

非线性双时间尺度系统非周期事件触发间歇控制

周旻, 王维峰*

(中南民族大学 数学与统计学学院, 武汉 430074)

摘要 通过奇异摄动理论将非线性双时间尺度系统分解为快、慢子系统, 采用非周期事件触发间歇控制方法研究其输入状态稳定性. 首先, 针对快、慢子系统分别设计事件触发条件并给出相应的稳定性判据条件, 再根据这些条件设计事件触发间歇控制器; 然后, 利用Lyapunov函数方法证明在非周期间歇控制器下系统是输入状态稳定; 最后, 通过数值仿真实验验证了理论结果的正确性.

关键词 非周期事件触发间歇控制; 非线性双时间尺度系统; 输入状态稳定; 线性矩阵不等式

中图分类号 O231.2 **文献标志码** A **文章编号** 1672-4321(2025)01-0138-07

doi: 10.20056/j.cnki.ZNMDZK.20250116

Nonlinear two-time-scale system with aperiodic event-triggered intermittent control

ZHOU Min, WANG Weifeng*

(College of Mathematics and Statistics, South-Central Minzu University, Wuhan 430074, China)

Abstract The nonlinear two-time-scale system is decoupled into fast and slow subsystems by using the singular perturbation theory, and the aperiodic event-triggered intermittent control method is used to study the input-to-state stability. Firstly, the event-triggered conditions are designed for the fast and slow subsystems and the corresponding stability conditions are given, and then the event-triggered intermittent controller is designed according to these conditions. The Lyapunov function method is used to prove the input-to-state stability of the system under the aperiodic intermittent controller. Finally, the correctness of the theoretical results is verified by numerical simulation experiments.

Keywords aperiodic event-triggered intermittent control; nonlinear two-time-scale system; input-to-state stability; linear matrix inequalities

1 研究背景

在自然界和人类社会中, 许多系统的动力学表现出双时间尺度特征, 这些系统具有两个明显不同的时间尺度, 其中一个时间尺度远快于另一个. 在两个时间尺度上进化的系统出现在许多应用领域, 例如生物学^[1]、电力管理^[2]和化学工程^[3]. 这类双时间尺度系统一般存在数值精度问题和高维问题, 而奇异摄动模型能够精确描述这类系统的双时间尺度动态特性. 依据奇异摄动理论, 双时间尺度系统

可分解为快、慢两个子系统, 从而有效解决双时间尺度系统时间尺度不一致的问题^[4-7]. SOCHA^[5]利用快慢子系统的性质研究了非线性随机双时间尺度系统的指数稳定性. ZHAO等^[5]对快慢子系统分别提出了两个最优控制问题并采用两阶段值迭代算法学习得到最优控制器. MANISHA等^[6]提出一种双时间尺度系统的事件触发复合控制方法, 该方法不需要同步更新快速和慢速动态的测量值, 还能保证系统状态收敛到原点附近的可调节区域.

以上研究主要是针对双时间尺度系统的连续

收稿日期 2024-05-29

* 通信作者 王维峰(1985-), 男, 副教授, 研究方向: 随机优化控制, E-mail: wwf87487643@163.com

基金项目 湖北省自然科学基金资助项目(2023AFC006)

控制,该方法虽然具有控制精度高、适用性广等优势,但针对多变量系统控制等会面临通讯资源消耗大、实际工程实现复杂等挑战问题.间歇控制作为一种不连续性控制具有通讯资料利用率低、控制成本低、节约能源等优点.近年来,间歇控制领域在国内外备受关注,并取得了一系列的研究成果.张腾等^[8]研究周期脉冲控制在神经网络系统中的稳定性,其控制器在设定的时间间隔内周期性地运行.与连续时间事件触发规则相比,考虑周期性事件触发控制可以避免芝诺(Zeno)现象,即所有的事件触发控制都必须满足:相邻的两次事件触发之间的时间间隔必须严格大于零,才能保证事件触发的正常、有序进行^[9].这种以时间为周期的间歇控制,提高了资源的利用效率,但由于周期性的设置,这种控制策略相对保守,导致控制器不能在最佳控制时机介入系统.

与传统周期间歇控制不同的是,事件触发间歇控制是指在系统状态发生变化或达到特定条件时才执行或关闭控制器,该策略具有较好的资源利用效率和更快的响应时间^[10-13].文献[14]设计一种基于时间触发的脉冲控制策略,该策略充分取决于阈值和检查周期,为非线性系统指数稳定性提供判据条件.文献[15-16]研究间歇牵制量化控制的耦合复杂网络的有限时间同步问题,并将事件触发间歇控制应用到建筑节能管理和室内舒适度调控方面,为提升系统性能

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1f(x_1(t)) + C_1u(t) + D\omega(t), \\ \dot{x}_2(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_2f(x_2(t)) + C_2u(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中 $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ 分别表示系统的慢、快状态, $0 < \varepsilon \ll 1$ 是奇异摄动参数, $u \in \mathbb{R}^p$ 是系统输入, $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n}$, $C_i \in \mathbb{R}^{n_i \times p}$ ($i, j = 1, 2$), $D \in \mathbb{R}^{n_1 \times q}$ 是常数矩阵, $\omega \in \mathbb{R}^q$ 是外部扰动.非线性函数 $f(x_1(t)), f(x_2(t))$ 满足局部利普希兹条件,即存在一组正常数 L_1, L_2 , 使得 $\forall x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \forall x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, 函数 $f(x_1(t)), f(x_2(t))$ 分别满足 $\|f(x_1)\| \leq L_1\|x_1\|$, $\|f(x_2)\| \leq L_2\|x_2\|$.

假设矩阵 A_{22} 是可逆的,并令 $\varepsilon = 0$,则(1)式可以进行快、慢时刻的分离,分别得到如下慢子系统模型和快子系统模型.

慢子系统为:

$$\dot{x}_{1s}(t) = A_0x_{1s}(t) + B_1f(x_1(t)) + B_0f(x_2(t)) + C_0u_s(t) + D\omega(t), \quad (2)$$

其中, $A_0 = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$, $B_0 = -A_{12}A_{22}^{-1}B_2$, $C_0 = C_1 - A_{12}A_{22}^{-1}C_2$, x_{1s}, x_{1f} 和 x_{2s}, x_{2f} 分别是原始系统中 x_1 和 x_2 的

和降低能耗提供了全新途径.因此,将事件触发控制与间歇控制结合起来可以提供更灵活、更有效的控制策略以及节能策略,从而可以更好地满足系统的控制需求.不同于以上单尺度系统间歇控制问题,针对多时间尺度系统的事件触发间歇控制鲜见报道,研究基于事件触发间歇控制的非线性双时间尺度系统的稳定性具有一定理论价值和现实意义.

基于上述背景,本文研究在非周期事件触发间歇控制下非线性双时间尺度系统的输入状态稳定性,给出系统稳定的判据条件,并利用 Lyapunov 函数方法证明在非周期事件触发间歇控制下系统的输入状态稳定性.

符号说明:记 $\|\cdot\|$ 表示向量的欧几里得范数. \mathcal{L}_∞^n 表示可测且基本有界函数 $\omega: \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R}^q$ 的类别,其无穷范数定义为 $\|\omega\|_\infty = \text{ess sup}_{t \in \mathbb{R}} \{\|\omega(t)\|\} < \infty$, 函数 $\gamma: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 是 \mathcal{K} -函数,如果它是连续且严格增加的,并且 $\gamma(0) = 0$. 函数 $\beta: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 是 \mathcal{KL} -函数,如果对于每个固定的 $t \in \mathbb{R}^+$, $\beta(\cdot, t)$ 是 \mathcal{K} -函数,并且对于每个固定的 $r \in \mathbb{R}^+$, 它是一个连续递减的函数,满足 $\beta(r, t) \rightarrow 0$, 当 $t \rightarrow \infty$.

2 非线性双时间尺度系统模型描述

考虑如下非线性双时间尺度系统:

慢、快分量, u_s 和 u_f 则是原始系统中 u 的慢、快分量.

快子系统为:

$$\varepsilon \dot{x}_{2f}(t) = A_{22}x_{2f}(t) + B_2f(x_2(t)) + C_2u_f(t), \quad (3)$$

通过以上分解,原始系统(1)被分解为快、慢子系统.

假设在非周期下间歇控制为:

$$u_s(t) = \begin{cases} K_1x_{1s}(t), & t \in [t_i, t_i + \tau_i], i \geq 1 \\ 0, & t \in [t_i + \tau_i, t_{i+1}], i \geq 0 \end{cases}, \quad (4)$$

$$u_f(t) = \begin{cases} K_2x_{2f}(t), & t \in [t_i, t_i + \tau_i], i \geq 1 \\ 0, & t \in [t_i + \tau_i, t_{i+1}], i \geq 0 \end{cases}. \quad (5)$$

其中 K_i ($i = 1, 2$) 为控制增益矩阵.

事件触发的主要控制方案如下所示:

$$t_{i+1} = \begin{cases} \min \{t: t \in (t_i + \tau_i, t_i + \Delta)\}, & \text{if } \Psi(t_i + \tau_i, t_i + \Delta) \neq \emptyset \\ t_i + \Delta, & \text{if } \Psi(t_i + \tau_i, t_i + \Delta) = \emptyset, \end{cases} \quad (6)$$

其次,在控制区间内考虑以下事件触发时间序列:

$$\tau_i = \min \{ \theta: \theta > 0, V(x(t_i + \theta)) \leq \sigma_{\min} V(x(t_i)) + \eta_\omega \|\omega\|_{[t_i, t_i + \theta]}^2 \}, \quad (7)$$

其中 $\sigma_{\max} > 1, 0 < \sigma_{\min} < 1, \Psi(s, t) \triangleq \{ \theta: s < \theta < t, V(x(\theta)) \geq$

$$\sigma_{\max} V(s) + \eta_{\omega} \|\omega\|_{[s, \theta]}^2, \eta_{\omega} \geq \max \left\{ \frac{\lambda_{\max}(Q)}{g_1}, \frac{\lambda_{\max}(Q)}{g_2} \right\},$$

检查周期 $\Delta > 0$ 是一个满足实际系统的常数.

$$\varepsilon \dot{x}_{2f}(t) = \begin{cases} A_{22}x_{2f}(t) + B_2f(x_{2f}(t)) + C_2K_2x_{2f}(t), t \in [t_i, t_i + \tau_i], i \geq 1 \\ A_{22}x_{2f}(t) + B_2f(x_{2f}(t)), t \in [t_i + \tau_i, t_{i+1}], i \geq 0 \end{cases} \quad (8)$$

定义 1 如果存在函数 $\beta \in \mathcal{KL}, \gamma \in \mathcal{K}$, 使其对于任何初始状态 $x(0)$ 和外部扰动 $\omega(t)$ 都存在, 且系统(8)的解 $x(t) = x(t; x_0, \omega)$ 满足以下不等式:

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(0)\|, t) + \gamma(\|\omega\|_{[0, t]}), t \geq 0, \quad (9)$$

则称系统(8)是输入状态稳定的(ISS).

定义 2 对于非周期间歇控制(4)和(5), 定义:

$$\bar{\tau} \triangleq \liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=0}^{i-1} \tau_j}{i}, \quad (10)$$

为最小平均控制宽度.

引理 1^[17] 对于任意的 $X, Y \in \mathbb{R}^n$ 和正定矩阵 $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 都满足以下不等式:

$$X^T Y + Y^T X \leq X^T G^{-1} X + Y^T G Y. \quad (11)$$

引理 2^[18] 对给定的对称矩阵 $S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$, 其

中 S_{11} 是 $r \times r$ 维的. 以下 3 个条件是等价的:

- (i) $S < 0$,
- (ii) $S_{11} < 0, S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} < 0$,
- (iii) $S_{22} < 0, S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T < 0$.

3 非线性双时间尺度系统输入状态稳定性条件

定理 1 如果存在正定矩阵 $\tilde{P}_i, Q > 0$, 矩阵 $Y_i (i =$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= 2x_{1s}^T(t)P_1\dot{x}_{1s}(t) + 2x_{2f}^T(t)P_2\dot{x}_{2f}(t) = \\ &2x_{1s}^T(t)P_1[A_0x_{1s}(t) + B_1f(x_{1s}(t)) + B_0f(x_{2f}(t)) + C_0u_s(t) + D\omega(t)] + \\ &2x_{2f}^T(t)P_2\varepsilon^{-1}[A_{22}x_{2f}(t) + B_2f(x_{2f}(t)) + C_2u_f(t)], \end{aligned} \quad (15)$$

由引理 1 得:

$$2x_{1s}^T(t)P_1B_1f(x_{1s}(t)) \leq x_{1s}^T(t)P_1B_1B_1^T P_1x_{1s}(t) + f^T(x_{1s}(t))f(x_{1s}(t)) \leq x_{1s}^T(t)P_1B_1B_1^T P_1x_{1s}(t) + x_{1s}^T(t)L_1^2x_{1s}(t), \quad (16)$$

$$2x_{1s}^T(t)P_1D\omega(t) \leq x_{1s}^T(t)P_1DQ^{-1}D^T P_1x_{1s}(t) + \omega^T(t)Q\omega(t) \leq x_{1s}^T(t)P_1DQ^{-1}D^T P_1x_{1s}(t) + \lambda_{\max}(Q)\|\omega(t)\|^2, \quad (17)$$

则:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &\leq x_{1s}^T(t)\Xi_1x_{1s}(t) + x_{2f}^T(t)\Xi_2x_{2f}(t) - \\ &x_{1s}^T(t)g_1P_1x_{1s}(t) - x_{2f}^T(t)g_2P_2x_{2f}(t) + \lambda_{\max}(Q)\|\omega(t)\|^2 = \\ &(x_{1s}^T(t) \quad x_{2f}^T(t)) \begin{pmatrix} \Xi_1 & 0 \\ 0 & \Xi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1s}(t) \\ x_{2f}(t) \end{pmatrix} - x_{1s}^T(t)g_1P_1x_{1s}(t) - \\ &x_{2f}^T(t)g_2P_2x_{2f}(t) + \lambda_{\max}(Q)\|\omega(t)\|^2 \leq -g_1V(x(t)) + \lambda_{\max}(Q)\|\omega(t)\|^2, \end{aligned} \quad (18)$$

其中:

在非周期间歇控制法则(4)和(5)下, 系统(2)和(3)可以改写为:

1, 2), 并且有标量正常数 $g_1, g_2 > 0, K_i = Y_i \tilde{P}_i^{-1}$, 使得下列条件成立:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_1 & \tilde{P}_1 L_1 & \tilde{P}_1 L_2 & D & & \\ * & -I & 0 & 0 & 0 & \\ * & * & -I & 0 & & \\ * & * & * & -Q & & \\ & 0 & & & \tilde{\Phi}_2 & \tilde{P}_2 L_2 \\ & & & & * & -\varepsilon I \end{pmatrix} < 0, \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_3 & \tilde{P}_1 L_1 & \tilde{P}_1 L_2 & D & & \\ * & -I & 0 & 0 & 0 & \\ * & * & -I & 0 & & \\ * & * & * & -Q & & \\ & 0 & & & \tilde{\Phi}_4 & \tilde{P}_2 L_2 \\ & & & & * & -\varepsilon I \end{pmatrix} < 0, \quad (14)$$

其中 $\tilde{\Phi}_1 = A_0 \tilde{P}_1 + \tilde{P}_1 A_0^T + C_0 Y_1 + Y_1^T C_0^T + B_1 B_1^T + B_0 B_0^T + g_1 \tilde{P}_1$, $\tilde{\Phi}_2 = \varepsilon^{-1}(A_{22} \tilde{P}_2 + \tilde{P}_2 A_{22}^T + C_2 Y_2 + Y_2^T C_2^T + B_2 B_2^T) + g_1 \tilde{P}_2$, $\tilde{\Phi}_3 = A_0 \tilde{P}_1 + \tilde{P}_1 A_0^T + B_1 B_1^T + B_0 B_0^T - g_2 \tilde{P}_1$, $\tilde{\Phi}_4 = \varepsilon^{-1}(A_{22} \tilde{P}_2 + \tilde{P}_2 A_{22}^T + B_2 B_2^T) - g_2 \tilde{P}_2$,

则系统是输入状态稳定的.

证明 选择 Lyapunov 函数 $V(x(t)) = x_{1s}^T(t)$

$$P_1 x_{1s}(t) + x_{2f}^T(t) P_2 x_{2f}(t), \text{ 其中 } P_i = \tilde{P}_i^{-1}.$$

因此当 $t_i + \tau_i \leq t < t_{i+1}$ 时, 有:

$$\begin{aligned} \Xi_1 &= P_1(A_0 + C_0K_1) + (A_0 + C_0K_1)^T P_1 + P_1B_1B_1^T P_1 + L_1^2 + P_1B_0B_0^T P_1 + L_2^2 + P_1DQ^{-1}D^T P_1 + g_1P_1, \\ \Xi_2 &= \varepsilon^{-1}[P_2(A_{22} + C_2K_2) + (A_{22} + C_2K_2)^T P_2 + P_1B_2B_2^T P_1 + L_2^2] + g_1P_2. \end{aligned}$$

令 $Z_1 = \begin{pmatrix} \Xi_1 & 0 \\ 0 & \Xi_2 \end{pmatrix}$, 将 $P_i = \tilde{P}_i^{-1}$ 和 $K_i = Y_i \tilde{P}_i^{-1}$ ($i = 1, 2$)

代入 Z_1 并运用引理 2, 如果有:

$$\tilde{Z}_1 = \begin{pmatrix} \Phi_1 & L_1 & L_2 & \tilde{P}_1^{-1}D & & \\ * & -I & 0 & 0 & 0 & \\ * & * & -I & 0 & & \\ * & * & * & -Q & & \\ & & 0 & & \Phi_2 & L_2 \\ & & & & * & -\varepsilon I \end{pmatrix} < 0, \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \tilde{P}_1^{-1}A_0 + \tilde{P}_1^{-1}C_0Y_1\tilde{P}_1^{-1} + A_0^T\tilde{P}_1^{-1} + \tilde{P}_1^{-1}Y_1^TC_0^T\tilde{P}_1^{-1} + \\ &\tilde{P}_1^{-1}B_1B_1^T\tilde{P}_1^{-1} + \tilde{P}_1^{-1}B_0B_0^T\tilde{P}_1^{-1} + g_1\tilde{P}_1^{-1}, \quad \Phi_2 = \varepsilon^{-1}(\tilde{P}_2^{-1}A_{22} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= 2x_{1s}^T(t)P_1[A_0x_{1s}(t) + B_1f(x_{1s}) + B_0f(x_{2f}) + D\omega(t)] + \\ &2x_{2f}^T(t)\varepsilon^{-1}P_2[A_{22}x_{2f} + B_2f(x_{2f})] \leq \\ &x_{1s}^T(t)\Xi_3x_{1s}(t) + x_{2f}^T(t)\Xi_4x_{2f}(t) + \lambda_{\max}(Q)\|\omega(t)\|^2 + \\ &x_{1s}(t)^Tg_2P_1x_{1s}(t) + x_{2f}(t)^Tg_2P_2x_{2f}(t) \leq \\ &g_2V(x(t)) + \lambda_{\max}(Q)\|\omega(t)\|^2, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \Xi_3 &= P_1A_0 + A_0^T P_1 + P_1B_1B_1^T P_1 + L_1^2 + P_1B_0B_0^T P_1 + \\ &L_2^2 + P_1DQ^{-1}D^T P_1 - g_2P_1, \\ \Xi_4 &= \varepsilon^{-1}(P_2A_{22} + A_{22}^T P_2 + P_1B_2B_2^T P_1 + L_2^2) - g_2P_2 \end{aligned}$$

令 $Z_2 = \begin{pmatrix} \Xi_3 & 0 \\ 0 & \Xi_4 \end{pmatrix}$, 将 $P_i = \tilde{P}_i^{-1}$ 和 $K_i = Y_i \tilde{P}_i^{-1}$ ($i =$

1, 2) 代入 Z_2 并运用引理 2 可得:

$$\begin{aligned} \Phi_3 &= \tilde{P}_1^{-1}A_0 + A_0^T\tilde{P}_1^{-1} + \tilde{P}_1^{-1}B_1B_1^T\tilde{P}_1^{-1} + \tilde{P}_1^{-1}B_0B_0^T\tilde{P}_1^{-1} - g_2\tilde{P}_1^{-1}, \\ \Phi_4 &= \varepsilon^{-1}(\tilde{P}_2^{-1}A_{22} + A_{22}^T\tilde{P}_2^{-1} + \tilde{P}_1^{-1}B_2B_2^T\tilde{P}_1^{-1}) - g_2\tilde{P}_2^{-1}, \end{aligned}$$

通过 $\text{diag}\{\tilde{P}_1, I, I, I, \tilde{P}_2, I\}$ 对 \tilde{Z}_2 进行左乘和右乘, 矩阵 \tilde{Z}_2 被转换为 (14) 式的左侧. 由 (14) 式可以得到 (22) 式成立, 则 $Z_2 < 0$.

所以 $t \in [t_i + \tau_i, t_{i+1})$ 时, 有:

$$V(x(t_{i+1})) \leq e^{g_2(t_{i+1}-t_i-\tau_i)}V(x(t_i+\tau_i)) + \frac{\lambda_{\max}(Q)}{g_2}\|\omega(t)\|_{[t_i+\tau_i, t_{i+1})}^2 \leq e^{g_2(t_{i+1}-t_i-\tau_i)}V(x(t_i+\tau_i)) + \eta_{\omega}\|\omega(t)\|_{[t_i+\tau_i, t_{i+1})}^2. \quad (24)$$

接下来, 将证明事件触发间歇控制器 (4) 和 (5) 是非零的且不会发生 Zeno 现象. 由事件触发机制 (7) 和 (21) 可以得到:

$$0 < \tau_i \leq -\frac{\ln \sigma_{\min}}{g_1}, \quad (25)$$

如果 $\Psi(t_i + \tau_i, t_i + \Delta) \neq \emptyset$, 并且 $t_{i+1} \leq t_i + \Delta$, 由 $V(x(t))$ 的连续性推出:

$$V(x(t_{i+1})) = \sigma_{\max}V(x(t_i + \tau_i)) + \eta_{\omega}\|\omega\|_{[t_i+\tau_i, t_{i+1})}^2, \quad (26)$$

从 (25) 和 (26) 可以推出:

$\tilde{P}_2^{-1}C_2Y_2\tilde{P}_2^{-1} + A_{22}^T\tilde{P}_2^{-1} + \tilde{P}_1^{-1}B_2B_2^T\tilde{P}_1^{-1} + \tilde{P}_2^{-1}Y_2^TC_2^T\tilde{P}_2^{-1} + g_2\tilde{P}_2^{-1}$. 通过 $\text{diag}\{\tilde{P}_1, I, I, I, \tilde{P}_2, I\}$ 对 \tilde{Z}_1 进行左乘和右乘, 将非线性问题转化为线性矩阵不等式 (LMI) 的矩阵, \tilde{Z}_1 被转换为 (13) 式的左侧, 由 (13) 式可以得到 (19) 式成立, 则 $Z_1 < 0$.

所以 $t \in [t_i, t_i + \tau_i)$ 时, 有:

$$V(x(t)) \leq e^{-g_1(t-t_i)}V(x(t_i)) + \frac{\lambda_{\max}(Q)}{g_1}\|\omega(t)\|_{[t_i, t]}^2, \quad (20)$$

同时可以得到:

$$V(x(t_i + \tau_i)) \leq e^{-g_1\tau_i}V(x(t_i)) + \eta_{\omega}\|\omega(t)\|_{[t_i, t_i+\tau_i]}^2, \quad (21)$$

另外, 当 $t_i + \tau_i \leq t < t_{i+1}$ 时, 有:

$$\tilde{Z}_2 = \begin{pmatrix} \Phi_3 & L_1 & L_2 & \tilde{P}_1^{-1}D & & \\ * & -I & 0 & 0 & 0 & \\ * & * & -I & 0 & & \\ * & * & * & -Q & & \\ & & 0 & & \Phi_4 & L_2 \\ & & & & * & -\varepsilon I \end{pmatrix} < 0, \quad (22)$$

其中

$$V(x) \leq e^{g_2(t-t_i-\tau_i)}V(x(t_i+\tau_i)) + \frac{\lambda_{\max}(Q)}{g_2}\|\omega(t)\|_{[t_i+\tau_i, t]}^2, \quad (23)$$

则有:

$$\frac{\ln \sigma_{\max}}{g_2} \leq t_{i+1} - t_i - \tau_i \leq \Delta, \quad (27)$$

因此可以得到:

$$0 < \frac{\ln \sigma_{\max}}{g_2} - \frac{\ln \sigma_{\min}}{g_1} \leq t_{i+1} - t_i \leq \Delta. \quad (28)$$

从 (28) 式可以看出事件触发间歇控制器 (4) 和 (5) 是非零的且不会发生 Zeno 现象, 是具有现实意义的.

接下来由归纳法得:

$$\begin{aligned}
 V(x(t_{i+1})) &\leq e^{g_2(t_{i+1}-t_i-\tau_i)} e^{-g_1\tau_i} V(x(t_i)) + \eta \|\omega(t)\|_{[t_i, t_{i+1}]}^2 \leq \\
 &e^{g_2(t_{i+1}-t_i-\tau_i) + g_2(t_i-t_{i-1}-\tau_{i-1})} e^{-g_1\tau_i - g_1\tau_{i-1}} V(x(t_{i-1})) + \\
 &e^{g_2(t_{i+1}-t_i-\tau_i)} e^{-g_1\tau_i} \eta \|\omega(t)\|_{[t_i, t_{i+1}]}^2 + \dots \leq \\
 &e^{g_2 \sum_{k=0}^i (t_{k+1}-t_k-\tau_k) - g_1 \sum_{k=0}^i \tau_k} + [e^{g_2 \sum_{k=1}^i (t_{k+1}-t_k-\tau_k) - g_1 \sum_{k=1}^i \tau_k} + \\
 &e^{g_2 \sum_{k=2}^i (t_{k+1}-t_k-\tau_k) - g_1 \sum_{k=2}^i \tau_k} + \dots + e^{g_2(t_{i+1}-t_i-\tau_i) - g_1} + 1] \eta \|\omega\|_{[t_0, t_{i+1}]},
 \end{aligned} \tag{29}$$

其中 $\eta = (1 + e^{g_2\Delta})\eta_\omega$.
 由定义 2 得:

$$\begin{aligned}
 V(x(t)) &\leq e^{g_2(k+1)\Delta - g_1(k+1)\bar{\tau}} V(x(t_0)) + \eta \sum_{k=0}^i e^{g_2\Delta - g_1\bar{\tau}} \|\omega\|_{[0, t_{i+1}]} \leq \\
 &e^{(k+1)(g_2\Delta - g_1\bar{\tau})} V(x(t_0)) + \frac{\eta}{1 - e^{g_2\Delta - g_1\bar{\tau}}} \|\omega\|_{[0, t_{i+1}]},
 \end{aligned} \tag{30}$$

所以 $t \in [t_i + \tau_i, t_{i+1})$ 时, 由 (29) 和 (30) 式得:

$$\begin{aligned}
 V(x(t)) &\leq e^{-g_1(t-t_i)} V(x(t_i)) + \eta_\omega \|\omega\|_{[0, t]} \leq e^{-g_1\bar{\tau} + k(g_2\Delta - g_1\bar{\tau})} V(x(t_0)) + \\
 &\left(\frac{e^{-g_1\bar{\tau}}}{1 - e^{g_2\Delta - g_1\bar{\tau}}} + 1\right) \eta \|\omega\|_{[0, t]} \leq e^{(k+1)\bar{\tau} \frac{g_2\Delta - g_1\bar{\tau}}{\bar{\tau}}} e^{g_2\Delta} V(x(t_0)) + \\
 &\left(\frac{e^{-g_1\bar{\tau}}}{1 - e^{g_2\Delta - g_1\bar{\tau}}} + 1\right) \eta \|\omega\|_{[0, t]} \leq \\
 &e^{\frac{g_2\Delta - g_1\bar{\tau}}{\bar{\tau}} t} e^{g_2\Delta} V(x(t_0)) + \left(\frac{e^{g_2\Delta - g_1\bar{\tau}}}{1 - e^{g_2\Delta - g_1\bar{\tau}}} + 1\right) \eta \|\omega\|_{[0, t]}.
 \end{aligned} \tag{31}$$

同样地, 当 $t \in [t_i + \tau_i, t_{i+1})$ 时, 有:

$$\begin{aligned}
 V(t) &\leq e^{g_2(t-t_i-\tau_i)} V(x(t_i + \tau_i)) + \eta_\omega \|\omega\|_{[0, t]} \leq \\
 &e^{g_2(t-t_i-\tau_i)} (e^{-g_1\tau_i} V(x(t_i)) + \eta_\omega \|\omega\|_{[0, t_i]}) + \eta_\omega \|\omega\|_{[0, t]} \leq \\
 &e^{g_2\Delta - g_1\bar{\tau} + k(g_2\Delta - g_1\bar{\tau})} V(x(t_0)) + e^{g_2\Delta - g_1\tau_i} \frac{\eta}{1 - e^{g_2\Delta - g_1\bar{\tau}}} \|\omega\|_{[0, t]} + e^{g_2\Delta} \eta_\omega \|\omega\|_{[0, t]} + \eta_\omega \|\omega\|_{[0, t]} \leq \\
 &e^{(k+1)\bar{\tau} \frac{g_2\Delta - g_1\bar{\tau}}{\bar{\tau}}} V(x(t_0)) + \left(\frac{e^{g_2\Delta - g_1\bar{\tau}}}{1 - e^{g_2\Delta - g_1\bar{\tau}}} + 1\right) \eta \|\omega\|_{[0, t]} \leq \\
 &e^{\frac{g_2\Delta - g_1\bar{\tau}}{\bar{\tau}} t} e^{g_2\Delta} V(x(t_0)) + \left(\frac{e^{g_2\Delta - g_1\bar{\tau}}}{1 - e^{g_2\Delta - g_1\bar{\tau}}} + 1\right) \eta \|\omega\|_{[0, t]}.
 \end{aligned} \tag{32}$$

由 (31) 和 (32) 式得到:

$$\begin{aligned}
 V(x(t)) &\leq e^{\frac{g_2\Delta - g_1\bar{\tau}}{\bar{\tau}} t} e^{g_2\Delta} V(x(t_0)) + \left(\frac{e^{g_2\Delta - g_1\bar{\tau}}}{1 - e^{g_2\Delta - g_1\bar{\tau}}} + \right. \\
 &\left. 1\right) \eta \|\omega\|_{[0, t]}, t \in \mathbb{R}^+, \tag{33}
 \end{aligned}$$

因此, 可以得到:

$$\|\omega(t)\| \leq \Gamma_1 e^{\frac{g_2\Delta - g_1\bar{\tau}}{2\bar{\tau}} t} \|\omega(0)\| + \Gamma_2 \|\omega\|_{[0, t]}, t \in \mathbb{R}^+. \tag{34}$$

其中, $\Gamma_1 = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} e^{g_2\Delta}$, $\Gamma_2 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_{\min}(P)(1 - e^{g_2\Delta - g_1\bar{\tau}})}}$.

综上所述, 系统 (8) 处于输入状态稳定.

4 数值仿真

以下通过对一个实例的数值分析及仿真来验证第 3 部分中非线性双时间尺度系统在非周期事件触发间歇控制下稳定性理论分析的有效性. 考虑非线性双时间尺度系统 (1), $x = (x_1, x_2)^T = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22})^T$,

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= 0.01, D = \text{diag}\{1, 1\}, L_1 = \text{diag}\{l_{11}, l_{12}\} = \text{diag}\{1, 0.8\}, \\
 L_2 &= \text{diag}\{l_{21}, l_{22}\} = \text{diag}\{0.5, 0.8\}, \text{其他参数如下:} \\
 A_{11} &= \begin{pmatrix} 0 & 0.4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_{12} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0 \\ 0.345 & 0 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} -0.2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
 C_1 &= \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}, A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & -0.524 \\ 0.88 & 0 \end{pmatrix}, A_{22} = \begin{pmatrix} -0.465 & 0.262 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\
 B_1 &= \begin{pmatrix} -0.2 & 0.1 \\ 0.2 & -0.4 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}, f(x_1(t)) = \begin{pmatrix} f(x_{11}(t)) \\ f(x_{12}(t)) \end{pmatrix} = \\
 \begin{pmatrix} \tanh(x_{11}(t)) \\ 0.8 \tanh(x_{12}(t)) \end{pmatrix}, f(x_2(t)) = \begin{pmatrix} f(x_{21}(t)) \\ f(x_{22}(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \tanh(x_{21}(t)) \\ 0.8 \tanh(x_{22}(t)) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

令 $\omega(t) = (0, 0)^T$, $x(0) = (30, -22, -18, 20)^T$, 系统 (1) 的无控制动态解如图 1 所示, 从图 1 容易得到, 即便不存在外部扰动输入, 没有控制输入的系统 (1) 也是不稳定的.

接下来, 令 $g_1 = 5.6, g_2 = 9.6, \eta_\omega = 5 \geq \max\{1.5443, 1.0134\} = 1.5443, \sigma_{\max} = 1.2, \sigma_{\min} = 0.008, \Delta = 1.2,$

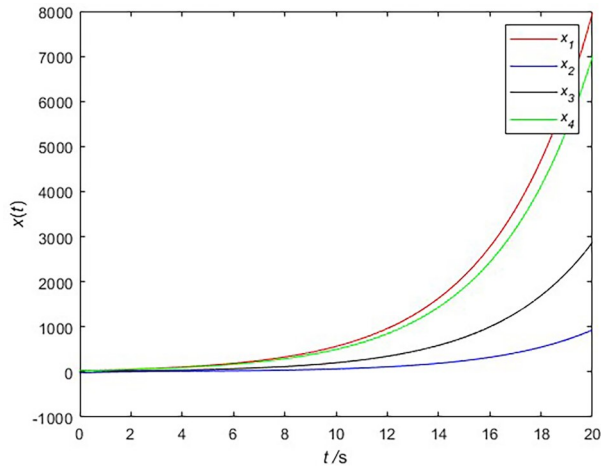


图 1 无外部干扰输入和控制输入时系统(1)的变化轨迹

Fig. 1 Trajectory of system (1) without exogenous disturbance input and control input

利用 MATLAB 的 LMI 工具箱求解定理 1 中的线性矩阵不等式,得到控制增益矩阵:

$$\begin{aligned} K_1 &= Y_1 \widetilde{P}_1^{-1} = (-0.1664, 0.0313), \\ K_2 &= Y_2 \widetilde{P}_2^{-1} = (0.0059, 0.0030). \end{aligned} \quad (35)$$

令外部扰动输入为 $\omega(t) = (\sin(t), \cos(t))^T$,图 2 显示了具有控制激活间隔和控制增益的系统(1)的仿真结果,说明具有控制激活间隔和控制增益的非周期间歇控制可以使系统(1)达到输入状态稳定.此外, $u(t)$ 的变化以及触发时刻和触发间隔如图 3 所示.红色圆圈表示的是控制区间的开始时刻 $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$,而蓝色圆圈表示的是休息区间的开始时刻 $\{t_i + \tau_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

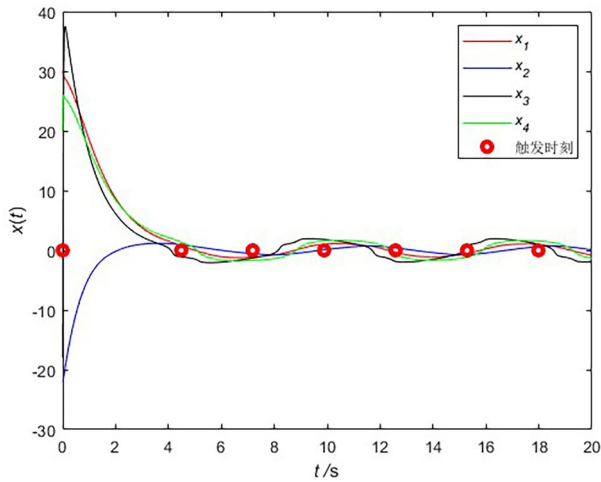


图 2 具有事件触发控制和控制增益的系统(1)的变化轨迹

Fig. 2 Trajectory of system (1) with event-triggered control and control gain

5 结论

本文采用了非周期事件触发间歇控制方法,研

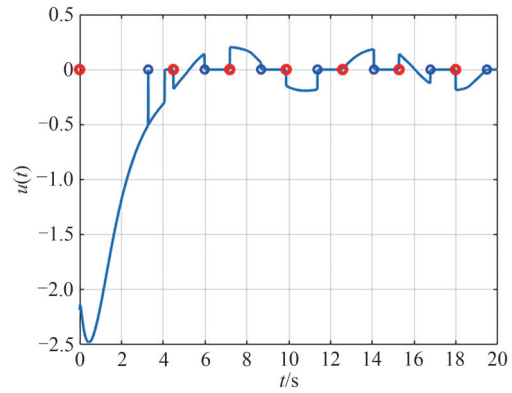


图 3 控制输入在具有控制激活间隔和控制增益的演变情况

Fig. 3 The evolutions of control input with control activation intervals and control gain

究了一类非线性双时间尺度系统的输入状态稳定性,并给出了一组线性矩阵不等式的稳定判据.理论分析与数值仿真结果表明:采用非周期事件触发间歇控制可以实现非线性双时间尺度系统的输入状态稳定.在这种控制方式下,控制时刻根据系统状态和时间进行选择,从而有效减少了系统的控制频率,降低了控制成本.

参 考 文 献

- [1] WANG R, ZHOU T, JING Z, et al. Modelling periodic oscillation of biological systems with multiple timescale networks[J]. *Systems Biology*, 2004, 1(1): 71-84.
- [2] JIANG N, CHIANG H D. A two-time scale dynamic correction method for fifth-order generator model undergoing large disturbances[J]. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2016, 31(5): 3616-3623.
- [3] ZAGARIS A, KAPER H G, KAPER T J. Analysis of the computational singular perturbation reduction method for Chemical kinetics[J]. *Journal of Nonlinear Science*, 2004, 14(1): 59-91.
- [4] SOCHA L. Exponential stability of singularly perturbed stochastic systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(3): 576-580.
- [5] ZHAO J, YANG C, GAO W, et al. ADP-based optimal control of linear singularly perturbed systems with uncertain dynamics: A two-stage value iteration method[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2023, 70(12): 4399-4403.
- [6] BHANDARI M, FULWANI D M, GUPTA R. Event triggered control of two time scale system[C]//2017 Indian Control Conference (ICC). Guwahati:IEEE, 2017: 309-314.
- [7] YU T T, WANG Y W, LEI Y, et al. Event-triggered and self-triggered impulsive control for two-time-scale

- systems[J]. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2023, 48: 101309.
- [8] 张腾, 冯立超, 何秀丽. 基于忆阻的神经网络在非周期间歇性控制下的稳定化[J]. *海南大学学报(自然科学版)*, 2017, 35(3): 205-210.
- [9] HEEMELS W, DONKERS M, TEEL A R. Periodic event-triggered control for linear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(4): 847-861.
- [10] LIU B, HILL D J, SUN Z. Stabilisation to input-to-state stability for continuous-time dynamical systems *via* event-triggered impulsive control with three levels of events[J]. *IET Control Theory & Applications*, 2018, 12(9): 1167-1179.
- [11] LIU B, HILL D J, SUN Z, et al. Event-triggered control *via* impulses for exponential stabilization of discrete-time delayed systems and networks [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2019, 29(6): 1613-1638.
- [12] YANG M, LIU B, LIU T. et al. Uniform synchronization for chaotic systems *via* event-triggered aperiodic intermittent control[J]. *Asian Journal of Control*, 2021, 23(6): 2719-2728.
- [13] LIU B, YANG M, LIU T, et al. Stabilization to exponential input-to-state stability *via* aperiodic intermittent control [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, 66(6): 2913-2919.
- [14] ZHUANG J, PENG S, WANG Y. Event-triggered intermittent-based impulsive control for stabilization of nonlinear systems [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2022, 69(12): 5039-5043.
- [15] 宋广发, 梅俊, 实现建筑能效与热舒适双重优化: 基于 PMV 的多区域暖通空调事件触发间歇控制研究[J]. *三峡大学学报(自然科学版)*, 2024, 46(3): 99-104.
- [16] 梅俊, 李园园, 杨占英, 等. 基于间歇牵制量化控制的耦合复杂网络有限时间同步[J]. *中南民族大学学报(自然科学版)*, 2021, 40(5): 525-529.
- [17] GUO Y, DUAN M, WANG P. Input-to-state stabilization of semilinear systems *via* aperiodically intermittent event-triggered control [J]. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2022, 9(2): 731-741.
- [18] 俞立. 鲁棒控制: 线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.

(责编 曹东, 校对 雷建云)