点位于CP1螺栓孔周围;在PL3、PL4处位移较大,位移最大点位于PL3跨中截面处。当加载至 $0.83 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-2}$ 时,PL3跨中位置相对位移最大值 $\geq 16.6 \text{ mm}$,达到规范所规定的位移限值;当加载至 $1.86 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-2}$ 时,短边次梁跨中截面的应力水平超过其材料屈服强度极限,进而发生塑性变形,对应极限应力为 235.3 MPa ,极限位移为 340.7 mm 。

3.3 有限元模型参数分析

沿用上述3.1小节的有限元模型方法,针对有限元模型M1开展参数分析,对比研究长边主梁、短边次梁壁厚、短边次梁间距、短边次梁钢材强度、主次梁节点连接形式等因素对顶框组件受力性能的影响。

3.3.1 长边主梁壁厚

基于有限元模型M1,在保持其它参数不变的基础上,将长边主梁壁厚由 3 mm 调整为 2.5 mm 、 3.5 mm ,分别对应建立模型M2、M3,以分析长边主梁壁厚对顶框组件承载力的影响。

其中,顶框组件跨中截面荷载-位移曲线如图19所示,表4中描述了长边主梁壁厚对顶框组件受力性能的影响。

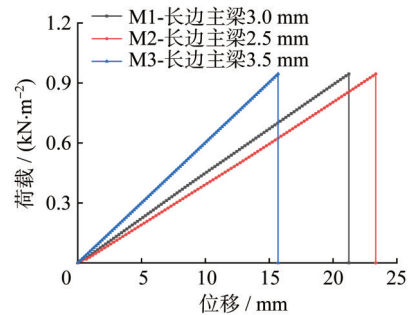


图19 不同长边主梁壁厚下顶框组件荷载-位移曲线
Fig. 19 Load-displacement curves of roof frame assemblies with different long-side main beam section thicknesses

从图19与表4中可知:当长边主梁壁厚由 3.0 mm 减小为 2.5 mm 时,顶框组件最大位移增加了 9.93% ;当长边主梁壁厚由 3.0 mm 增加至 3.5 mm 时,顶框组件最大位移降低了 25.74% ,这说明长边主梁壁厚的变化对结构

表4 长边主梁壁厚对顶框组件承载力的影响
Table 4 Effect of long-side main beam section thickness on roof frame assembly load capacity

| 模型 | 长边主梁壁厚/mm | $q/(kN \cdot m^{-2})$ | D/mm | $\Delta/\%$ |
|----|-----------|-----------------------|--------|-------------|
| M1 | 3.0 | 0.945 | 21.13 | — |
| M2 | 2.5 | 0.945 | 23.35 | 9.93 |
| M3 | 3.5 | 0.945 | 15.69 | -25.74 |

注： q 为在顶框上施加的均布荷载； D 为楼板的跨中挠度； Δ 为各参数化模型与M1(原模型)的位移差值。

刚度的影响是非线性的关系,随着壁厚的增加,结构刚度的提升效果更加显著。

3.3.2 短边次梁壁厚

基于有限元模型M1,在保持其它参数不变的基础上,将短边次梁壁厚由1.5 mm调整为2 mm、2.5 mm,分别对应建立模型M4、M5,分析短边次梁壁厚对顶框承载力的影响。

图20为顶框组件在均布荷载作用下的荷载-位移曲线,而表5则列出了短边次梁壁厚对顶框承载力的影响。

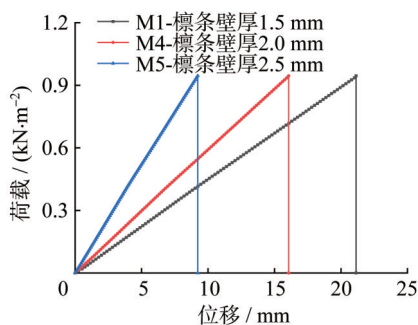


图20 不同短边次梁壁厚下顶框组件荷载-位移曲线
Fig. 20 Load-displacement curves of roof frame assemblies with different short-side secondary beam section thicknesses

表5 短边次梁壁厚对顶框组件承载力的影响
Table 5 Effect of short-side secondary beam section thickness on roof frame assembly load capacity

| 模型 | 短边次梁壁厚/mm | $q/(kN \cdot m^{-2})$ | D/mm | $\Delta/\%$ |
|----|-----------|-----------------------|--------|-------------|
| M1 | 1.5 | 0.945 | 21.13 | — |
| M4 | 2.0 | 0.945 | 16.06 | -23.9 |
| M5 | 2.5 | 0.945 | 9.22 | -56.3 |

通过分析图20和表5的数据可以发现:当短边次梁壁厚从1.5 mm增至2.0 mm、2.5 mm时,顶框组件的整体位移分别减少了23.9%、56.3%。此外,短边次梁壁厚的

改变对顶框组件荷载-位移曲线斜率产生显著调控作用(即直接影响结构刚度),因此通过调整短边次梁壁厚可以优化结构性能。

3.3.3 短边次梁间距

基于有限元模型M1,在保持其它参数不变的基础上,将短边次梁间距由1 034 mm调整为850 mm,对应建立模型M6,如图21所示,以分析改变短边次梁间距对顶框组件承载力的影响。

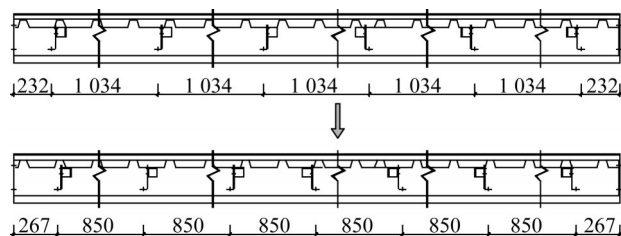


图21 短边次梁间距布置(单位:mm)
Fig. 21 Arrangement of spacing of short-side secondary beams (unit:mm)

图22为改变短边次梁间距后顶框组件的荷载-位移曲线,而表6则列出了改变短边次梁间距对顶框组件承载力的影响。

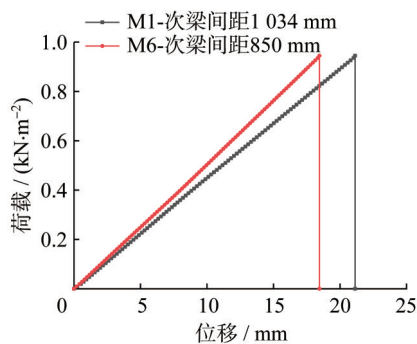


图22 不同次梁间距下顶框组件荷载-位移曲线
Fig. 22 Load-displacement curves of roof frame assemblies with different spacing of secondary beams

表6 次梁间距对顶框组件承载力的影响
Table 6 Effect of secondary beam spacing on roof frame assembly load capacity

| 模型 | 短边次梁间距/mm | $q/(kN \cdot m^{-2})$ | D/mm | $\Delta/\%$ |
|----|-----------|-----------------------|--------|-------------|
| M1 | 1 034 | 0.945 | 21.13 | — |
| M6 | 850 | 0.945 | 18.46 | -12.6 |

通过分析图22和表6中的数据可以发现:当短边次梁间距由1 034 mm降至850 mm时,顶框组件的整体位移减少了12.6%,表明减小次梁间距可显著强化次梁的

受力作用,进而更高效地分散和传递荷载,最终实现结构整体位移的有效控制。

3.3.4 短边次梁钢材强度

基于有限元模型M1,在保持其它参数不变的基础上,将短边次梁钢材由Q195更改为Q235,对应建立模型M7,分析改变短边次梁钢材强度对顶框组件承载力的影响。

图23为均布荷载作用下,短边次梁采用不同钢材强度等级时顶框组件的荷载-位移曲线,而表7则列出了短边次梁钢材强度对顶框承载力的影响。

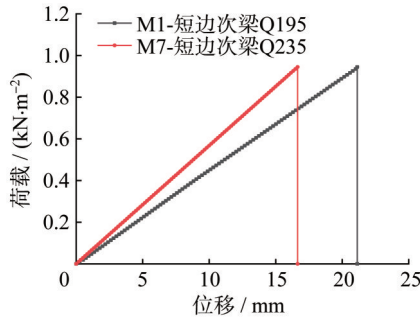


图23 次梁不同钢材强度下顶框组件荷载-位移曲线
Fig. 23 Load-displacement curves of roof frame assemblies with different steel strengths for secondary beams

表7 次梁钢材强度对顶框组件承载力的影响

Table 7 Effect of secondary beam steel strength on roof frame assembly load capacity

| 模型 | 短边次梁钢材牌号 | $q/(kN \cdot m^{-2})$ | D/mm | $\Delta/\%$ |
|----|----------|-----------------------|--------|-------------|
| M1 | Q195 | 0.945 | 21.13 | — |
| M7 | Q235 | 0.945 | 16.65 | -21.2 |

通过分析图23和表7的数据可以发现:当短边次梁钢材牌号由Q195变为Q235时,顶框组件的整体位移减少了21.2%,这表明钢材强度的提升使得顶框组件在承受相同荷载或外力作用时,其抵抗变形的能力得到了显著提高,从而减小了结构的位移。

3.3.5 主次梁节点连接形式

基于有限元模型M1,在保持其它参数不变的基础上,将次梁配件的单向布置更改为对称布置,对应建立模型M8,如图24所示,分析主次梁节点连接形式对顶框组件承载力的影响。

在主次梁节点不同连接形式下顶框组件的荷载-位移曲线如图25所示,此外,表8中描述了主次梁节点不同连接形式对顶框组件承载能力的影响。

从图25及表8中可知:对于对称布置次梁配件的顶

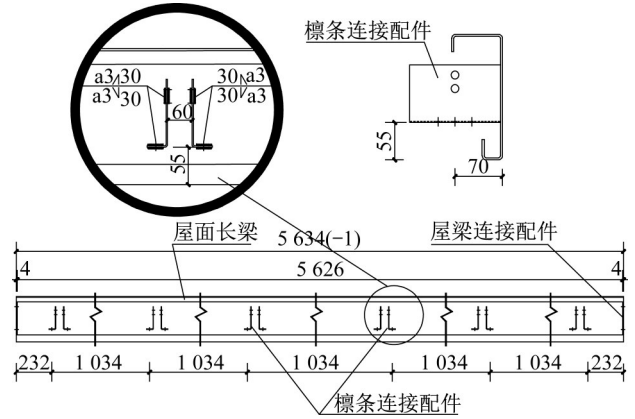


图24 主次梁连接形式(单位:mm)

Fig. 24 Connection type of primary and secondary beams (unit:mm)

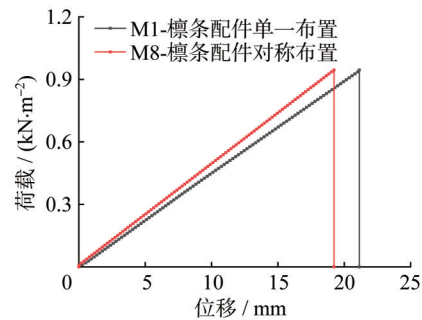


图25 不同主次梁连接形式下顶框组件荷载-位移曲线
Fig. 25 Load-displacement curves of roof frame assemblies with different primary and secondary beam connection types

表8 主次梁连接形式对顶框组件承载力的影响

Table 8 Effect of primary and secondary beam connection types on roof frame assembly load capacity

| 模型 | 布置形式 | $q/(kN \cdot m^{-2})$ | D/mm | $\Delta/\%$ |
|----|------|-----------------------|--------|-------------|
| M1 | 单一布置 | 0.945 | 21.13 | — |
| M8 | 对称布置 | 0.945 | 19.23 | -8.99 |

框组件,其最大位移减少了8.99%,即采用次梁配件对称布置的设计方案时,顶框组件的承载力略有提高,这表明对称布置的次梁配件在受力过程中可高效传递荷载,使得荷载分布更加均匀,减少了局部应力集中现象,从而提高了结构的承载能力和稳定性。

4 理论计算分析

本文结合箱式集成房顶框组件承载能力试验,采用荷载标准组合对顶框组件的位移进行计算,计算时应包括:永久荷载(箱式集成房顶框组件自重),可变荷载(按照规范荷载进行取值计算)。

4.1 简化计算模型

在图3中取出边部主梁,其计算简图如图26所示,梁的计算跨度为5.634 m。假定材料属性为均质、各向同性,同时忽略荷载动态变化和局部效应。

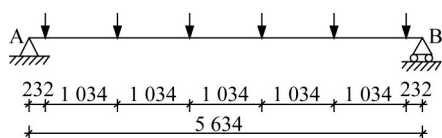


图26 顶框组件简化计算模型(单位:mm)

Fig. 26 Simplified calculation model of the roof frame assembly (unit: mm)

4.2 简化模型理论计算过程

采用简化计算模型计算截面刚度时,假定顶框组件平面内的截面抗弯刚度为恒定值,且构件始终处于弹性工作状态。其计算过程如下:

(1) 将主梁截面划分为若干简单几何图形^[17],并利用式(4)计算其形心坐标:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad (4)$$

式中: \bar{x} 为形心坐标; A_i 为第*i*个分块面积; \bar{x}_i, \bar{y}_i 为第*i*个分块形心坐标。

(2) 截面惯性矩的计算采用叠加法,按长边主梁截面各组成部分的惯性矩代数和求解,按照式(5)计算整体惯性矩:

$$I_0 = I_{xc} + a^2 A \quad (5)$$

式中: I_0 为截面关于长边主梁整体形心轴X-X的惯性矩; I_{xc} 为截面各组成部分关于自身形心轴的惯性矩; a 为截面各组成部分形心轴到整体形心轴的距离; A 为截面各组成部分自身的面积;

(3) 长边主梁跨中截面由荷载标准值产生的最大挠度为:

$$V_k = \frac{M_{kmax} l^2}{10EI_x} \quad (6)$$

式中: V_k 为长边主梁跨中截面最大挠度; M_k 为跨中截面弯矩; l 为长边主梁的跨度; E 为弹性模量; I_x 为长边主梁截面惯性矩。

顶框组件在竖向均布荷载作用下,由长边主梁约束扭转引起的变形如图27所示:

(4) 由长边主梁约束扭转引起的变形为:

$$\theta(x) = \theta_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (7)$$

式中: $\theta(x)$ 为长边主梁在楼板跨中位置处的扭转角; θ_0 为长边主梁的最大扭转角。

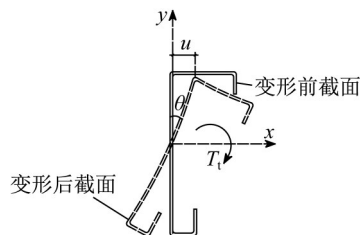


图27 长边主梁约束扭转变形

Fig. 27 Constrained torsional deformation of long-side main beams

(5) 由扭转引起的扭矩与扭转应力的关系为:

$$M = \tau W_p \quad (8)$$

式中: M 为由扭转引起的扭矩; τ 为长边主梁截面扭转应力; W_p 为抗扭截面模量。

(6) 根据顶框组件的受力特征,长边主梁在跨中截面附近扭转应力最大。因此,近似地将长边主梁跨中截面,即 $x=L/2$ 处,作为扭转应力 τ 最大的位置。

在约束扭转的情况下,长边主梁的挠度可通过式(9)计算:

$$V(x) = \frac{1}{G} \int_0^x \tau(x') \frac{d\theta(x')}{dx'} dx' \quad (9)$$

式中: G 为长边主梁的剪切模量。

(7) 将式(8)代入式(10)中进行简化,可得:

$$V(x) = \frac{M}{GW_p} \int_0^x \frac{d\theta(x')}{dx'} dx' \quad (10)$$

(8) 当荷载作用在长边主梁跨中截面,最大扭转角 θ_0 对应的扭转角变化率为1,此时,将积分上限改为 $L/2$,可得:

$$V_c = \frac{M}{GW_p} \cdot \theta_0 \cdot \frac{L}{2} = \frac{M\theta_0 L}{2GW_p} \quad (11)$$

式中: V_c 为由于约束扭转变形引起的挠度。

(7) 长边主梁的总挠度是基本跨中截面挠度和由于约束扭转变形引起的挠度修正之和,即:

$$V_i = V_k + V_c \quad (12)$$

图28与表9为顶框组件按式(12)计算的挠度理论计算值与试验值对比。由下图可知:在加载初期,试验结果与理论计算结果吻合较好;随着荷载增加,理论值与试验值间的差异逐渐增加;当荷载增加至 $0.650 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-2}$,理论值与试验值相差23.7%,理论值略大于试验值;当荷载增加至 $0.945 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-2}$,理论值与试验值相差20.4%,其可能是由于在进行理论计算过程中,考虑了压型钢板对顶框组件的作用,从而导致理论挠度略大于试验挠度。

5 结论

本文通过对箱式集成房顶框组件开展静力试验研究,得到了顶框组件的抗弯承载力,分析了顶框组件的破

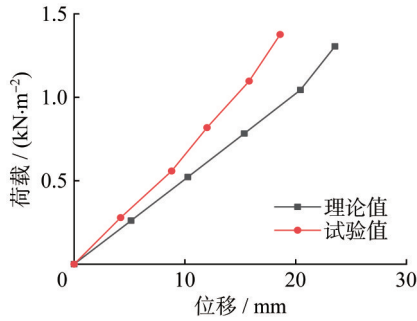


图28 顶框组件挠度理论值与试验值对比

Fig. 28 Comparison of roof frame assembly deflection between theoretical and test values

表9 简化模型理论值与试验值对比

Table 9 Comparison between simplified model theoretical and test values

| 模型 | $q/(kN \cdot m^{-2})$ | D/mm | $\Delta_D/\%$ |
|------|-----------------------|--------|---------------|
| 试验模型 | 0.650 | 6.84 | — |
| 理论模型 | 0.650 | 5.22 | 23.7 |
| 试验模型 | 0.945 | 21.13 | — |
| 理论模型 | 0.945 | 16.81 | 20.4 |

注： Δ_D 为试验模型与理论模型的位移差值。

坏机理。随后通过ABAQUS有限元软件建立了有限元模型,并对该顶框组件的受力性能进行了模拟,验证了有限元模型的准确性。最后,通过有限元数值模拟方法,对顶框组件的影响因素开展参数分析,进而建立了简化计算模型,得出以下主要结论:

(1) 箱式集成房顶框组件在均布设计组合荷载作用下,满足规范所要求的位移限值。各构件在设计组合荷载作用下,表现出良好的受力性能。其破坏模式主要表现为长边主梁受弯扭变形的同时,短边次梁出现相关屈曲破坏。

(2) 有限元模拟结果与试验结果吻合较好,验证了采用有限元软件ABAQUS对箱式集成房顶框组件力学性能的研究分析是较为可靠的。

(3) 根据有限元参数分析结果,可发现:增加长边主梁壁厚对顶框组件抗弯刚度的提升效果相对有限;提高短边次梁壁厚,能显著增强顶框组件的抗变形能力;减小短边次梁间距,可高效分散并传递荷载,进而提升顶框组件的延性性能;提高短边次梁的钢材强度等级,对顶框组件承载能力的提升作用尤为显著;在合理参数范围内,优化次梁配件的布置形式,能够有效改善结构的安全性能与整体稳定性。

(4) 顶框组件考虑长边主梁扭转变形的简化计算模型,与精细化模型的计算结果基本一致;弹性阶段下,两

类模型的荷载-位移曲线高度吻合,充分验证了该简化模型的准确性与适用性。

参考文献:

- [1] CAS 180—2009 箱式集成房[S]. CAS 180—2009 Container assembling house[S].(in Chinese)
- [2] CHEN Z H, ZHONG X, LIU Y, et al. Analytical and design method for the global stability of modular steel buildings[J]. International Journal of Steel Structures, 2021, 21(5): 1741-1758. DOI: 10.1007/s13296-021-00532-8.
- [3] 张俊峰, 张英豪, 赵俊杰, 等. 可拆装式箱型房屋整体受力性能研究[J]. 建筑钢结构进展, 2023, 25(3): 1-13, 38. DOI: 10.13969/j.cnki.cn31-1893.2023.03.001. ZHANG Junfeng, ZHANG Yinghao, ZHAO Junjie, et al. Mechanical property study on the assembled-type of light steel modular house[J]. Progress in Steel Building Structures, 2023, 25(3): 1-13, 38. DOI: 10.13969/j.cnki.cn31-1893.2023.03.001.(in Chinese)
- [4] 张俊峰, 田广丰, 王欢, 等. 拆装式箱型房屋底框抗弯刚度及影响因素研究[J]. 工业建筑, 2020, 50(1): 184-189, 177. DOI: 10.13204/j.gyjz202001029. ZHANG Junfeng, TIAN Guangfeng, WANG Huan, et al. Research on the flexural stiffness of bottom frame of removable box house and its influencing factors[J]. Industrial Construction, 2020, 50(1): 184-189, 177. DOI: 10.13204/j.gyjz202001029.(in Chinese)
- [5] 张俊峰, 杨大雍, 郭庆, 等. 拆装式箱型房屋竖向承载力试验研究[J]. 工业建筑, 2017, 47(10): 162-167. DOI: 10.13204/j.gyjz201710029. ZHANG Junfeng, YANG Dayong, GUO Qing, et al. Experimental research on the vertical bearing capacity of the removable box house[J]. Industrial Construction, 2017, 47(10): 162-167. DOI: 10.13204/j.gyjz201710029.(in Chinese)
- [6] 张俊峰, 杨大雍, 胡文梯, 等. 拆装式箱型房屋整体抗弯刚度研究[J]. 钢结构, 2016, 31(12): 28-32, 12. DOI: 10.13206/j.gjg201612006. ZHANG Junfeng, YANG Dayong, HU Wenti, et al. Research on the overall flexural stiffness of assembled box house[J]. Steel Construction, 2016, 31(12): 28-32, 12. DOI: 10.13206/j.gjg201612006.(in Chinese)
- [7] 熊伟, 帅逸群, 程威. 多层装配式集成打包箱结构设计分析[J]. 工程建设与设计, 2024(1): 26-29. DOI: 10.13616/j.cnki.gcjsysj.2024.01.007. XIONG Wei, SHUAI Yiqun, CHENG Wei. Structural design and analysis of multi-layer integrated modular house by flat packing[J]. Construction & Design for Engineering, 2024(1): 26-29. DOI: 10.13616/j.cnki.gcjsysj.2024.01.007.(in Chinese)
- [8] 帅逸群, 熊伟, 程威. 装配式打包箱式结构抗侧刚度及承载力分析[J]. 建筑结构, 2022, 52(24): 44-49, 105. DOI: 10.19701/j.jzjg.zj220063.

- SHUAI Yiqun, XIONG Wei, CHENG Wei. Analysis on stiffness and ultimate strength of prefabricated containerized steel modular structure[J]. Building Structure, 2022, 52(24): 44-49, 105. DOI: 10.19701/j.jzjg.zj220063. (in Chinese)
- [9] 查晓雄, 范坤杰. 集装箱房抗侧刚度分析I: 整箱蒙皮效应[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2017, 49(6): 102-108. DOI: 10.11918/j.issn.0367-6234.201512074.
- ZHA Xiaoxiong, FAN Kunjie. Analysis on the lateral stiffness of container house I: Diaphragm effect of the whole[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2017, 49(6): 102-108. DOI: 10.11918/j.issn.0367-6234.201512074. (in Chinese)
- [10] 范坤杰, 查晓雄. 集装箱房抗侧刚度分析II: 侧板开洞影响[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2017, 49(6): 109-116. DOI: 10.11918/j.issn.0367-6234.201512075. FAN Kunjie, ZHA Xiaoxiong. Analysis on the lateral stiffness of container house II: Effect of side panel with openings[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2017, 49(6): 109-116. DOI: 10.11918/j.issn.0367-6234.201512075. (in Chinese)
- [11] 尹静, 查晓雄. 箱式集成房折叠单元刚性试验及有限元分析[J]. 工业建筑, 2010, 40(增刊1): 446-448, 408. DOI: 10.13204/j.gyjz2010.s1.200.
- YIN Jing, ZHA Xiaoxiong. The rigid tests and finite element analysis of the foldaway element of container assembling house (CAH) [J]. Industrial Construction, 2010, 40(Suppl. 1): 446-448, 408. DOI: 10.13204/j.gyjz2010.s1.200. (in Chinese)
- [12] LIU Y, CHEN Z H, LIU J D, et al. Lateral stiffness evaluation on corner-supported thin walled modular steel structures [J]. Thin-Walled Structures, 2020, 157: 106967. DOI: 10.1016/j.tws.2020.106967.
- [13] WANG X D, SU P F, LIU J D, et al. Seismic performance of ATLS modular house based on joint stiffness analysis [J]. Journal of Constructional Steel Research, 2021, 183: 106770. DOI: 10.1016/j.jcsr.2021.106770.
- [14] LUO F J, BAI Y, HOU J, et al. Progressive collapse analysis and structural robustness of steel-framed modular buildings [J]. Engineering Failure Analysis, 2019, 104: 643-656. DOI: 10.1016/j.engfailanal.2019.06.044.
- [15] GB 50017—2017 钢结构设计标准[S]. GB 50017—2017 Standard for design of steel structures [S]. (in Chinese)
- [16] GB 50009—2012 建筑结构荷载规范[S]. GB 50009—2012 Load code for the design of building structures [S]. (in Chinese)
- [17] 孙训方, 方孝淑, 关来泰. 材料力学I[M]. 6版. 北京: 高等教育出版社, 2019.
- SUN Xunfang, FANG Xiaoshu, GUAN Laitai. Mechanics of materials I [M]. 6th ed. Beijing: Higher Education Press, 2019. (in Chinese)