

有向 Poisson 网络模型的渐近性理论

罗敬, 秦兆伦

(中南民族大学 数学与统计学学院, 武汉 430074)

摘要 研究了有向 Poisson 网络模型极大似然估计量的渐近性理论. 考虑当网络顶点的个数趋于无穷大时, 推导出有向 Poisson 网络模型极大似然估计量线性组合的中心极限定理. 此外, 通过数值模拟对理论结果进行了验证, 期望能够为有向加权网络模型的统计推断提供坚实的理论基础.

关键词 有向网络; Poisson 模型; 极大似然估计; 中心极限定理; 渐近正态性

中图分类号 O212.1 **文献标志码** A **文章编号** 1672-4321(2025)01-0118-08

doi: 10.20056/j.cnki.ZNMDZK.20250114

Asymptotic theory of directed Poisson network models

LUO Jing, QIN Zhaolun

(College of Mathematics and Statistics, South-Central Minzu University, Wuhan 430074, China)

Abstract This research explores the asymptotic theory of maximum likelihood estimators in directed Poisson network models. It particularly focuses on deriving the central limit theorem for linear combinations of these estimators as the number of network vertices grows to infinity. Additionally, the paper validates the theoretical results through numerical simulations, aiming to provide a robust theoretical foundation for statistical inference in directed weighted network models.

Keywords directed network; Poisson model; MLE; central limit theorem; asymptotic normality

当前各种平台(京东、微信、支付宝等)收集了大量网络数据, 如何有效地分析所获得的数据尤为重要. 为了刻画网络数据度一致性的特征, 在无向网络中, 文献[1]研究了一类被称为 β 的网络模型的极大似然估计量的相合性; 文献[2]进一步分析了该模型极大似然估计量的渐近正态性; 文献[3]证明了极大熵模型极大似然估计量的相合性; 文献[4]进一步研究了该模型极大似然估计量的渐近正态性; 文献[5]研究了一类由顶点强度参数化的随机图模型, 并使用矩估计法证明了该类模型矩估计量的渐近理论; 文献[6]证明了有序网络所有矩估计量线性组合的中心极限定理. 网络数据有时也有方向, 如在信息网络中, 服务器a向服务器b发送信息等. 文献[7]研究了当网络顶点个数趋于无穷时, 三类有向加权网络模型(二元权重, 无穷离散权重, 无穷连续权重)的极大似然估计量的相合性和渐近

正态性; 文献[8]研究了有限离散有向加权网络模型极大似然估计量的相合性和渐近正态性; 文献[9]证明了有限离散有向加权网络模型极大似然估计量线性组合的中心极限定理. 基于此, 本文将研究有向 Poisson 网络模型极大似然估计量的渐近性.

1 基础知识

1.1 有向网络模型

首先建立一个具有 n 个顶点的有向随机图 G_n , 顶点依次标记为: $1, 2, \dots, n$. 令 $a_{i,j}$ 表示顶点 i 到顶点 j 的权重, 其中 $a_{i,j} \in \Omega$, $\Omega = (1, 2, \dots)$, 则 G_n 的邻接矩阵为 $A = (a_{i,j})_{n \times n}$. 在本文中, 考虑离散取值为无穷的情况, 即 $\Omega = (1, 2, \dots, \infty)$, 且假定 G_n 没有自循环, 即 $a_{i,i} = 0$. 定义 $d_i = \sum_{j \neq i} a_{i,j}$ 为顶点 i 的出度, $b_j = \sum_{i \neq j} a_{i,j}$

收稿日期 2024-04-15

* 通信作者 罗敬(1987-), 男, 副教授, 博士, 研究方向: 应用统计, E-mail: stjluo@scuec.edu.cn

基金项目 教育部人文社会科学研究青年项目资助(24YJC910006)

为顶点 j 的入度, 则 $d = (d_1, \dots, d_n)^T$ 为图 G_n 的出度序列, $b = (b_1, \dots, b_n)^T$ 为图 G_n 的入度序列, $\{d, b\}$ 为图 G_n 的双度序列. 图 G_n 的概率质量函数是标准的指数形式, 且以双度序列为充分统计量, 即:

$$P(G_n) = \exp(\alpha^T d + \beta^T b - z(\alpha, \beta)), \quad (1)$$

其中 $z(\alpha, \beta)$ 是关于参数 α 和 β 的函数, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$ 是出度序列的参数向量, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)^T$ 是入度序列的参数向量, α_i 量化了顶点 i 到顶点 $j (j \neq i)$ 出边的影响力, β_j 量化了顶点 $i (i \neq j)$ 到顶点 j 入边的影响力. 由上述定义可以得到 $\sum_{i=1}^n d_i = \sum_{j=1}^n b_j$. 如果将 (α, β) 转换为 $(\alpha - c, \beta + c)$, 概率质量函数 $P(G_n)$ 不会改变, 因此有必要对 α 和 β 进行约束. 根据文献 [7], 图 G_n 共有 $n \times (n - 1)$ 个相互独立的随机变量 $a_{i,j}, i \neq j$, 且为保证参数的可识别性, 本文设置 $\beta_n = 0$. 假设 $a_{i,j}$ 满足参数为 $\lambda = e^{\alpha_i + \beta_j}$ 的 Poisson 分布, 即:

$$P(a_{i,j} = a) = \frac{e^{-a(\alpha_i + \beta_j)}}{a!} \exp(-e^{\alpha_i + \beta_j}), \quad a = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

令 $\theta = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_{n-1})^T, g = (d_1, \dots, d_n, b_1, \dots, b_{n-1})^T$,

$$z(\theta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n e^{\alpha_i + \beta_j}.$$

1.2 极大似然估计

在满足上式 (2) 中假定分布的情况下, 可以得到以下似然函数和似然方程组.

似然函数如下:

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^n \alpha_i d_i + \sum_{j=1}^n \beta_j b_j - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n e^{\alpha_i + \beta_j}. \quad (3)$$

似然方程组:

$$\begin{cases} d_i = E(d_i) = \sum_{j=1, j \neq i}^n E(a_{i,j}) = \sum_{j=1, j \neq i}^n e^{\alpha_i + \beta_j}, \\ i = 1, \dots, n, \\ b_j = E(b_j) = \sum_{i=1, i \neq j}^n E(a_{i,j}) = \sum_{i=1, i \neq j}^n e^{\alpha_i + \beta_j}, \\ j = 1, \dots, n - 1. \end{cases} \quad (4)$$

定义系统函数:

$$\begin{cases} F_i(\theta) = d_i - E(d_i) = \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j} - e^{\alpha_i + \beta_j}, \\ i = 1, \dots, n, \\ F_{n+j}(\theta) = b_j - E(b_j) = \sum_{i=1, i \neq j}^n a_{i,j} - e^{\alpha_i + \beta_j}, \\ j = 1, \dots, n - 1, \\ F(\theta) = (F_1(\theta), \dots, F_n(\theta), F_{n+1}(\theta), \dots, \\ F_{2n-1}(\theta))^T, \end{cases} \quad (5)$$

由似然方程组构建的系统函数可以为后续计算 $F'(\theta)$ 提供方便. $F(\theta) = 0$ 的解是极大似然估计方程 $g = E(g)$ 诱导出的 θ 的极大似然估计值, 用 $\hat{\theta}$ 表示满足 $F(\hat{\theta}) = 0$ 的 θ 的极大似然估计值, 其中 $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_{n-1})^T$. 考虑参数空间:

$$D = \{\alpha, \beta \in R^n: 0 < q_n < \alpha_i + \beta_j \leq Q_n, 1 \leq i \neq j \leq n\},$$

其中, $q_n = \min_{i \neq j} (\alpha_i + \beta_j), Q_n = \max_{i \neq j} (\alpha_i + \beta_j)$.

1.3 预备知识及相关引理

对于向量 $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in R^n, \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ 表示向量 x 的 l_∞ 范数. 对于任意一个 $n \times n$ 阶矩阵

$$J = (J_{i,j}), \text{ 定义 } \|J\|_\infty = \max_{x \neq 0} \frac{\|Jx\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |J_{i,j}|, \text{ 定}$$

义 $A = (a_{i,j})$ 的矩阵范数 $\|\cdot\|$ 为 $\|A\| = \max_{i,j} |a_{i,j}|$. 引进一类矩阵, 给定两个正数 m 和 M 且满足 $M \geq m > 0$, 如果满足以下条件, 就说 $(2n - 1) \times (2n - 1)$ 的矩阵 $V = (v_{i,j}) \in \mathcal{L}_n(m, M)$:

$$\begin{aligned} m &\leq v_{i,i} - \sum_{j=n+1}^{2n-1} v_{i,j} \leq M, \quad i = 1, \dots, n - 1; \\ v_{n,n} &= \sum_{j=n+1}^{2n-1} v_{n,j}, \\ v_{i,j} &= 0, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j, \\ v_{i,j} &= 0, \quad i, j = n + 1, \dots, 2n - 1, \quad i \neq j, \\ m &\leq v_{i,j} = v_{j,i} \leq M, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = n + 1, \dots, \\ &\quad 2n - 1, \quad j \neq n + i, \\ v_{i,n+i} &= v_{n+i,i} = 0, \quad i = 1, \dots, n - 1, \\ v_{i,i} &= \sum_{k=1}^n v_{k,i} = \sum_{k=1}^n v_{i,k}, \quad i = n + 1, \dots, 2n - 1. \end{aligned} \quad (6)$$

显然, 如果矩阵 $V = (v_{i,j}) \in \mathcal{L}_n(m, M)$, 则 V 是一个 $(2n - 1) \times (2n - 1)$ 的主对角占优的对称非负定矩阵. 定义 $v_{2n,i} = v_{i,2n} = v_{i,i} - \sum_{j=1, j \neq i}^{2n-1} v_{i,j}, v_{2n,2n} = \sum_{i=1}^{2n-1} v_{2n,i}, i = 1, \dots, 2n - 1$. 文献 [7] 中建议用 $S = (s_{i,j})$ 来近似 V 的逆, 即 V^{-1} , 有如下定义:

$$s_{i,j} = \begin{cases} \frac{\delta_{i,j}}{v_{i,i}} + \frac{1}{v_{2n,2n}}, & i, j = 1, \dots, n, \\ -\frac{1}{v_{2n,2n}}, & i = 1, \dots, n \quad j = n + 1, \dots, 2n - 1, \\ -\frac{1}{v_{2n,2n}}, & i = n + 1, \dots, 2n - 1 \quad j = 1, \dots, n, \\ \frac{\delta_{i,j}}{v_{i,i}} + \frac{1}{v_{2n,2n}}, & i, j = n + 1, \dots, 2n - 1, \end{cases} \quad (7)$$

其中, 当 $i = j, \delta_{i,j} = 1; i \neq j, \delta_{i,j} = 0$.

引理 1^[7] 假设 $V = (v_{i,j}) \in \mathcal{L}_n(m, M)$ 且 $M/m = o(n)$, 对于足够大的 n ,

$$\|V^{-1} - S\| \leq \frac{c_1 M^2}{m^3(n-1)^2}, \quad (8)$$

这里的 c_1 是与 M, m, n 都无关的常数.

引理 2^[7] 假设 $V = (v_{i,j}) \in \mathcal{L}_n(m, M)$ 且 $M/m = o(n)$, 对于向量 $x \in R^{2n-1}$,

$$\|V^{-1}x\|_\infty \leq \|(V^{-1}-S)x\|_\infty + \|Sx\|_\infty \leq \frac{(2n-1)c_1 M^2}{m^3(n-1)^2} \|x\|_\infty + \max_{i=1, \dots, 2n-1} \frac{|x_i|}{v_{i,i}}, \quad (9)$$

其中, $x_{2n} = \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=n+1}^{2n-1} x_i$, c_1 是与 M, m, n 都无关的常数.

引理 3^[10] 若 $e^{2Q_n - q_n} = o(n^{1/4})$, 当 $n \rightarrow \infty$, $\frac{d_i - E(d_i)}{\sqrt{v_{i,i}}}$ 和 $\frac{b_j - E(b_j)}{\sqrt{v_{n+j, n+j}}}$ 服从均值为 0、方差为 1 的渐近正态分布, 其中 $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n-1$.

引理 4^[10] 若 $e^{7Q_n - 6q_n} = o\left(\sqrt{\frac{n}{\log n}}\right)$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

极大似然估计量 $\hat{\theta}$ 以概率趋近于 1 存在, 且满足:

$$\|\hat{\theta} - \theta^*\|_\infty = O\left(e^{4Q_n - 3q_n} \sqrt{\frac{\log n}{n}}\right) = o(1). \quad (10)$$

引理 5^[7] 令 $R = V^{-1} - S, U = Cov(R(g - Eg)), W = S(E - VS)$, 则有:

$$\|U\| \leq \|V^{-1} - S\| + \|W\| \leq \frac{c_1 M^2}{m^3(n-1)^2} + \frac{3M}{(m(n-1))^2}. \quad (11)$$

命题 1 假设 $A \in P_\theta$. 若 $e^{2Q_n - q_n} = o(n^{1/4})$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 对任意固定的 $k \geq 1$, 向量 $S(g - E(g))$ 的前 k 个元素服从均值为 0、协方差为 S^* 左上角 $k \times k$ 矩阵的多元渐近正态分布, S^* 为矩阵 S 中真实值 θ^* 替换 θ 得到.

基于上述命题 1 可以得到下面的引理 6.

引理 6^[10] 若 $e^{4Q_n - 3q_n} = o\left(\frac{n^{1/6}}{(\log n)^{1/3}}\right)$ 和 $e^{2Q_n - q_n} =$

$o(n^{1/4})$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 对任意固定的 $k \geq 1, \hat{\theta} - \theta^*$ 的前 k 个元素服从均值为 0、协方差为 S^* 左上角 $k \times k$ 矩阵的多元渐近正态分布.

引理 7 令 $R = V^{-1} - S, U = Cov(R(g - Eg)),$

若 $e^{Q_n - q_n} = o(n^{1/3})$ 和 $\sum_{i=1}^n |\lambda_i| < \infty, \sum_{j=1}^n |k_j| < \infty$, 则有:

$$Var(cR(g - E(g))) = cUc^T = o(1). \quad (12)$$

证明 根据二次型展开的形式和有关结论以及(11)式可得:

$$Var(cR(g - E(g))) = cVar(R(g - E(g)))c^T = cUc^T \leq \|U\| \left\{ \left(\sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j (v_{i,i} v_{j,j})^{1/2} \right) + \left(\sum_{i,j=1}^{n-1} k_i k_j (v_{n+i, n+i} v_{n+j, n+j})^{1/2} \right) + 2 \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_i k_j (v_{i,i} v_{n+j, n+j})^{1/2} \right) \right\} \leq$$

$$M(n-1) \|U\| \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i| + \sum_{j=1}^{n-1} |k_j| \right) \leq$$

$$O\left(\left(\frac{M}{m}\right)^3 \frac{1}{n}\right) \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i| + \sum_{j=1}^{n-1} |k_j| \right)^2,$$

若 $e^{Q_n - q_n} = o(n^{1/3})$ 和 $\sum_{i=1}^n |\lambda_i| < \infty, \sum_{j=1}^n |k_j| < \infty, Var(cR(g - E(g))) = o(1)$, 引理得证.

2 主要结果及证明

文献[7]证明了有向网络模型极大似然估计量的相合性和渐近正态性. 基于此, 本文进一步研究了当网络顶点个数趋于无穷时, 所有极大似然估计量线性组合的中心极限定理并得到了定理 1. 下面给出 $F'(\theta)$ 的基本结论, 根据计算公式可以得到:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_i}{\partial \alpha_i} = - \sum_{j=1, j \neq i}^n e^{\alpha_i + \beta_j}, \quad i = 1, \dots, n, \\ \frac{\partial F_i}{\partial \alpha_j} = 0, \quad i \neq j, \\ \frac{\partial F_i}{\partial \beta_j} = -e^{\alpha_i + \beta_j}, \quad j \neq i, \quad \frac{\partial F_i}{\partial \beta_i} = 0, \\ \frac{\partial F_{n+j}}{\partial \beta_j} = - \sum_{i=1, i \neq j}^n e^{\alpha_i + \beta_j}, \quad j = 1, \dots, n-1, \\ \frac{\partial F_{n+j}}{\partial \beta_i} = 0, \quad i \neq j, \\ \frac{\partial F_{n+j}}{\partial \alpha_i} = -e^{\alpha_i + \beta_j}, \quad i \neq j, \quad \frac{\partial F_{n+j}}{\partial \alpha_j} = 0. \end{cases} \quad (13)$$

令 $V = (v_{i,j}) = -F'(\theta)$, 不难得出 V 为参数 θ 的 Fisher 信息矩阵且满足 $\mathcal{L}_n(m, M)$, 又因为 e^x 是个单调递增函数, 满足 $0 < q_n \leq \alpha_i + \beta_j \leq Q_n$, 可以得到 $m = e^{q_n}, M = e^{Q_n}$. 根据 $\mathcal{L}_n(m, M)$ 的定义, 可以得到

$m(n-1) \leq v_{i,i} \leq M(n-1)$, $i = 1, \dots, 2n-1$. 根据 Billingsley(1968)^[11]中的定理 4.2 可以得到命题 2.

命题 2 假设 $A \in P_{\theta^*}$. 若 $e^{2Q_n - q_n} = o(n^{1/4})$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $cS(g - E(g))$ 服从均值为 0, 方差为 σ^2 的渐近正态分布, 其中:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j H_i H_j + \sum_{i=1}^{n-1} k_i^2 + \sum_{i,j=1}^{n-1} k_i k_j H_{n+i} H_{n+j} - 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_i k_j H_i H_{n+j}.$$

基于上述命题 2 可以得到下面的定理 1.

定理 1 若下述条件成立:

- (i) $e^{\frac{23}{2}Q_n - 9q_n} = o\left(\frac{n^{1/2}}{\log n}\right)$, $e^{2Q_n - q_n} = o(n^{1/4})$;
- (ii) $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| < \infty$, $\sum_{j=1}^{\infty} |k_j| < \infty$,

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_{i,i}^{1/2} (\hat{\alpha}_i - \alpha_i^*) + \sum_{j=1}^{n-1} k_j v_{n+j,n+j}^{1/2} (\hat{\beta}_j - \beta_j^*)$ 服从均值为 0, 方差为 σ^2 的渐近正态分布.

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j H_i H_j + \sum_{i=1}^{n-1} k_i^2 + \sum_{i,j=1}^{n-1} k_i k_j H_{n+i} H_{n+j} - 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_i k_j H_i H_{n+j},$$

其中, $H_i = (v_{i,i}/v_{2n,2n})^{1/2}$, $H_{n+j} = (v_{n+j,n+j}/v_{2n,2n})^{1/2}$.

证明 $E(a_{i,j})$ 是仅关于 $\alpha_i + \beta_j$ 的函数, 令 $E(a_{i,j}) = \mu(\alpha_i + \beta_j)$, 可以得到:

$$E(d_i) = \sum_{j=1, j \neq i}^n \mu(\alpha_i + \beta_j), \quad i = 1, \dots, n,$$

$$E(b_j) = \sum_{i=1, i \neq j}^n \mu(\alpha_i + \beta_j), \quad j = 1, \dots, n-1,$$

由引理 4 可得 $\hat{\rho}_n = \max_{1 \leq i \leq 2n-1} |\hat{\theta}_i - \theta_i^*| = O\left(e^{4Q_n - 3q_n} \sqrt{\frac{\log n}{n}}\right)$,

$\mu(\cdot)$ 在 $\alpha_i^* + \beta_j^*$ 点处进行泰勒展开到二阶且令 $\hat{\gamma}_{ij} = \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j - \alpha_i^* - \beta_j^*$, 对任意的 $i \neq j$ 有:

$$\mu(\hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j) - \mu(\alpha_i^* + \beta_j^*) = \mu'(\alpha_i^* + \beta_j^*) \hat{\gamma}_{ij} + \frac{1}{2} \mu''(\hat{\theta}_{ij}) \hat{\gamma}_{ij}^2,$$

进一步可以得到:

$$\begin{aligned} d_i - E(d_i) &= \sum_{j=1, j \neq i}^n \left(\mu(\hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j) - \mu(\alpha_i^* + \beta_j^*) \right) = \\ &= \sum_{j=1, j \neq i}^n \left(\mu'(\alpha_i^* + \beta_j^*) \hat{\gamma}_{ij} \right) + h_i, \quad b_j - E(b_j) = \\ &= \sum_{i=1, i \neq j}^n \left(\mu(\hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j) - \mu(\alpha_i^* + \beta_j^*) \right) = \\ &= \sum_{i=1, i \neq j}^n \left(\mu'(\alpha_i^* + \beta_j^*) \hat{\gamma}_{ij} \right) + h_j, \end{aligned} \tag{14}$$

其中:

$$h_{ij} = \frac{1}{2} \mu''(\hat{\theta}_{ij}) \hat{\gamma}_{ij}^2, \quad \hat{\theta}_{ij} = \alpha_i^* + \beta_j^* + \phi_{ij} \hat{\gamma}_{ij}, \quad 0 \leq \phi_{ij} \leq 1,$$

$$h_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n h_{ij}, \quad i = 1, \dots, n, \quad h_{n+j} = \sum_{i=1, i \neq j}^n h_{ij},$$

$$j = 1, \dots, n-1,$$

$$h_{2n} = \sum_{i=1}^n h_i - \sum_{j=1}^{n-1} h_{n+j} = \sum_{i=1}^{n-1} h_{i,n},$$

将上式(14)写成矩阵形式, 可以得到:

$$g - E(g) = V(\hat{\theta} - \theta^*) + h, \quad h = (h_1, \dots, h_{2n-1})^T, \tag{15}$$

(15)式通过矩阵变换, 等价转化为:

$$\hat{\theta} - \theta^* = V^{-1}(g - E(g)) - V^{-1}h = S(g - E(g)) + R(g - E(g)) - Sh - Rh,$$

要证 $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_{i,i}^{1/2} (\hat{\alpha}_i - \alpha_i^*) + \sum_{j=1}^{n-1} k_j v_{n+j,n+j}^{1/2} (\hat{\beta}_j - \beta_j^*) = c(\hat{\theta} - \theta^*)$ 的渐近正态性, 即证:

$$cS(g - E(g)) + cR(g - E(g)) - c(Sh + Rh),$$

其中, $c = (c, k) = (\lambda_1 v_{1,1}^{1/2}, \dots, \lambda_n v_{n,n}^{1/2}, k_1 v_{n+1,n+1}^{1/2}, \dots, k_{n-1} v_{2n-1,2n-1}^{1/2})$.

下面分 3 部分证明其渐近正态性.

$$h_{ij} = \frac{1}{2} \mu''(\hat{\theta}_{ij}) \hat{\gamma}_{ij}^2 = \frac{1}{2} e^{\hat{\theta}_{ij}} \hat{\gamma}_{ij}^2 \leq \frac{1}{2} e^{Q_n} (2\hat{\rho}_n)^2 =$$

$$2e^{Q_n} O\left(e^{8Q_n - 6q_n} \frac{\log n}{n}\right) = O\left(e^{9Q_n - 6q_n} \frac{\log n}{n}\right),$$

可以得到 $|h_i| \leq (n-1) O\left(e^{9Q_n - 6q_n} \frac{\log n}{n}\right) = O\left(e^{9Q_n - 6q_n} \log n\right)$.

(i) 首先证明 $n \rightarrow \infty$ 时, $|cSh| = \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i v_{i,i}^{1/2} (Sh)_i + \right.$

$$\left. \sum_{j=1}^{n-1} k_j v_{n+j,n+j}^{1/2} (Sh)_{n+j} \right| \rightarrow 0,$$

$$(Sh)_i = \frac{h_i}{v_{i,i}} + (-1)^{l(i>n)} \frac{h_{2n}}{v_{2n,2n}} \leq \frac{1}{m(n-1)} (|h_i| + |h_{2n}|) \leq \frac{2}{m(n-1)} O(e^{9Q_n - 6q_n} \log n) = O\left(e^{9Q_n - 7q_n} \frac{\log n}{n}\right), i = 1, \dots, 2n - 1,$$

$$|cSh| = \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i v_{i,i}^{1/2} (Sh)_i + \sum_{j=1}^{n-1} k_j v_{n+j,n+j}^{1/2} (Sh)_{n+j} \right| \leq \sqrt{M(n-1)} O\left(e^{9Q_n - 7q_n} \frac{\log n}{n}\right) \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i| + \sum_{j=1}^{n-1} |k_j| \right) = O\left(e^{\frac{19}{2}Q_n - 7q_n} \frac{\log n}{\sqrt{n}}\right) \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i| + \sum_{j=1}^{n-1} |k_j| \right),$$

若 $e^{\frac{19}{2}Q_n - 7q_n} = o\left(\frac{\sqrt{n}}{\log n}\right)$ 和 $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| < \infty, \sum_{j=1}^{\infty} |k_j| < \infty$, 则:

$$|cSh| = \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i v_{i,i}^{1/2} (Sh)_i + \sum_{j=1}^{n-1} k_j v_{n+j,n+j}^{1/2} (Sh)_{n+j} \right| \rightarrow 0.$$

(ii) 再证明 $n \rightarrow \infty$ 时, $|cRh| = \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i v_{i,i}^{1/2} (Rh)_i + \sum_{j=1}^{n-1} k_j v_{n+j,n+j}^{1/2} (Rh)_{n+j} \right| \rightarrow 0,$

$$\left| \sum_{j=1}^{n-1} k_j v_{n+j,n+j}^{1/2} (Rh)_{n+j} \right| \rightarrow 0,$$

$$(Rh)_i \leq (2n-1) \|R\| |h_i| \leq \frac{(2n-1)c_1 M^2}{m^3(n-1)^2} O(e^{9Q_n - 6q_n} \log n) = O\left(e^{11Q_n - 9q_n} \frac{\log n}{n}\right), i = 1, \dots, 2n - 1,$$

$$|cRh| = \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i v_{i,i}^{1/2} (Rh)_i + \sum_{j=1}^{n-1} k_j v_{n+j,n+j}^{1/2} (Rh)_{n+j} \right| \leq \sqrt{M(n-1)} O\left(e^{11Q_n - 9q_n} \frac{\log n}{n}\right) \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i| + \sum_{j=1}^{n-1} |k_j| \right) = O\left(e^{\frac{23}{2}Q_n - 9q_n} \frac{\log n}{\sqrt{n}}\right) \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i| + \sum_{j=1}^{n-1} |k_j| \right),$$

若 $e^{\frac{23}{2}Q_n - 9q_n} = o\left(\frac{\sqrt{n}}{\log n}\right)$ 和 $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| < \infty, \sum_{j=1}^{\infty} |k_j| < \infty$, 则:

$$|cRh| = \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i v_{i,i}^{1/2} (Rh)_i + \sum_{j=1}^{n-1} k_j v_{n+j,n+j}^{1/2} (Rh)_{n+j} \right| \rightarrow 0,$$

由 (i) 和 (ii) 可得 $cV^{-1}h = cSh + cRh \leq O\left(e^{\frac{23}{2}Q_n - 9q_n} \frac{\log n}{\sqrt{n}}\right) \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i| + \sum_{j=1}^{n-1} |k_j| \right),$

若 $e^{\frac{23}{2}Q_n - 9q_n} = o\left(\frac{\sqrt{n}}{\log n}\right)$ 和 $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| < \infty, \sum_{j=1}^{\infty} |k_j| < \infty$, 则:

$$cV^{-1}h \leq O\left(e^{\frac{23}{2}Q_n - 9q_n} \frac{\log n}{n^{1/2}}\right) \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i| + \sum_{j=1}^{n-1} |k_j| \right) \rightarrow o(1).$$

(iii) 最后证明当 $n \rightarrow \infty, cR(g - E(g))$ 依概率收敛于 0.

由切比雪夫不等式及引理 7 可得:

$$P\left(|cR(g - E(g))| > \varepsilon\right) \leq \frac{\text{Var}\left(cR(g - E(g))\right)}{\varepsilon^2} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} M(n-1) \|U\| \times \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i| + \sum_{j=1}^{n-1} |k_j| \right)^2 \leq \frac{1}{\varepsilon^2} O\left(\frac{M^3}{m^3(n-1)}\right) \times \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i| + \sum_{j=1}^{n-1} |k_j| \right)^2,$$

若 $e^{Q_n - q_n} = o(n^{1/3})$ 和 $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| < \infty, \sum_{j=1}^{\infty} |k_j| < \infty$, 则

$$cR(g - E(g)) = o_p(1),$$

由 (i)~(iii) 可得:

$$c(\hat{\theta} - \theta^*) = cS(g - E(g)) + cR(g - E(g)) - c(Sh + Rh) = cS(g - E(g)) + o_p(1),$$

再由命题 2 可以得出定理 1.

本文未直接选择极大似然估计量 $\hat{\theta}$ 的线性组合, 即 $\sum_i \lambda_i (\hat{\alpha}_i - \alpha_i^*) + \sum_j k_j (\hat{\beta}_j - \beta_j^*)$, 根据文献 [7],

$\hat{\alpha}_i$ 和 $\hat{\beta}_j$ 的渐近方差分别为 $\frac{1}{\sqrt{v_{i,i}}}$, $\frac{1}{\sqrt{v_{n+j,n+j}}}$, 它可能

会导致 $\hat{\alpha}_i$ 和 $\hat{\beta}_j$ 有不同的收敛速率. 因此, 利用极大似然估计量归一化版本的线性组合合理且便于计算.

3 数值研究

本节通过数值模拟来验证 Poisson 模型所有极大似然估计量的线性组合的渐近正态性, 并将本方法应用到一个实际数据之中.

3.1 数值模拟

参考文献 [10] 中的模拟设置方法, 选取一组线性形式参数值, 但是在参数的设置和步长的选择上有所不同. 令参数 $\alpha_{i+1}^* = 0.2 + (n-1-i) \cdot L / (n-1), i = 0, \dots, n-1, \beta_i^* = \alpha_i^*, \beta_n^* = 0$. 本文选取的顶点个数为 $n = 150, 200$, 考虑 $L = -\log(\log(n^{1/3})), -(1/3)(\log(n))^{1/3}, -\log(n), -(1/2)(\log(\log(n)))^{1/2}$ 四种不同的步长值. 设定 $\lambda_i = i^{-2}, \kappa_j = j^{-2}(i = 1, \dots, n, j =$

1, \dots, n - 1), 且满足 $\sum_{i=1}^n |\lambda_i| < \infty, \sum_{j=1}^n |k_j| < \infty$. 根据定理 1 可知, $\sum_{i=1}^n \lambda_i \hat{v}_{i,i}^{1/2} (\hat{\alpha}_i - \alpha_i^*) + \sum_{j=1}^{n-1} k_j \hat{v}_{n+n+j}^{1/2} (\hat{\beta}_j - \beta_j^*)$ 服从均值为 0、方差为 σ^2 的渐近正态分布, 其中 $\hat{v}_{i,i}^{1/2}$ 是用 $\hat{\alpha}_i$ 替换 $\alpha_i^*, \hat{\beta}_j$ 替换 β_j^* 得到的估计值. 本文将采用 QQ 图来评估极大似然估计量 $\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \hat{v}_{i,i}^{1/2} (\hat{\alpha}_i - \alpha_i^*) + \sum_{j=1}^{n-1} k_j \hat{v}_{n+n+j}^{1/2} (\hat{\beta}_j - \beta_j^*) \right) / \sigma$ 的渐近正态性, 每种情况模拟 10000 次.

针对 $n = 150, 200$ 模拟得到的 QQ 图如图 1 所示, 图中横轴和纵轴分别为理论分位数和经验分位数, 红色直线对应于参考线 $y = x$. 从图 1 很明显可以看出, 当 $L = -\log(\log(n^{1/3})), -(1/3)(\log(n))^{1/3}, -(1/2)(\log(\log(n)))^{1/2}$ 时, 经验分位数与标准正态分位数总体来说吻合比较好; 当 $L = -(1/2)(\log(\log(n)))^{1/2}$ 时, $n = 150$ 对应的 QQ 图直线首端略有偏差, 而 $n = 200$ 时对应的 QQ 图直线首端拟合变好, 随着 n 的增大, 总体吻合度提高. 此外, 发现当 $L = -\log(n)$ 时, 无论 n 取何值, 参数 θ 的极大似然估计值均不存在, 在这种情况下无法得到 QQ 图.

表 1 记录了 $c(\hat{\theta} - \theta^*)$ 的均值和方差. 当步长

取值为 $L = \log(\log(n^{1/3})), -(1/3)(\log(n))^{1/3}, -(1/2)(\log(\log(n)))^{1/2}$ 时, $c(\hat{\theta} - \theta^*)$ 的均值会随着 n 的增大而趋近于 0; 当 $L = -\log(n)$ 的极大似然估计不存在, 表明 L 取值不合理时, 会产生很大的误差, 本文中 L 应该小于 $-\log(n)$.

表 1 $\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \hat{v}_{i,i}^{1/2} (\hat{\alpha}_i - \alpha_i^*) + \sum_{j=1}^{n-1} k_j \hat{v}_{n+n+j}^{1/2} (\hat{\beta}_j - \beta_j^*) \right)$ 的均值和方差 (括号内)

Tab. 1 The means and variances of $\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \hat{v}_{i,i}^{1/2} (\hat{\alpha}_i - \alpha_i^*) + \sum_{j=1}^{n-1} k_j \hat{v}_{n+n+j}^{1/2} (\hat{\beta}_j - \beta_j^*) \right)$ (in parentheses)

n	$L = -\log(\log(n^{1/3}))$	$-(1/3)(\log(n))^{1/3}$	$-(1/2)(\log(\log(n)))^{1/2}$
150	-0.030(2.1679)	-0.010(2.1678)	-0.008(2.1676)
200	-0.027(2.1670)	-0.001(2.1670)	-0.006(2.1669)

3.2 数据示例

本文从 Residence hall 数据集 (Webster) 获取数据, 该数据集可从网站 Networks (konect.cc) 上获得. 该有向网络包含住在澳大利亚国立大学校园宿舍楼 217 名居民之间的友谊情况. 图 2 是该数据集的可视化网络图, 图中包含 217 个节点, 代表 217 个体, 有 2762 条有向边. 每条边的权值反映了居民 i 对居民 $j (j \neq i)$ 的友谊等级, 但是当顶点的入度或者出度为 0 时, 度的估计参数不存在. 因此排除出度或者入度为 0 的节点, 对剩下的 214 个节点进行分析.

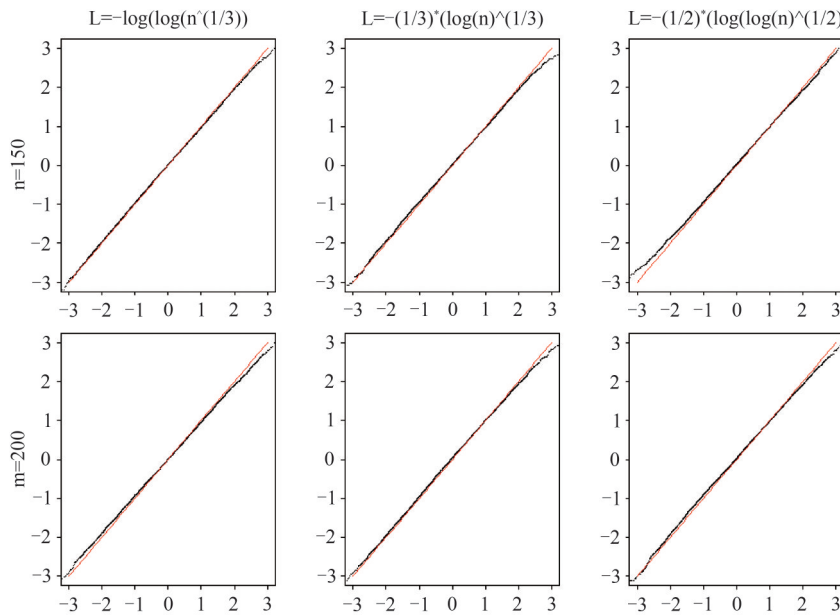


图 1 $\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \hat{v}_{i,i}^{1/2} (\hat{\alpha}_i - \alpha_i^*) + \sum_{j=1}^{n-1} k_j \hat{v}_{n+n+j}^{1/2} (\hat{\beta}_j - \beta_j^*) \right) / \sigma$ 的 QQ 图

Fig. 1 The QQ plot of $\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \hat{v}_{i,i}^{1/2} (\hat{\alpha}_i - \alpha_i^*) + \sum_{j=1}^{n-1} k_j \hat{v}_{n+n+j}^{1/2} (\hat{\beta}_j - \beta_j^*) \right) / \sigma$

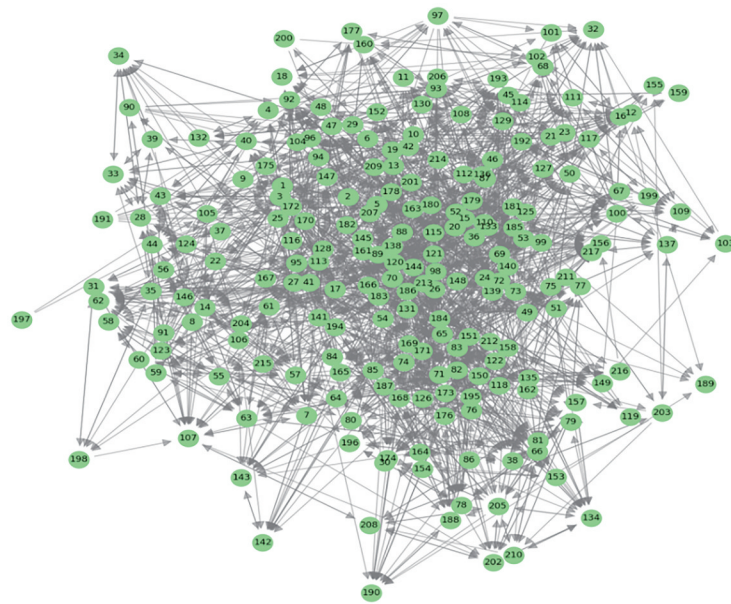


图2 Residence hall网络关系图

Fig. 2 Residence hall network relationship diagram

将 Residence hall 网络生成 214×214 的非对称邻接矩阵带入模型中, 计算得到的每个节点的度及它们的影响参数 $\hat{\alpha}_i$ 和 $\hat{\beta}_j$ 及参数方差(表 2).

表 2 Residence hall: 参数估计量及其方差

Tab. 2 Residence hall: Parameter estimators and their variances

节点	出度	$\hat{\alpha}$	方差	入度	$\hat{\beta}$	方差
70	130	0.2863	0.0076	94	0.0345	0.0106
169	120	0.2042	0.0086	75	-0.1924	0.0133
184	115	0.1642	0.0086	98	0.0745	0.0102
120	110	0.1134	0.0090	41	-0.7974	0.0245
128	99	0.0083	0.0100	44	-0.7280	0.0228
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
103	11	-2.1920	0.0904	13	-1.9570	0.0772
155	11	-2.3926	0.1105	14	-1.8831	0.0717
119	9	-2.5104	0.1243	14	-1.8832	0.0717
91	8	-2.5110	0.1243	8	-2.4428	0.1255
159	6	-2.7987	0.1658	8	-2.4430	0.1255

4 结论

本文证明了 Poisson 模型中所有极大似然估计量线性组合的中心极限定理, 通过数值模拟, 验证了理论的正确性, 并展示了其在实际统计推断中的应用潜力. 在模拟过程中产生的网络是稠密的, 这与实际中常见的稀疏网络有所差异, 因此, 深入探索双度序列在稀疏网络环境下的渐近性质, 不仅是对现有研究的补充, 也对理解和分析现实世界的网络结构有重要意义, 此领域的进一步研究将有助于提高模型的适用性和预测的准确性.

参 考 文 献

[1] CHATTERJEE S, DIACONIS P, SLY A. Random graphs with a given degree sequence[J]. The Annals of Applied Probability, 2011, 21(4):1400-1435.

[2] YAN T, XU J. A central limit theorem in the β -model for undirected random graphs with a diverging number of vertices[J]. Biometrika, 2013, 100(2):519-524.

[3] HILLAR C, WIBISONO A. Maximum entropy distributions on graphs[J]. arXiv:2013, 1301.3321.

[4] YAN T, ZHAO Y, QIN H. Asymptotic normality in the maximum entropy models on graphs with an increasing number of parameters [J]. Journal of Multivariate

- Analysis, 2015, 133:61-76.
- [5] YAN T, QIN H, WANG H. Asymptotics in undirected random graph models parameterized by the strengths of vertices[J]. *Statistica Sinica*, 2016, 26(1):273-293.
- [6] 许芷萌,肖可君,罗敬.有序网络模型中矩估计量的渐近性理论[J].*中南民族大学学报(自然科学版)*, 2023, 42(3):408-414.
- [7] YAN T, LENG C, ZHU J. Asymptotics in directed exponential random graph models with an increasing bi-degree sequence [J]. *The Annals of Statistics*, 2016, 44(1):31-57.
- [8] YONG Z, CHEN S, QIN H, et al. Directed weighted random graphs with an increasing bi-degree sequence[J]. *Statistics & Probability Letters*, 2016, 119:235-40.
- [9] LUO J, QIN H, WANG Z. Asymptotic distribution in directed finite weighted random graphs with an increasing bi-degree sequence [J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2020, 40(2):355-368.
- [10] 范一凡.若干随机图模型中的渐近理论[D].武汉:华中师范大学,2021.
- [11] BILLINGSLEY P. *Convergence of probability measures*[M]. New York: John Wiley & Sons, 2013.

(责编 曹东,校对 姚春娜)