

文章编号:1672-3961(2024)05-0081-12

DOI:10.6040/j.issn.1672-3961.0.2023.068

未知初始跟踪条件的纯反馈系统预设性能有限时间容错控制

丁磊, 李小华*, 刘辉

(辽宁科技大学电子与信息工程学院, 辽宁 鞍山 114051)

摘要:针对具有执行器故障和未知初始跟踪条件的非仿射纯反馈系统,研究其预设性能有限时间容错控制问题。采用中值定理处理非仿射系统,考虑控制方向未知,用Nussbaum增益函数解决控制器设计问题。借助一种与系统初始条件无关的预设性能控制设计方法,在跟踪误差的初始状态未知时依然可设计预设性能控制器。采用传统的有限时间理论及容错控制理论,提出一个预设性能有限时间容错控制设计策略。该策略能够保证系统在未知初始跟踪条件和执行器故障情况下的暂态和稳态性能,以及系统中所有信号的有界性。仿真结果验证了所提策略的可行性。

关键词:非仿射纯反馈;执行器故障;预设性能;有限时间控制;控制方向未知

中图分类号:TP273

文献标志码:A

引用格式:丁磊,李小华,刘辉.未知初始跟踪条件的纯反馈系统预设性能有限时间容错控制[J].山东大学学报(工学版),2024,54(5):81-92.

DING Lei, LI Xiaohua, LIU Hui. Pure feedback system prescribed performance finite-time fault-tolerant control with unknown initial tracking condition[J]. Journal of Shandong University (Engineering Science), 2024, 54(5):81-92.

Pure feedback system prescribed performance finite-time fault-tolerant control with unknown initial tracking condition

DING Lei, LI Xiaohua*, LIU Hui

(School of Electronic and Information Engineering, University of Science and Technology Liaoning, Anshan 114051, Liaoning, China)

Abstract: For non-affine pure feedback system with actuator failure and unknown initial tracking condition, the problem of prescribed performance finite-time fault-tolerant control was studied. The mean value theorem was adopted to deal with non-affine system, the Nussbaum gain function was used to solve the controller design problem with unknown control direction. With the help of prescribed performance control design method which was independent of the system's initial condition, the prescribed performance controller could still be designed when the initial state of the tracking error was unknown. Using traditional finite-time theory and fault-tolerant control theory, a prescribed performance finite-time fault-tolerant control design strategy was proposed. The strategy could guarantee the transient and steady-state performance of the system under unknown initial tracking condition and actuator failure, as well as boundness of all signals in the system. The simulation results verified the feasibility of the designed controller.

Keywords: non-affine pure feedback; actuator failure; prescribed performance; finite-time control; unknown control direction

0 引言

非仿射特性普遍存在于机械、生化和飞行控制等实际系统中,如高超音速飞行器、化学反应控制系统、

收稿日期:2023-04-06

基金项目:国家自然科学基金联合基金资助项目(U21A20483);吉林大学汽车仿真与控制国家重点实验室开放基金资助项目(20210219)

第一作者简介:丁磊(1998—),女,辽宁朝阳人,硕士研究生,主要研究方向为非线性系统控制理论。E-mail:1799192610@qq.com

*通信作者简介:李小华(1964—),女,河南郑州人,教授,博士生导师,博士,主要研究方向为非线性系统控制理论。

E-mail:lixiaohua6412@163.com

直升机^[1-3]。纯反馈系统作为非仿射非线性系统中的一种典型系统,其系统状态和控制输入都为非仿射结构,在控制设计中存在一定挑战。因此,对其展开研究具有现实意义。

对于许多实际控制系统,当受到一些外部因素影响或者由于系统自身因素导致其执行器发生卡死、偏置、失效等故障,会降低系统性能,影响系统的安全和稳定,严重时甚至会出现灾难性后果。因此,设计合适的容错控制方案十分重要。目前针对非仿射纯反馈非线性系统的容错控制研究,已有较多成果。文献[4-5]针对一类具有执行器故障的非仿射纯反馈非线性系统设计自适应容错控制方法,保证系统的跟踪误差收敛到平衡点附近的邻域内。文献[6]考虑了纯反馈系统出现执行器故障和时变状态约束的情况,设计了基于动态面技术的自适应有限时间控制器,保证系统的所有状态都被约束在预先设定的区域内。文献[7]研究了具有未知控制方向和传感器故障的纯反馈系统的模糊自适应容错控制问题,控制方法较为简单。目前,在非仿射纯反馈系统的容错控制研究中较少考虑系统控制方向未知的问题。

有限时间控制方法可以提高系统的收敛速度,使系统具有更好的鲁棒性^[8-10]。预设性能控制方法可以同时保证系统的暂态和稳态性能^[11-13]。文献[14]将预设性能与有限时间理论相结合,设计了预设有限时间性能函数,既能保证系统的跟踪误差满足预先设定的要求,又能保证系统的暂态性能和稳态性能。在一般预设性能控制方法的研究中,控制器设计过程均要求被约束变量的初始状态已知且满足小于预设性能函数初值的条件。然而,对于未知初始条件或初始条件难以确定的延时控制系统,传统的预设性能控制方法不能使用。针对此类问题,文献[15]提出一种新的与初始条件无关的预设性能控制方法,使预设性能函数选择与系统的初始状态完全无关,解决了预设性能控制方法在实际系统中的应用问题。由于系统在实际过程中也会出现控制方向未知,许多学者也考虑了控制方向未知对于系统性能的影响^[16-17]。尚未发现在初始跟踪条件未知的情况下,研究非仿射纯反馈系统的执行器故障、控制方向未知和预设有限时间容错控制问题。

受上述分析启发,本研究针对一类具有执行器故障、未知控制方向和未知初始跟踪条件的非仿射纯反馈系统,研究其预设性能有限时间容错控制问题,使得:(1)在初始跟踪条件未知时,控制器依然能够保证系统跟踪误差被预设性能函数约束,系统中所有信号都是有限时间、有界的;(2)将一种无关初始跟踪条件的预设性能控制方法与传统有限时间控制方法结合,同时解决了非仿射纯反馈系统在未知初始跟踪条件下的执行器故障和控制方向未知问题。

1 系统描述

考虑一类具有执行器故障的纯反馈系统,系统状态空间方程为:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(\bar{x}_i, x_{i+1}) \\ \dot{x}_n = f_n(\bar{x}_n, u) \\ y = x_1 \end{cases}, \quad (1)$$

式中: $x_{i+1} \in \mathbf{R}$, $i=1, 2, \dots, n-1$, $\bar{x}_i = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_i]^\top \in \mathbf{R}^i$, $i=1, 2, \dots, n$, 都为系统的状态变量; u 为系统控制输入, y 为系统输出, $f_i(\cdot)$ 为未知光滑函数。

当执行器故障发生时,系统的控制输入 u 和具有执行器故障的实际输入 u_0 的数学模型可以表示为^[18]:

$$u = \bar{\omega}u_0 + \beta,$$

式中: $\bar{\omega}$ 为故障指数, $0 < \bar{\omega} \leq 1$; β 为未知的常值加性故障。当 $\bar{\omega} = 1$, $\beta = 0$ 时,系统无故障;当 $0 < \bar{\omega} < 1$, $\beta = 0$ 时,系统处于部分失效故障;当 $\bar{\omega} = 1$, $\beta \neq 0$ 时,系统处于偏置故障;当 $0 < \bar{\omega} < 1$, $\beta \neq 0$ 时,此时系统处于并发性故障,同时存在失效故障和偏置故障。

借助中值定理,将式(1)中的非线性函数 $f_i(\bar{x}_i, x_{i+1})$ 和 $f_n(\bar{x}_n, u)$ 处理为^[14]:

$$\begin{aligned} f_i(\bar{x}_i, x_{i+1}) &= f_i(\bar{x}_i, x_{i+1}^0) + g_{\mu_i}(\bar{x}_i, x_{i+1})(x_{i+1} - x_{i+1}^0), \\ f_n(\bar{x}_n, u) &= f_n(\bar{x}_n, u^0) + g_{\mu_n}(\bar{x}_n, u)(u - u^0), \end{aligned}$$

式中: $g_{\mu_i}(\bar{x}_i, x_{i+1}) = \frac{\partial f_i(\bar{x}_i, x_{i+1})}{\partial x_{i+1}} \Big|_{x_{i+1}=x_{\mu_i}}$; $g_{\mu_n}(\bar{x}_n, u) = \frac{\partial f_n(\bar{x}_n, u)}{\partial u} \Big|_{u=x_{\mu_n}}$; $x_{\mu_i} = \mu_i x_{i+1} + (1 - \mu_i)x_{i+1}^0$; $x_{\mu_n} = \mu_n u + (1 - \mu_n)u^0$ 。

令 $x_{i+1}^0 = 0, u^0 = 0, x_{n+1} = u, \mu_i$ 是常数, $i = 1, 2, \dots, n, 0 < \mu_i < 1$, 式(1)可以表示为:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(\bar{x}_i, 0) + g_{\mu_i}(\bar{x}_i, x_{i+1})x_{i+1} \\ \dot{x}_n = f_n(\bar{x}_n, 0) + g_{\mu_n}(\bar{x}_n, u)(\bar{\omega}u_0 + \beta) \\ y = x_1 \end{cases}$$

假设 1^[19] $g_{\mu_i}(\bar{x}_i, x_{i+1}), i = 1, 2, \dots, n$, 符号未知, 且存在正实数 \underline{g}_{μ_0} 和 \bar{g}_{μ_i} , 有:

(1) $|g_{\mu_i}(\bar{x}_i, x_{i+1})| \geq \underline{g}_{\mu_0} > 0, \forall \bar{x}_{i+1} \in \mathbf{R}^{i+1}$;

(2) $|g_{\mu_i}(\cdot)| \leq \bar{g}_{\mu_i}, \forall \bar{x}_n \in \Omega_{\bar{x}_n} \subset \mathbf{R}^n, i = 1, 2, \dots, n-1$, 其中 $|g_{\mu_n}(\bar{x}_n, u)| \leq \bar{g}_{\mu_n}, \forall u \in \mathbf{R}, \Omega_{\bar{x}_n}$ 是一个紧集。

假设 2 参考信号 y_d 及其一阶导数是连续有界的。

本研究控制目标为:针对具有执行器故障和控制方向未知的非线性系统(1),在未知初始跟踪条件下设计预设性能有限时间容错控制器。使系统是实际有限时间稳定的,系统输出可以跟踪参考信号,跟踪误差被性能函数约束在给定界内,同时保证执行器发生故障时系统的稳定性。

2 预备知识

2.1 未知初始跟踪条件的预设性能控制设计方法

借用文献[15]提出的一种新的预设性能控制方法,保证预设性能函数的选择与系统跟踪误差的初始值无关。具体设计过程如下。

定义预设性能函数

$$\psi_1(t) = (\psi_0 - \psi_\infty)e^{-\kappa(t-T_f)} + \psi_\infty,$$

式中: $T_f > 0$ 为预先设定的时间参数,代表跟踪误差进入预设性能区域的时间; $\psi_0, \psi_\infty, \kappa$ 为设计参数, $\psi_0 > \psi_\infty > 0, \kappa > 0$ 。

利用双曲正切函数将跟踪误差 $e_1(t)$ 映射到 $z_1(t)$, 可得

$$z_1(t) = \tanh(e_1),$$

式中: $|z_1| < 1$, 即对于任意 $e_1(t), z_1(t)$ 都是有界的, 并且 $e_1(t)$ 和 $z_1(t)$ 在原点附近的小邻域内近似线性关系。

通过非线性映射后,就可用传统的预设性能约束方法对 $z_1(t)$ 进行设计。

$z_1(t)$ 的约束条件为:

$$-\psi_2(t) < z_1(t) < \psi_2(t), t \geq 0.$$

设定

$$\begin{aligned} \psi_2(t) &= M e^{-\kappa_1 t} \frac{(\vartheta^*(t) - \vartheta_{T_f})}{\vartheta_0} + \tanh(\psi_1), \\ \vartheta^*(t) &= \begin{cases} \left(\vartheta_0 - \frac{t}{T_f}\right) e^{(1-\frac{T_f}{t})} + \vartheta_{T_f}, & 0 \leq t < T_f, \\ \vartheta_{T_f}, & t \geq T_f \end{cases}, \end{aligned}$$

式中: $\psi_2(t)$ 是预设性能函数; $M, \kappa_1, \vartheta_0, \vartheta_{T_f}$ 为设计参数, $M \geq 1, \kappa_1 \geq 0, \vartheta_0 \geq 1, \vartheta_{T_f} > 0$ 。

注 1 文献[20]中已证明 $\vartheta^*(t)$ 是一个光滑函数, 可知 $\psi_2(t)$ 也是一个光滑函数。

注 2 为了用传统的预设性能方法约束 $z_1(t)$, 则 $z_1(0)$ 必须满足 $-\psi_2(0) < z_1(0) < \psi_2(0)$ 的初始约束条件。由于 $|z_1(t)| < 1$ 对任意的 $e_1(t)$ 都成立, 故取 $M \geq 1$, 可得 $\psi_2(0) \geq 1$, 即可满足初始约束条件。因此该方法不依赖被约束变量 $e_1(t)$ 的初始状态, 当 $e_1(t)$ 的初始状态未知时, 仍满足预设性能约束条件。

综上, 当 $t \geq T_f$ 时, $\psi_1(t)$ 对 $e_1(t)$ 的约束等同于 $\psi_2(t)$ 对 $z_1(t)$ 的约束^[15]。

2.2 相关引理和定义

引理 1^[21] 对于 $\bar{\eta}_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n$ 和实数 $h \in (0, 1)$, 不等式成立:

$$(|\bar{\eta}_1| + \dots + |\bar{\eta}_n|)^h \leq |\bar{\eta}_1|^h + \dots + |\bar{\eta}_n|^h.$$

引理 2^[22] 定义在原点邻域 $\Omega \in \mathbf{R}^n$ 内的 C^1 的函数 $V(x): \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ 和实数 $m_0 > 0, 0 < \gamma < 1, 0 < \sigma < \infty$, 如果 $V(x)$ 在 Ω 上是正定的且 $V(0) = 0$, 则 $\dot{V}(x) \leq -m_0 V^\gamma(x) + \sigma$ 成立, 系统是实际有限时间稳定的。

定义 1^[23] 任意连续函数 $N(\zeta)$ 满足:

$$\limsup_{\phi \rightarrow \infty} \frac{1}{\phi} \int_0^{\phi} N(\zeta) d\zeta = +\infty,$$

$$\liminf_{\phi \rightarrow \infty} \frac{1}{\phi} \int_0^{\phi} N(\zeta) d\zeta = -\infty,$$

则 $N(\zeta)$ 被称为 Nussbaum 增益函数。

本研究中选取 $N(\zeta) = e^{\zeta^2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\zeta\right)$ 。

引理 3^[24] $V(\cdot)$ 和 $\zeta(\cdot)$ 是在区间 $[0, t_r]$ 上的光滑函数, 其中 $V(t) \geq 0, \forall t \in [0, t_r]$, 同时 $N(\cdot)$ 是一个光滑 Nussbaum 类型函数, 如果满足不等式:

$$V(t) \leq p + \int_0^t \sum_{i=1}^n (g_{\mu_i}(\tau) N(\zeta_i(\tau)) + q_i) \dot{\zeta}_i(\tau) d\tau, \quad \forall t \in [0, t_r],$$

式中, p, q_i 均为常数; $g_{\mu_i}(\tau)$ 为一个时变参数, 其值在未知闭区间 $L = [l^-, l^+]$, $0 \notin L$ 取得。则有 $V(t), \zeta_i(t), \int_0^t \sum_{i=1}^n (g_{\mu_i}(\tau) N(\zeta_i(\tau)) + q_i) \dot{\zeta}_i(\tau) d\tau$ 在 $[0, t_r]$ 上都是有界的。

3 未知初始跟踪条件的预设有限时间容错控制器设计

考虑坐标变换:

$$\xi_1 = \tan\left(\frac{\pi z_1}{2\psi_2}\right),$$

$$z_i = x_i - \alpha_{i-1}, \quad i = 2, \dots, n,$$

式中: $z_1 = \tanh(e_1)$, $e_1 = x_1 - y_d$ 为跟踪误差, ψ_2 为预设性能约束函数, α_{i-1} ($i = 1, \dots, n-1$) 为虚拟控制律。

第 1 步: 考虑 Lyapunov 函数为:

$$V_1 = \frac{1}{2} \xi_1^2 + \frac{1}{2r_1} \bar{\theta}_1^2, \quad (2)$$

式中: r_1 为正的设计参数; $\bar{\theta}_1 = \theta_1 - \hat{\theta}_1$ 是 $\hat{\theta}_1$ 对 θ_1 的估计误差, 其中 $\theta_1 = \|\mathbf{W}_1^{*T}\|^2$, \mathbf{W}_1^{*T} 是逼近未知非线性函数的径向基神经网络 (radial basis function neural network, RBFNN) 的权向量。

对式(2)求导可得:

$$\dot{V}_1 = \xi_1 \dot{\xi}_1 - \frac{1}{r_1} \bar{\theta}_1 \dot{\theta}_1 = \xi_1 Q \left[\frac{4}{(e^{e_1} + e^{-e_1})^2} (f_1(x_1, 0) + g_{\mu_1} z_2 + g_{\mu_1} \alpha_1 - \dot{y}_d) - \frac{z_1 \dot{\psi}_2}{\psi_2} \right] - \frac{1}{r_1} \bar{\theta}_1 \dot{\theta}_1, \quad (3)$$

式中 $Q = \frac{\pi}{2\psi_2 \cos^2\left(\frac{\pi z_1}{2\psi_2}\right)}$, 通过加减项 $\frac{1}{2b_1^2} \xi_1^2 Q^2$, 式(3)可改写为:

$$\dot{V}_1 = \xi_1 Q \frac{4}{(e^{e_1} + e^{-e_1})^2} g_{\mu_1} z_2 + \xi_1 Q \frac{4}{(e^{e_1} + e^{-e_1})^2} g_{\mu_1} \alpha_1 + \xi_1 Q \frac{4}{(e^{e_1} + e^{-e_1})^2} \bar{f}_1(\mathbf{Z}_1) - \frac{1}{r_1} \bar{\theta}_1 \dot{\theta}_1 - \frac{1}{2b_1^2} \xi_1^2 Q^2, \quad (4)$$

式中 $\bar{f}_1(\mathbf{Z}_1) = f_1(x_1, 0) - \dot{y}_d - \frac{(e^{e_1} + e^{-e_1})^2 z_1 \dot{\psi}_2}{4\psi_2} + \frac{(e^{e_1} + e^{-e_1})^2}{4} \frac{1}{2b_1^2} \xi_1 Q$ 。

利用 RBFNN 逼近 $\bar{f}_1(\mathbf{Z}_1)$ ^[10], 即

$$\bar{f}_1(\mathbf{Z}_1) = \mathbf{W}_1^{*T} \mathbf{S}_1(\mathbf{Z}_1) + \delta_1(\mathbf{Z}_1), \quad \mathbf{Z}_1 \in \Omega_{Z_1},$$

式中: $\mathbf{Z}_1 = [x_1 \quad y_d \quad \dot{y}_d \quad \psi_2 \quad \dot{\psi}_2]^T$; $\mathbf{S}_1(\mathbf{Z}_1)$ 为高斯基函数向量; $\delta_1(\mathbf{Z}_1)$ 为估计误差, 满足 $|\delta_i(\mathbf{Z}_i)| \leq \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n$, 其中 ε_i 为有界正常数。

根据 Young's 不等式和基本不等式, 有

$$\xi_1 Q \frac{4}{(e^{\varepsilon_1} + e^{-\varepsilon_1})^2} \bar{f}_1(\mathbf{Z}_1) \leq \frac{1}{2a_1^2} \xi_1^2 Q^2 \theta_1 \mathbf{S}_1^T \mathbf{S}_1 + \frac{1}{2} a_1^2 + \frac{1}{2b_1^2} \xi_1^2 Q^2 + \frac{1}{2} b_1^2 \varepsilon_1^2, \quad (5)$$

式中, a_i, b_i 为设计参数, $a_i > 0, b_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ 。将式(5)代入式(4)得

$$\dot{V}_1 \leq \xi_1 Q \frac{4}{(e^{\varepsilon_1} + e^{-\varepsilon_1})^2} g_{\mu 1} z_2 + \xi_1 Q \frac{4}{(e^{\varepsilon_1} + e^{-\varepsilon_1})^2} g_{\mu 1} \alpha_1 + \frac{1}{2a_1^2} \xi_1^2 Q^2 \theta_1 \mathbf{S}_1^T \mathbf{S}_1 + \frac{1}{2} a_1^2 + \frac{1}{2} b_1^2 \varepsilon_1^2 - \frac{1}{r_1} \tilde{\theta}_1 \dot{\hat{\theta}}_1。$$

设计虚拟控制律:

$$\alpha_1 = \frac{(e^{\varepsilon_1} + e^{-\varepsilon_1})^2}{4Q} N(\zeta_1) \eta_1, \quad (6)$$

式中,

$$\eta_1 = k_1 \xi_1^{2\gamma-1} + \frac{1}{2a_1^2} \xi_1 Q^2 \hat{\theta}_1 \mathbf{S}_1^T \mathbf{S}_1, \quad (7)$$

$$\dot{\zeta}_1 = \xi_1 \eta_1, \quad (8)$$

式中参数 $k_1 > 0$ 。

将式(6)~(8)代入式(5):

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & \xi_1 Q \frac{4}{(e^{\varepsilon_1} + e^{-\varepsilon_1})^2} g_{\mu 1} z_2 + \xi_1 Q \frac{4}{(e^{\varepsilon_1} + e^{-\varepsilon_1})^2} g_{\mu 1} \alpha_1 + \dot{\zeta}_1 - \zeta_1 + \frac{1}{2a_1^2} \xi_1^2 Q^2 \theta_1 \mathbf{S}_1^T \mathbf{S}_1 + \frac{1}{2} a_1^2 + \frac{1}{2} b_1^2 \varepsilon_1^2 - \frac{1}{r_1} \tilde{\theta}_1 \dot{\hat{\theta}}_1 \leq \\ & \xi_1 Q \frac{4}{(e^{\varepsilon_1} + e^{-\varepsilon_1})^2} g_{\mu 1} z_2 + g_{\mu 1} N(\zeta_1) \dot{\zeta}_1 + \dot{\zeta}_1 - k_1 \xi_1^{2\gamma} - \tilde{\theta}_1 \left(\frac{1}{r_1} \dot{\hat{\theta}}_1 - \frac{1}{2a_1^2} \xi_1^2 Q^2 \mathbf{S}_1^T \mathbf{S}_1 \right) + \frac{1}{2} a_1^2 + \frac{1}{2} b_1^2 \varepsilon_1^2。 \end{aligned}$$

选取自适应律:

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = \frac{r_1}{2a_1^2} \xi_1^2 Q^2 \mathbf{S}_1^T \mathbf{S}_1 - \lambda_1 \hat{\theta}_1, \quad (9)$$

式中, λ_i 为设计参数, $\lambda_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ 。

将式(9)代入式(8)得:

$$\dot{V}_1 \leq -k_1 \xi_1^{2\gamma} + \xi_1 Q \frac{4}{(e^{\varepsilon_1} + e^{-\varepsilon_1})^2} g_{\mu 1} z_2 + g_{\mu 1} N(\zeta_1) \dot{\zeta}_1 + \dot{\zeta}_1 + \frac{1}{2} a_1^2 + \frac{1}{2} b_1^2 \varepsilon_1^2 + \frac{\lambda_1}{r_1} \tilde{\theta}_1 \hat{\theta}_1。 \quad (10)$$

第 2 步:考虑 Lyapunov 函数为

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} z_2^2 + \frac{1}{2r_2} \tilde{\theta}_2^2。 \quad (11)$$

由式(10)(11)得

$$\dot{V}_2 \leq \dot{V}_1 + z_2 \dot{z}_2 - \frac{1}{r_2} \tilde{\theta}_2 \dot{\hat{\theta}}_2 \leq \dot{V}_1 + g_{\mu 2} z_2 z_3 + g_{\mu 2} z_2 \alpha_2 + z_2 (f_2(\bar{x}_2, 0) - \dot{\alpha}_1) - \frac{1}{r_2} \tilde{\theta}_2 \dot{\hat{\theta}}_2。$$

为了计算方便,通过加减项可得

$$\dot{V}_2 \leq -k_1 \xi_1^{2\gamma} + g_{\mu 1} N(\zeta_1) \dot{\zeta}_1 + \dot{\zeta}_1 + \frac{1}{2} a_1^2 + \frac{1}{2} b_1^2 \varepsilon_1^2 + \frac{\lambda_1}{r_1} \tilde{\theta}_1 \hat{\theta}_1 + g_{\mu 2} z_2 z_3 + g_{\mu 2} z_2 \alpha_2 + z_2 (f_2(\mathbf{Z}_2) - \dot{\alpha}_1) - \frac{1}{r_2} \tilde{\theta}_2 \dot{\hat{\theta}}_2 - \frac{1}{b_2^2} z_2^2, \quad (12)$$

式中 $f_2(\mathbf{Z}_2) = f_2(\bar{x}_2, 0) + \frac{1}{b_2^2} z_2^2 + g_{\mu 1} \xi_1 Q \frac{4}{(e^{\varepsilon_1} + e^{-\varepsilon_1})^2}$ 。

与式(5)处理方法相同,易得

$$z_2 \bar{f}_2(\mathbf{Z}_2) \leq \frac{1}{2a_2^2} z_2^2 \theta_2 \mathbf{S}_2^T \mathbf{S}_2 + \frac{1}{2} a_2^2 + \frac{1}{2b_2^2} z_2^2 + \frac{1}{2} b_2^2 \varepsilon_2^2, \quad (13)$$

式中 $\mathbf{Z}_2 = [x_1 \ x_2 \ \zeta_1 \ \hat{\theta}_1 \ y_d \ \psi_2]^T$ 。

将式(13)代入式(12)得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -k_1 \xi_1^{2\gamma} + g_{\mu 1} N(\zeta_1) \dot{\zeta}_1 + \dot{\zeta}_1 + \frac{1}{2} a_1^2 + \frac{1}{2} b_1^2 \varepsilon_1^2 + \frac{\lambda_1}{r_1} \tilde{\theta}_1 \hat{\theta}_1 + g_{\mu 2} z_2 z_3 + \\ & g_{\mu 2} z_2 \alpha_2 + \frac{1}{2a_2^2} z_2^2 \theta_2 \mathbf{S}_2^T \mathbf{S}_2 + \frac{1}{2} a_2^2 + \frac{1}{2} b_2^2 \varepsilon_2^2 - z_2 \dot{\alpha}_1 - \frac{1}{r_2} \tilde{\theta}_2 \dot{\hat{\theta}}_2 - \frac{1}{2b_2^2} z_2^2。 \end{aligned} \quad (14)$$

为了避免对虚拟控制律 α_1 的反复求导,引入跟踪微分器^[25]估计 $\dot{\alpha}_1$:

$$\begin{cases} \dot{v}_{2,1} = v_{2,2} \\ \dot{v}_{2,2} = -\bar{q}^2 \operatorname{sgn}(v_{2,1} - \alpha_1) |v_{2,1} - \alpha_1|^{\bar{q}} - \bar{q} v_{2,2} \end{cases},$$

式中: $v_{2,1}$ 、 $v_{2,2}$ 为跟踪微分器状态; \bar{q} 、 q 为设计参数, $\bar{q} > 0$, $0 < q < 1$ 。

定义跟踪微分器估计误差

$$\rho_2 = \dot{\alpha}_1 - v_{2,2} \quad (15)$$

由式(14)和式(15)得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -k_1 \xi_1^{2\gamma} + g_{\mu 1} N(\zeta_1) \dot{\zeta}_1 + \dot{\zeta}_1 + \frac{1}{2} a_1^2 + \frac{1}{2} b_1^2 \varepsilon_1^2 + \frac{\lambda_1}{r_1} \tilde{\theta}_1 \hat{\theta}_1 + g_{\mu 2} z_2 z_3 + g_{\mu 2} z_2 \alpha_2 + \frac{1}{2 a_2^2} z_2^2 \theta_2^T S_2^T S_2 + \\ & \frac{1}{2} a_2^2 + \frac{1}{2} b_2^2 \varepsilon_2^2 - z_2 \rho_2 - z_2 v_{2,2} - \frac{1}{r_2} \tilde{\theta}_2 \dot{\theta}_2 - \frac{1}{2 b_2^2} z_2^2 \rho_2^2 \end{aligned} \quad (16)$$

由 Young's 不等式,有

$$z_2 \rho_2 \leq \frac{1}{2 b_2^2} z_2^2 + \frac{1}{2} b_2^2 \rho_2^2 \quad (17)$$

将式(17)代入式(16)得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -k_1 \xi_1^{2\gamma} + g_{\mu 1} N(\zeta_1) \dot{\zeta}_1 + \dot{\zeta}_1 + \frac{1}{2} a_1^2 + \frac{1}{2} b_1^2 \varepsilon_1^2 + \frac{\lambda_1}{r_1} \tilde{\theta}_1 \hat{\theta}_1 + g_{\mu 2} z_2 z_3 + g_{\mu 2} z_2 \alpha_2 + \frac{1}{2 a_2^2} z_2^2 \theta_2^T S_2^T S_2 + \\ & \frac{1}{2} a_2^2 + \frac{1}{2} b_2^2 \varepsilon_2^2 + \frac{1}{2} b_2^2 \rho_2^2 - z_2 v_{2,2} - \frac{1}{r_2} \tilde{\theta}_2 \dot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (18)$$

选取虚拟控制律

$$\alpha_2 = N(\zeta_2) \eta_2, \quad (19)$$

式中,

$$\eta_2 = k_2 z_2^{2\gamma-1} + \frac{1}{2 a_2^2} z_2^2 \hat{\theta}_2^T S_2^T S_2 - v_{2,2}, \quad (20)$$

$$\dot{\zeta}_2 = z_2 \eta_2, \quad (21)$$

式中参数 $k_2 > 0$ 。

将式(19)~(21)代入式(18)得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -k_1 \xi_1^{2\gamma} + g_{\mu 1} N(\zeta_1) \dot{\zeta}_1 + \dot{\zeta}_1 + \frac{1}{2} a_1^2 + \frac{1}{2} b_1^2 \varepsilon_1^2 + \frac{\lambda_1}{r_1} \tilde{\theta}_1 \hat{\theta}_1 + g_{\mu 2} z_2 z_3 + g_{\mu 2} N(\zeta_2) \dot{\zeta}_2 + \\ & \dot{\zeta}_2 - k_2 z_2^{2\gamma} + \frac{1}{2} a_2^2 + \frac{1}{2} b_2^2 \varepsilon_2^2 + \frac{1}{2} b_2^2 \rho_2^2 - \tilde{\theta}_2 \left(\frac{1}{r_2} \dot{\theta}_2 - \frac{1}{2 a_2^2} z_2^2 S_2^T S_2 \right) \end{aligned} \quad (22)$$

选取自适应律

$$\dot{\hat{\theta}}_2 = \frac{r_2}{2 a_2^2} z_2^2 S_2^T S_2 - \lambda_2 \hat{\theta}_2 \quad (23)$$

将式(23)代入式(22)得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -k_1 \xi_1^{2\gamma} - k_2 z_2^{2\gamma} + g_{\mu 1} N(\zeta_1) \dot{\zeta}_1 + \dot{\zeta}_1 + \frac{1}{2} a_1^2 + \frac{1}{2} b_1^2 \varepsilon_1^2 + \frac{\lambda_1}{r_1} \tilde{\theta}_1 \hat{\theta}_1 + g_{\mu 2} z_2 z_3 + \\ & g_{\mu 2} N(\zeta_2) \dot{\zeta}_2 + \dot{\zeta}_2 + \frac{1}{2} a_2^2 + \frac{1}{2} b_2^2 \varepsilon_2^2 + \frac{1}{2} b_2^2 \rho_2^2 + \frac{\lambda_2}{r_2} \tilde{\theta}_2 \hat{\theta}_2 \end{aligned}$$

第 i 步 ($i=3, \dots, n-1$): 选取 Lyapunov 函数为

$$V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2} z_i^2 + \frac{1}{2 r_i} \tilde{\theta}_i^2,$$

求导得

$$\dot{V}_i = \dot{V}_{i-1} + z_i \dot{z}_i - \frac{1}{r_i} \tilde{\theta}_i \dot{\theta}_i \leq -k_1 \xi_1^{2\gamma} - \sum_{j=2}^{i-1} k_j z_j^{2\gamma} + g_{\mu 1} N(\zeta_1) \dot{\zeta}_1 + \dot{\zeta}_1 + \sum_{j=2}^{i-1} (g_{\mu j} N(\zeta_j) \dot{\zeta}_j + \dot{\zeta}_j) + \sum_{j=2}^{i-1} \frac{1}{2} b_j^2 \rho_j^2 +$$

$$\sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{2} a_j^2 + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{2} b_j^2 \varepsilon_j^2 + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\lambda_j}{r_j} \tilde{\theta}_j \hat{\theta}_j + g_{\mu i} z_i z_{i+1} + g_{\mu i} z_i \alpha_i + z_i (\bar{f}_i(\mathbf{Z}_i) - \dot{\alpha}_{i-1}) - \frac{1}{r_i} \tilde{\theta}_i \dot{\hat{\theta}}_i - \frac{1}{b_i^2} z_i^2, \quad (24)$$

式中 $\bar{f}_i(\mathbf{Z}_i) = f_i(\bar{\mathbf{x}}_i, 0) + \frac{1}{b_i^2} z_i + g_{\mu(i+1)} z_{i+1}$, 其中 $\mathbf{Z}_i = [x_1 \ \cdots \ x_i \ \zeta_1 \ \cdots \ \zeta_{i-1} \ \hat{\theta}_1 \ \cdots \ \hat{\theta}_{i-1} \ y_d \ \psi_2]^T$ 。则有

$$z_i \bar{f}_i(\mathbf{Z}_i) \leq \frac{1}{2a_i^2} z_i^2 \theta_i \mathbf{S}_i^T \mathbf{S}_i + \frac{1}{2} a_i^2 + \frac{1}{2b_i^2} z_i^2 + \frac{1}{2} b_i^2 \varepsilon_i^2. \quad (25)$$

将式(25)代入式(24)得

$$\begin{aligned} \dot{V}_i \leq & -k_1 \xi_1^{2\gamma} - \sum_{j=2}^{i-1} k_j z_j^{2\gamma} + g_{\mu 1} N(\zeta_1) \dot{\zeta}_1 + \dot{\zeta}_1 + \sum_{j=2}^{i-1} (g_{\mu j} N(\zeta_j) \dot{\zeta}_j + \dot{\zeta}_j) + \sum_{j=2}^{i-1} \frac{1}{2} b_j^2 \rho_j^2 + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{2} a_j^2 + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{2} b_j^2 \varepsilon_j^2 + \\ & \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\lambda_j}{r_j} \tilde{\theta}_j \hat{\theta}_j + g_{\mu i} z_i z_{i+1} + g_{\mu i} z_i \alpha_i + \frac{1}{2a_i^2} z_i^2 \theta_i \mathbf{S}_i^T \mathbf{S}_i + \frac{1}{2} a_i^2 + \frac{1}{2} b_i^2 \varepsilon_i^2 - z_i \dot{\alpha}_{i-1} - \frac{1}{r_i} \tilde{\theta}_i \dot{\hat{\theta}}_i - \frac{1}{2b_i^2} z_i^2. \end{aligned} \quad (26)$$

引入跟踪微分器对 $\dot{\alpha}_{i-1}$ 进行估计

$$\begin{cases} \dot{v}_{i,1} = v_{i,2} \\ \dot{v}_{i,2} = -\bar{q}^2 \operatorname{sgn}(v_{i,1} - \alpha_{i-1}) |v_{i,1} - \alpha_{i-1}|^q - \bar{q} v_{i,2} \end{cases},$$

式中 $v_{i,1}, v_{i,2}$ 为跟踪微分器的状态。

定义跟踪微分器误差

$$\rho_i = \dot{\alpha}_{i-1} - v_{i,2}. \quad (27)$$

将式(27)代入式(26)得

$$\begin{aligned} \dot{V}_i \leq & -k_1 \xi_1^{2\gamma} - \sum_{j=2}^{i-1} k_j z_j^{2\gamma} + g_{\mu 1} N(\zeta_1) \dot{\zeta}_1 + \dot{\zeta}_1 + \sum_{j=2}^{i-1} (g_{\mu j} N(\zeta_j) \dot{\zeta}_j + \dot{\zeta}_j) + \sum_{j=2}^{i-1} \frac{1}{2} b_j^2 \rho_j^2 + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{2} a_j^2 + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{2} b_j^2 \varepsilon_j^2 + \\ & \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\lambda_j}{r_j} \tilde{\theta}_j \hat{\theta}_j + g_{\mu i} z_i z_{i+1} + g_{\mu i} z_i \alpha_i + \frac{1}{2a_i^2} z_i^2 \theta_i \mathbf{S}_i^T \mathbf{S}_i + \frac{1}{2} a_i^2 + \frac{1}{2} b_i^2 \varepsilon_i^2 - z_i \rho_i - z_i v_{i,2} - \frac{1}{r_i} \tilde{\theta}_i \dot{\hat{\theta}}_i - \frac{1}{2b_i^2} z_i^2. \end{aligned} \quad (28)$$

由 Young's 不等式,有

$$z_i \rho_i \leq \frac{1}{2b_i^2} z_i^2 + \frac{1}{2} b_i^2 \rho_i^2,$$

则有

$$\begin{aligned} \dot{V}_i \leq & -k_1 \xi_1^{2\gamma} - \sum_{j=2}^{i-1} k_j z_j^{2\gamma} + g_{\mu 1} N(\zeta_1) \dot{\zeta}_1 + \dot{\zeta}_1 + \sum_{j=2}^{i-1} (g_{\mu j} N(\zeta_j) \dot{\zeta}_j + \dot{\zeta}_j) + \\ & \sum_{j=2}^{i-1} \frac{1}{2} b_j^2 \rho_j^2 + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{2} a_j^2 + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{2} b_j^2 \varepsilon_j^2 + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\lambda_j}{r_j} \tilde{\theta}_j \hat{\theta}_j + g_{\mu i} z_i z_{i+1} + \\ & g_{\mu i} z_i \alpha_i + \frac{1}{2a_i^2} z_i^2 \theta_i \mathbf{S}_i^T \mathbf{S}_i + \frac{1}{2} a_i^2 + \frac{1}{2} b_i^2 \varepsilon_i^2 + \frac{1}{2} b_i^2 \rho_i^2 - z_i v_{i,2} - \frac{1}{r_i} \tilde{\theta}_i \dot{\hat{\theta}}_i. \end{aligned} \quad (29)$$

选取虚拟控制律

$$\alpha_i = N(\zeta_i) \eta_i, \quad (30)$$

式中,

$$\eta_i = k_i z_i^{2\gamma-1} + \frac{1}{2a_i^2} z_i \hat{\theta}_i \mathbf{S}_i^T \mathbf{S}_i - v_{i,2}, \quad (31)$$

$$\dot{\zeta}_i = z_i \eta_i, \quad (32)$$

式中参数 $k_i > 0$ 。

将式(30)~(32)代入式(29)得

$$\begin{aligned} \dot{V}_i \leq & -k_1 \xi_1^{2\gamma} - \sum_{j=2}^{i-1} k_j z_j^{2\gamma} + \sum_{j=1}^{i-1} (g_{\mu j} N(\zeta_j) \dot{\zeta}_j + \dot{\zeta}_j) + \sum_{j=2}^{i-1} \frac{1}{2} b_j^2 \rho_j^2 + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{2} a_j^2 + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{2} b_j^2 \varepsilon_j^2 + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\lambda_j}{r_j} \tilde{\theta}_j \hat{\theta}_j + \\ & g_{\mu i} z_i z_{i+1} + g_{\mu i} N(\zeta_i) \dot{\zeta}_i + \dot{\zeta}_i - k_i z_i^{2\gamma} - \tilde{\theta}_i \left(\frac{1}{r_i} \dot{\hat{\theta}}_i - \frac{1}{2a_i^2} z_i^2 \mathbf{S}_i^T \mathbf{S}_i \right) + \frac{1}{2} a_i^2 + \frac{1}{2} b_i^2 \varepsilon_i^2 + \frac{1}{2} b_i^2 \rho_i^2. \end{aligned} \quad (33)$$

选取自适应律为

$$\dot{\hat{\theta}}_i = \frac{r_i}{2a_i^2} z_i^2 \mathbf{S}_i^T \mathbf{S}_i - \lambda_i \hat{\theta}_i. \quad (34)$$

将式(34)代入式(33),整理可得

$$\dot{V}_i \leq -k_1 \xi_1^{2\gamma} - \sum_{j=2}^i k_j z_j^{2\gamma} + g_{\mu i} z_i z_{i+1} + \sum_{j=1}^i (g_{\mu j} N(\zeta_j) \dot{\zeta}_j + \zeta_j) + \sum_{j=2}^i \frac{1}{2} b_j^2 \rho_j^2 + \sum_{j=1}^i \frac{1}{2} a_j^2 + \sum_{j=1}^i \frac{1}{2} b_j^2 \varepsilon_j^2 + \sum_{j=1}^i \frac{\lambda_j}{r_j} \tilde{\theta}_j \hat{\theta}_j.$$

第 n 步:考虑 Lyapunov 函数为

$$V_n = V_{n-1} + \frac{1}{2} z_n^2 + \frac{1}{2r_n} \tilde{\theta}_n^2,$$

求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_n = \dot{V}_{n-1} + z_n \dot{z}_n - \frac{1}{r_n} \tilde{\theta}_n \dot{\hat{\theta}}_n = & -k_1 \xi_1^{2\gamma} - \sum_{i=2}^{n-1} k_i z_i^{2\gamma} + \sum_{i=1}^{n-1} (g_{\mu i} N(\zeta_i) \dot{\zeta}_i + \zeta_i) + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{2} b_i^2 \rho_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} b_i^2 \varepsilon_i^2 + \\ & \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{r_i} \tilde{\theta}_i \hat{\theta}_i + g_{\mu n} \bar{\omega} z_n u_0 + g_{\mu n} \beta z_n + z_n (\bar{f}_n(\mathbf{Z}_n) - \alpha_{n-1}) - \frac{1}{r_n} \tilde{\theta}_n \dot{\hat{\theta}}_n - \frac{1}{b_n^2} z_n^2 - \frac{1}{2} g_{\mu n}^2 z_n^2, \end{aligned} \quad (35)$$

式中 $\bar{f}_n(\mathbf{Z}_n) = f_n(\bar{\mathbf{x}}_n, 0) + g_{\mu(n-1)} z_{n-1} + \frac{1}{b_n^2} z_n + \frac{1}{2} g_{\mu n}^2 z_n$, 其中 $\mathbf{Z}_n = [x_1 \cdots x_n \zeta_1 \cdots \zeta_{n-1} \hat{\theta}_1 \cdots \hat{\theta}_{n-1} y_d \psi_2]^T$.

则有

$$z_n \bar{f}_n(\mathbf{Z}_n) = z_n (\mathbf{W}_n^{*T} \mathbf{S}_n(\mathbf{Z}_n) + \delta_n(\mathbf{Z}_n)) \leq \frac{1}{2a_n^2} z_n^2 \theta_n \mathbf{S}_n^T \mathbf{S}_n + \frac{1}{2} a_n^2 + \frac{1}{2b_n^2} z_n^2 + \frac{1}{2} b_n^2 \varepsilon_n^2. \quad (36)$$

将式(36)代入式(35)得

$$\begin{aligned} \dot{V}_n \leq & -k_1 \xi_1^{2\gamma} - \sum_{i=2}^{n-1} k_i z_i^{2\gamma} + \sum_{i=1}^{n-1} (g_{\mu i} N(\zeta_i) \dot{\zeta}_i + \zeta_i) + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{2} b_i^2 \rho_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} a_i^2 + \\ & \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} b_i^2 \varepsilon_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{r_i} \tilde{\theta}_i \hat{\theta}_i + g_{\mu n} \bar{\omega} z_n u_0 + g_{\mu n} \beta z_n + \frac{1}{2a_n^2} z_n^2 \theta_n \mathbf{S}_n^T \mathbf{S}_n + \\ & \frac{1}{2} a_n^2 + \frac{1}{2} b_n^2 \varepsilon_n^2 - z_n \alpha_{n-1} - \frac{1}{r_n} \tilde{\theta}_n \dot{\hat{\theta}}_n - \frac{1}{2b_n^2} z_n^2 - \frac{1}{2} g_{\mu n}^2 z_n^2. \end{aligned} \quad (37)$$

引入跟踪微分器对 α_{n-1} 进行估计

$$\begin{cases} \dot{v}_{n,1} = v_{n,2} \\ \dot{v}_{n,2} = -\bar{q}^2 \operatorname{sgn}(v_{n,1} - \alpha_{n-1}) |v_{n,1} - \alpha_{n-1}|^{q-\bar{q}} v_{n,2} \end{cases} \quad \circ$$

定义跟踪微分器误差

$$\rho_n = \alpha_{n-1} - v_{n,2}. \quad (38)$$

由 Young's 不等式,有

$$z_n \rho_n \leq \frac{1}{2b_n^2} z_n^2 + \frac{1}{2} b_n^2 \rho_n^2, \quad (39)$$

$$g_{\mu n} \beta z_n \leq \frac{1}{2} g_{\mu n}^2 z_n^2 + \frac{1}{2} \beta^2. \quad (40)$$

将式(38)~(40)代入式(37)得

$$\begin{aligned} \dot{V}_n \leq & -k_1 \xi_1^{2\gamma} - \sum_{i=2}^{n-1} k_i z_i^{2\gamma} + \sum_{i=1}^{n-1} (g_{\mu i} N(\zeta_i) \dot{\zeta}_i + \zeta_i) + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{2} b_i^2 \rho_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} b_i^2 \varepsilon_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{r_i} \tilde{\theta}_i \hat{\theta}_i + \\ & g_{\mu n} \bar{\omega} z_n u_0 + \frac{1}{2a_n^2} z_n^2 \theta_n \mathbf{S}_n^T \mathbf{S}_n + \frac{1}{2} a_n^2 + \frac{1}{2} b_n^2 \varepsilon_n^2 + \frac{1}{2} b_n^2 \rho_n^2 + \frac{1}{2} \beta^2 - z_n v_{n,2} - \frac{1}{r_n} \tilde{\theta}_n \dot{\hat{\theta}}_n. \end{aligned} \quad (41)$$

设计具有执行器故障的实际输入

$$u_0 = N(\zeta_n) \eta_n, \quad (42)$$

式中:

$$\eta_n = k_n z_n^{2\gamma-1} + \frac{1}{2a_n^2} z_n \hat{\theta}_n \mathbf{S}_n^T \mathbf{S}_n - v_{n,2}, \quad (43)$$

$$\dot{\zeta}_n = z_n \eta_n \quad (44)$$

式中参数 $k_n > 0$ 。

将式(42)~(44)代入式(41)得

$$\begin{aligned} \dot{V}_n \leq & -k_1 \xi_1^{2\gamma} - \sum_{i=2}^{n-1} k_i z_i^{2\gamma} + \sum_{i=1}^{n-1} (g_{\mu i} N(\zeta_i) \dot{\zeta}_i + \dot{\zeta}_i) + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{2} b_i^2 \rho_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} b_i^2 \varepsilon_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{r_i} \tilde{\theta}_i \hat{\theta}_i + \\ & g_{\mu n} \bar{\omega} N(\zeta_n) \dot{\zeta}_n + \dot{\zeta}_n - k_n z_n^{2\gamma} - \tilde{\theta}_n \left(\frac{1}{r_n} \dot{\hat{\theta}}_n - \frac{1}{2a_n^2} z_n^2 S_n^T S_n \right) + \frac{1}{2} a_n^2 + \frac{1}{2} b_n^2 \varepsilon_n^2 + \frac{1}{2} b_n^2 \rho_n^2 + \frac{1}{2} \beta^2. \end{aligned}$$

选取自适应律为

$$\dot{\hat{\theta}}_n = \frac{r_n}{2a_n^2} z_n^2 S_n^T S_n - \lambda_n \hat{\theta}_n \quad (45)$$

最后整理得

$$\begin{aligned} \dot{V}_n \leq & -k_1 \xi_1^{2\gamma} - \sum_{i=2}^n k_i z_i^{2\gamma} + \sum_{i=1}^{n-1} (g_{\mu i} N(\zeta_i) \dot{\zeta}_i + \dot{\zeta}_i) + g_{\mu n} \bar{\omega} N(\zeta_n) \dot{\zeta}_n + \dot{\zeta}_n + \\ & \sum_{i=2}^n \frac{1}{2} b_i^2 \rho_i^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} a_i^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} b_i^2 \varepsilon_i^2 + \frac{1}{2} \beta^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{r_i} \tilde{\theta}_i \hat{\theta}_i. \end{aligned} \quad (46)$$

至此,可得到系统(1)的预设性能有限时间容错跟踪控制器设计定理。

定理 1 对于满足假设 1~2 的系统(1),如果虚拟控制律按式(6)(19)(30)选取,实际控制律按式(42)选取,自适应律按式(9)(23)(34)(45)选取,则该系统的输出可以跟踪参考信号,跟踪误差被约束在预设性能函数内,并且该误差能够在有限时间内收敛到平衡点附近,同时整个闭环系统是实际有限时间有界稳定的。

证明 1)实际有限时间稳定

式(46)可以改写为

$$\begin{aligned} \dot{V}_n \leq & -k_1 \xi_1^{2\gamma} - \sum_{i=2}^n k_i z_i^{2\gamma} + \sum_{i=1}^{n-1} (g_{\mu i} N(\zeta_i) + 1) \dot{\zeta}_i + (g_{\mu n} \bar{\omega} N(\zeta_n) + 1) \dot{\zeta}_n + \\ & \sum_{i=2}^n \frac{1}{2} b_i^2 \rho_i^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} a_i^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} b_i^2 \varepsilon_i^2 + \frac{1}{2} \beta^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{r_i} \tilde{\theta}_i \hat{\theta}_i - \left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{2r_i} \tilde{\theta}_i^2 \right)^\gamma + \left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{2r_i} \tilde{\theta}_i^2 \right)^\gamma. \end{aligned} \quad (47)$$

在式(47)中,令 $(g_{\mu n} \bar{\omega} N(\zeta_n) + 1) \dot{\zeta}_n$ 项中 $g_{\mu n} \bar{\omega} = \hat{g}_{\mu n}$,则 $\hat{g}_{\mu n}$ 有界且不为 0,依然满足引理 3,因此

$\sum_{i=1}^{n-1} (g_{\mu i} N(\zeta_i) \dot{\zeta}_i + \dot{\zeta}_i) + g_{\mu n} \bar{\omega} N(\zeta_n) \dot{\zeta}_n + \dot{\zeta}_n$ 是有界的。

考虑式(47)中右边的第 9、11 项,由 Young's 不等式可知以下不等式成立:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{r_i} \tilde{\theta}_i \hat{\theta}_i \leq \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{2r_i} \theta_i^2 - \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{2r_i} \tilde{\theta}_i^2, \quad (48)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{2r_i} \tilde{\theta}_i^2 \right)^\gamma \leq (1-\gamma) \gamma^{1-\gamma} + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{2r_i} \tilde{\theta}_i^2. \quad (49)$$

将式(48)(49)代入式(47)得

$$\begin{aligned} \dot{V}_n \leq & -k_1 \xi_1^{2\gamma} - \sum_{i=2}^n k_i z_i^{2\gamma} - \left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{2r_i} \tilde{\theta}_i^2 \right)^\gamma + \sum_{i=1}^{n-1} (g_{\mu i} N(\zeta_i) + 1) \dot{\zeta}_i + (g_{\mu n} \bar{\omega} N(\zeta_n) + 1) \dot{\zeta}_n + \\ & \sum_{i=2}^n \frac{1}{2} b_i^2 \rho_i^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} a_i^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} b_i^2 \varepsilon_i^2 + \frac{1}{2} \beta^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{2r_i} \theta_i^2 + (1-\gamma) \gamma^{1-\gamma}. \end{aligned} \quad (50)$$

由引理 1 得

$$\dot{V}(\mathbf{Z}) \leq -m_0 \left(-\frac{1}{2} \xi_1^2 - \sum_{i=2}^n \frac{1}{2} z_i^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2r_i} \tilde{\theta}_i^2 \right)^\gamma + \sigma = -m_0 V^\gamma(\mathbf{Z}) + \sigma, \quad (51)$$

式中: $\mathbf{Z}_n = [\xi_1 \quad z_2 \quad \cdots \quad z_n \quad \tilde{\theta}_1 \quad \cdots \quad \tilde{\theta}_n]^T$; m_0 为设计参数, $m_0 = \min \{ 2k_i, \lambda_i (i=1, \dots, n) \}$ 。

$$\sigma = \sum_{i=2}^n \frac{1}{2} b_i^2 \rho_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (g_{\mu i} N(\zeta_i) + 1) \dot{\zeta}_i + (g_{\mu n} \bar{\omega} N(\zeta_n) + 1) \dot{\zeta}_n + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} a_i^2 +$$

$$\frac{1}{2}\beta^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}b_i^2 \varepsilon_i^2 + (g_{\mu n} \bar{\omega} N(\zeta_n) + 1)\zeta_n + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}a_i^2 + \frac{1}{2}\beta^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}b_i^2 \varepsilon_i^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{2r_i} \theta_i^2 + (1-\gamma)\gamma^{1-\gamma}$$

根据引理 2 知闭环系统是实际有限时间稳定的,且 $\xi_1, z_2, \dots, z_n, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_n, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_n$ 均有界。

2) 系统信号有界且满足预设性能要求

因为 $\xi_1 = \tan\left(\frac{\pi z_1}{2\psi_2}\right)$ 有界, $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = \infty$ 且 $|z_1(0)| < \psi_2(0)$, 所以 $|z_1(t)| < \psi_2(t)$ 。在 $t \geq T_f$ 时, $-\psi_1(t) < e_1(t) < \psi_1(t)$, 又由于在 $0 \leq t \leq T_f$ 时 $e_1(t)$ 是连续函数, 故当 $t \geq 0$ 时, $e_1(t)$ 都是有界的。根据坐标变换, 易知 x_1 是有界的, 由系统状态方程可知, x_2 也是有界的。因为 $z_2 = x_2 - \alpha_1$, 则 α_1 是有界的。以此类推 $\alpha_i (i=2, \dots, n-1)$ 、 $x_i (i=3, \dots, n)$ 和 u_0 都有界。因此, 系统中信号有界且 $e_1(t)$ 满足预设性能要求。

4 仿真研究

考虑文献[26]中的倒立摆系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, u) \end{cases}$$

式中,

$$f_2(x_1, x_2, u) = \left[g \sin(x_1) - \frac{mlx_2^2 \sin(x_1) \cos(x_1)}{m+m_c} \right] / \left[l \left(\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2(x_1)}{m+m_c} \right) \right] + \left(\frac{\cos(x_1)}{m+m_c} \right) / \left[l \left(\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2(x_1)}{m+m_c} \right) \right] u,$$

其中, x_1 和 x_2 分别为倒立摆的偏转角度和角速度, 重力加速度 $g=9.8 \text{ m/s}^2$, 摆杆的质量 $m=0.1 \text{ kg}$, 小车的质量 $m_c=1 \text{ kg}$, 摆杆的长度 $l=0.5 \text{ m}$ 。在 $t=4 \text{ s}$ 时, 系统处于并发性故障, 即 $u=0.5u_0+0.5$ 。系统初始状态 $x_1(0)=1.2, x_2(0)=0$, 自适应参数的初始状态 $\hat{\theta}_1(0)=0.1, \hat{\theta}_2(0)=0.2$, Nussbaum 参数的初始状态 $\zeta_1(0)=1.1, \zeta_2(0)=1.1$ 。系统设计参数 $k_1=1, k_2=50$, 自适应参数 $r_1=0.1, r_2=0.1, \lambda_1=280, \lambda_2=10, a_1=2, a_2=2$, 跟踪微分器参数 $\bar{q}=5, q=0.5$, 预设性能参数 $\psi_0=0.4, \psi_\infty=0.02, \kappa=0.7, M=2, \kappa_1=0, T_f=1.5, \vartheta_0=5, \vartheta_{T_f}=3, \gamma=0.9$, 参考轨迹 $y_d=0.5\sin(0.5t)$ 。神经网络 $W_1^* \text{T} S_1$ 有 7⁵ 个节点, 均匀分布在 $[-3, 3] \times [-3, 3] \times [-3, 3] \times [-3, 3] \times [-3, 3]$ 上, 神经网络 $W_2^* \text{T} S_2$ 有 7⁶ 个节点, 均匀分布在 $[-3, 3] \times [-3, 3] \times [-3, 3] \times [-3, 3] \times [-3, 3] \times [-3, 3]$ 上。根据定理 1 设计系统的控制器, 利用 MATLAB 进行仿真, 仿真结果如图 1~4 所示。

图 1 为跟踪效果图。由图 1 可以看出系统输出可以在有限时间内跟踪上参考信号。图 2 为跟踪误差曲线图。由图 2 可以看出当初始状态在预设性能函数范围外部时, 跟踪误差依然能够被约束在预设性能函数内, 并且系统在执行器故障和控制方向未知的情况下仍具有很好的跟踪性能。图 3 为系统控制输入与实际输入图。由图 3 可以看出控制信号具有很好的稳定性。图 4 为系统自适应参数图。仿真结果表明, 所设计的控制方法具有可行性。

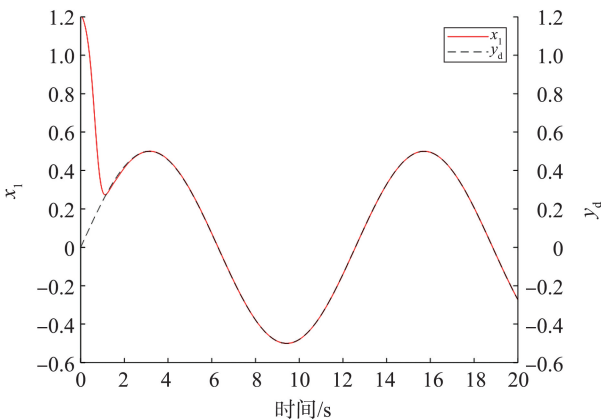


图 1 跟踪效果
Fig.1 Tracking effect

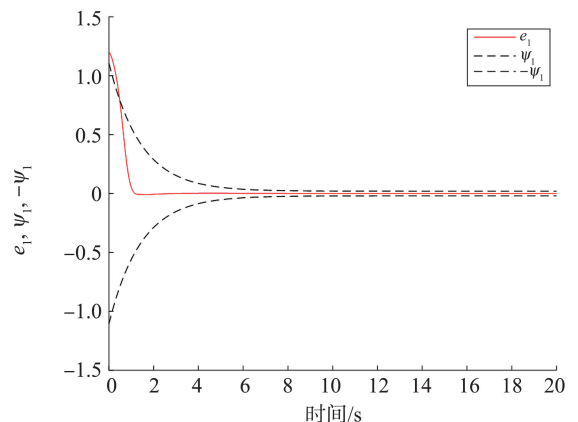


图 2 误差曲线
Fig.2 Error curve

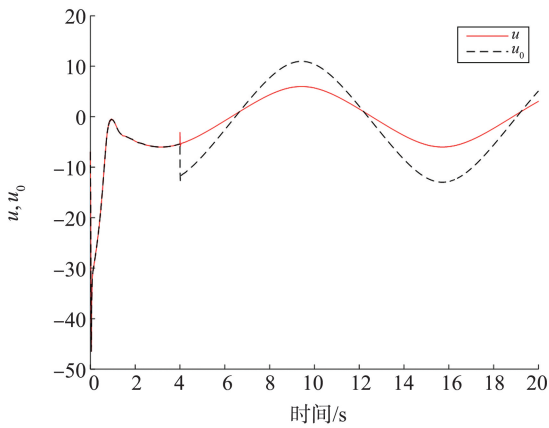


图 3 控制输入与实际输入
Fig.3 Control input and actual input

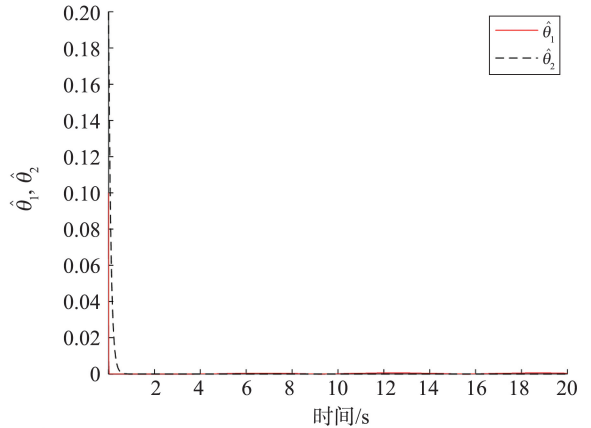


图 4 自适应参数
Fig.4 Adaptive parameters

为了验证所提预设性能控制算法的优越性,图 5 给出了系统在不同初始条件下的仿真效果图。由图 5 可以看出无论系统的初始偏差是否在预设函数范围内,都可保证系统的跟踪误差在同样预设时间下被约束在预设函数界内,确保了系统跟踪的动态性能和稳态性能。

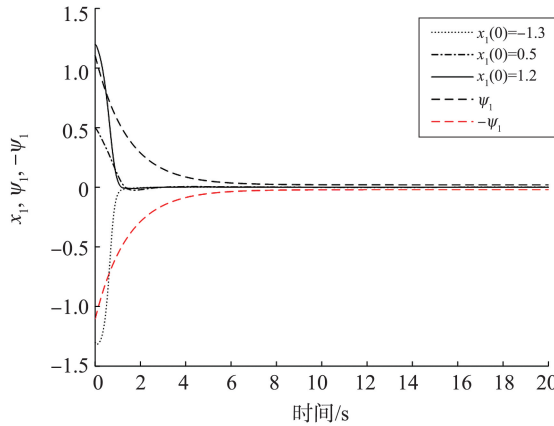


图 5 不同初始条件下的预设约束效果
Fig.5 Preassigned constraint effects under different initial conditions

5 结论

本研究考虑了非仿射纯反馈系统的执行器故障和控制方向未知问题,在跟踪误差的初始状态未知时,进行预设性能有限时间容错控制。借助一种新的预设性能控制设计方法,解决了一般预设性能方法在初始跟踪条件未知情况下无法使用的问题,同时避免了系统在执行器故障时控制性能下降的问题,并用 Nussbaum 增益技术对系统的未知控制方向进行了处理。设计的控制器能够保证系统的跟踪误差在任何初始值下都能在有限时间内收敛到平衡点的小邻域内。最后,仿真结果验证了本研究提出的控制方法的有效性和优越性。

参考文献:

[1] 周卫东, 廖成毅, 郑兰, 等. 具有未知死区的 SISO 非仿射非线性系统间接自适应模糊控制[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2014, 46(10): 110-116.
ZHOU Weidong, LIAO Chengyi, ZHENG Lan, et al. Indirect adaptive fuzzy control for SISO nonaffine nonlinear system with unknown dead-zone input[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2014, 46(10): 110-116.

[2] ZHOU Q, WANG L, WU C, et al. Adaptive fuzzy tracking control for a class of pure-feedback nonlinear systems with time-varying delay and unknown dead zone[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2017, 329: 36-60.

[3] 全权, 陈炼. 非仿射非线性系统控制综述[J]. 北京航空航天大学学报, 2024, 50(8): 2367-2381.
QUAN Quan, CHEN Lian. Control of non-affine nonlinear systems: a survey[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2024, 50(8): 2367-2381.

- [4] YANG Y, YUE D. Distributed adaptive fault-tolerant control of pure-feedback nonlinear multi-agent systems with actuator failures[J]. *Neurocomputing*, 2017, 221: 72-84.
- [5] MA L, WANG Z, WANG C. Adaptive neural network state constrained fault-tolerant control for a class of pure-feedback systems with actuator faults[J]. *Neurocomputing*, 2022, 490: 431-440.
- [6] ZUO G, WANG Y, LU Z. Adaptive finite-time control for pure-feedback systems under time-varying state constraints and actuator failures[C]//*Proceedings of 2020 Chinese Automation Congress (CAC)*. Shanghai, China: IEEE, 2020: 6999-7004.
- [7] LIU X, ZHAI D, LI T, et al. Fuzzy-approximation adaptive fault-tolerant control for nonlinear pure-feedback systems with unknown control directions and sensor failures[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2019, 356: 28-43.
- [8] 何诚, 吴剑, 张哲. 具有输入饱和的纯反馈系统有限时间跟踪控制[J]. *电光与控制*, 2021, 28(8): 11-16.
HE Cheng, WU Jian, ZHANG Zhe. Finite-time tracking control of pure-feedback systems with input saturation[J]. *Electronics Optics & Control*, 2021, 28(8): 11-16.
- [9] LIU Y, ZHU Q. Adaptive neural network finite-time tracking control of full state constrained pure feedback stochastic nonlinear systems[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2020, 357(11): 6738-6759.
- [10] LIU J, NIU B, ZHAO P, et al. Almost fast finite-time adaptive tracking control for a class of full-state constrained pure-feedback nonlinear systems[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2020, 30(17): 7517-7532.
- [11] CHEN L, YANG H. Adaptive neural prescribed performance output feedback control of pure feedback nonlinear systems using disturbance observer[J]. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2020, 34(4): 520-542.
- [12] CHEN G, ZHAO Y. Distributed adaptive output-feedback tracking control of non-affine multi-agent systems with prescribed performance[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2018, 35(13): 6087-6110.
- [13] 胡剑波, 王应洋, 刘炳琪, 等. 非仿射纯反馈系统自适应神经网络快速预设性能控制[J]. *控制理论与应用*, 2020, 37(10): 2218-2230.
HU Jianbo, WANG Yingyang, LIU Bingqi. Adaptive neural fast prescribed performance control for non-affine pure-feedback systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(10): 2218-2230.
- [14] 陈明, 李小华. 基于预设性能的非仿射非线性系统自适应有限时间控制[J]. *控制与决策*, 2020, 35(5): 1259-1264.
CHEN Ming, LI Xiaohua. Adaptive finite-time tracking control for nonaffine nonlinear systems based on prescribed performance[J]. *Control and Decision*, 2020, 35(5): 1259-1264.
- [15] LIU H, LI X, LIU X. A bounded-mapping-based prescribed constraint tracking control method without initial condition[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2023, 111(4): 3451-3468.
- [16] RAMEZANI Z, AREFI M, ZARGARZADEH H, et al. Neuro observer-based control of pure feedback MIMO systems with unknown control direction[J]. *IET Control Theory & Applications*, 2017, 11(2): 213-224.
- [17] XU Q Y, LI X D. HONN-based adaptive ILC for pure-feedback nonaffine discrete-time systems with unknown control directions[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2019, 31(1): 212-224.
- [18] 张思洁, 吴怀宇, 郑秀娟. 具有执行器故障的四旋翼无人机有限时间容错控制[J]. *控制理论与应用*, 2023, 40(7): 1270-1276.
ZHANG Sijie, WU Huaiyu, ZHENG Xiujuan. Finite-time fault tolerant control of quadrotor UAV with actuator faults[J]. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(7): 1270-1276.
- [19] ZHANG T P, SHI X C, ZHU Q, et al. Adaptive neural tracking control of pure-feedback nonlinear systems with unknown gain signs and unmodeled dynamics[J]. *Neurocomputing*, 2013, 121: 290-297.
- [20] LIU Y, LIU X, JING Y. Adaptive neural networks finite-time tracking control for non-strict feedback systems via prescribed performance[J]. *Information Sciences*, 2018, 468: 29-46.
- [21] HUANG J, WEN C, WANG W, et al. Design of adaptive finite-time controllers for nonlinear uncertain systems based on given transient specifications[J]. *Automatica*, 2016, 69: 395-404.
- [22] WANG H, CHEN B, LIU C, et al. Adaptive finite-time control for a class of uncertain high-order non-linear systems based on fuzzy approximation[J]. *IET Control Theory & Applications*, 2017, 11(5): 677-684.
- [23] LIANG B, ZHENG S, AHN C K, et al. Adaptive fuzzy control for fractional-order interconnected systems with unknown control directions[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2020, 30(1): 75-87.
- [24] CHANG Y, ZHOU P, NIU B, et al. Switched-observer-based adaptive output-feedback control design with unknown gain for pure-feedback switched nonlinear systems via average dwell time[J]. *International Journal of Systems Science*, 2021, 52(9): 1731-1745.
- [25] CHENG C, DI Y, XU J, et al. Advanced backstepping control based on ADR for non-affine non-strict feedback nonlinear systems[J]. *Automatika*, 2018, 59(2): 220-230.
- [26] ZHANG J X, YANG G H. Prescribed performance fault-tolerant control of uncertain nonlinear systems with unknown control directions[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(12): 6529-6535.