

斜导数边界条件下带有裂缝的混合障碍物散射问题

龙吟, 郭军*

(中南民族大学 数学与统计学学院, 武汉 430074)

摘要 研究了具有斜导数边界条件的裂缝和不可穿透障碍物对入射平面波散射的正问题. 采用边界积分方程方法, 通过将散射场表示为单层势、双层势和切向势的组合, 把原问题转化为等价的边界积分系统. 在适当的假设条件下, 利用与切向势算子相关的一些性质, 证明了等价的边界积分算子是指标为零的Fredholm算子, 从而得到正散射问题解的适定性. 这类问题在确定月球、地球和其他天体的引力场, 以及潮汐与礁石的形状等方面具有重要应用.

关键词 斜导数; Helmholtz 方程; 正散射问题; Fredholm 定理; 边界积分方程方法

中图分类号 O411.1 **文献标志码** A **文章编号** 1672-4321(2025)04-0570-07

doi: 10.20056/j.cnki.ZNMDZK.20250416

Scattering problem of mixed obstacles with cracks under oblique derivative boundary conditions

LONG Yin, GUO Jun*

(College of Mathematics and Statistics, South-Central Minzu University, Wuhan 430074, China)

Abstract The direct problem for the scattering of crack and impenetrable obstacle with mixed oblique derivative boundary conditions from the incident plane wave are researched. By representing the scattered field as the combination of single-layer, double-layer and tangential potentials, we use the boundary integral equation method to transform the direct scattering problem into an equivalent boundary integral system. Under appropriate assumptions, utilizing the properties related to the tangential potential operator, it is proved that the equivalent boundary integral system is Fredholm of index zero. Then well-posedness of the direct scattering problem is obtained. Such problems have important applications in determining the gravitational fields of the moon, Earth, and other celestial bodies, as well as the shape of tides and reefs.

Keywords oblique derivative; Helmholtz equation; direct scattering problem; Fredholm theory; boundary integral equation method

通常情况下, 障碍物的声波散射问题可以由 Helmholtz 方程和 Dirichlet、Neumann 或阻抗边界条件来刻画. 本文研究的是时谐平面波的混合散射问题, 散射体是一条裂缝 Σ 和一个不可穿透的障碍物 D , 它们在边界上满足斜导数边界条件和 Dirichlet 边界条件. 这样的散射问题在生活中有很多的例子, 如在确定月球、地球和其他天体的引力场, 确定潮汐与礁石的形状等方面具有重要的应用^[1]. 有关斜导数边界条件详细的描述请参考文献[2].

确切地说, 设障碍物 $D \subset R^2$ 是一个有界单连通

区域, 它有一个足够光滑的边界 $\Gamma_2: = \partial D$. 用 $\Sigma \subset R^2$ 表示裂缝, 它是一条分段光滑曲线, 并且假设 Σ 可以扩展到任意分段光滑, 单连通的封闭曲线 $\partial\Omega$, 其包含的有界区域为 Ω . 用 ν 和 τ 分别表示其边界 ∂D 和 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量和切向量, 其中 τ 的方向与 ν 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 角的方向一致. 假设入射波为时谐平面波 $u^i = e^{ikx \cdot d}$, 其中 d 是入射方向, 且 $|d| = 1, k > 0$ 是波数. 设 u 是由障碍物 D 和裂缝 Σ 产生的散射场, 则它满足 Helmholtz 方程

收稿日期 2024-11-01

* 通信作者 郭军(1980-), 男, 讲师, 博士, 研究方向: 散射理论, E-mail: hssxgj@126.com

基金项目 中南民族大学大学生创新训练计划资助项目(XCX2253)

$$\Delta u + k^2 u = 0, \text{ in } \mathbb{R}^2 \setminus (\bar{D} \cup \bar{\Sigma}). \quad (1)$$

总场 $U = u^i + u$ 满足以下形式的混合边界条件

$$\frac{\partial U}{\partial \nu} + i\lambda_1 \frac{\partial U}{\partial \tau} = 0, \text{ on } \partial D, \quad (2)$$

$$\frac{\partial U_-}{\partial \nu} + i\lambda_2 \frac{\partial U_-}{\partial \tau} = 0, \text{ on } \Sigma, \quad (3)$$

$$U_+ = 0, \text{ on } \Sigma, \quad (4)$$

其中阻抗系数 λ_1, λ_2 均为正常数, 符号 $\frac{\partial u_-}{\partial \nu}, \frac{\partial u_-}{\partial \tau}, u^+$ 分别表示为

$$\frac{\partial u_-}{\partial \nu} = \lim_{q \rightarrow 0^+} \nu \cdot \nabla u(x - q\nu), \frac{\partial u_-}{\partial \tau} = \lim_{q \rightarrow 0^+} \tau \cdot \nabla u(x - q\tau), u^+ = \lim_{q \rightarrow 0^+} u(x + q\nu).$$

注: $(\cdot)_\pm$ 表示 u 从外部和内部分别逼近相应区域边界时的极限. 该边界条件是斜导数和 Dirichlet 边界条件的组合形式. 散射场 u 满足 Sommerfeld Radiation 条件

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0, \quad (5)$$

其中 $r = |x|$, 并且此式对 $\hat{x} = \frac{x}{|x|}$ 一致成立. 已知 $u(x, d)$ 具有以下渐近表示:

$$u(x, d) = \frac{e^{ik|x|}}{\sqrt{|x|}} \left\{ u^\infty(\hat{x}, d) + o\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, \text{ as } |x| \rightarrow \infty, \quad (6)$$

其中 u^∞ 是散射场 u 的远场模式.

1995 年, KRESS 在文献[3]中采用边界积分方程的方法研究了裂缝的正、逆散射问题, 通过各个位势的之间的联系将无界区域的散射问题转化为边界积分方程问题. 1997 年, MÖNCH 在文献[4]中将这种方法扩展到 Neumann 裂缝. 2000 年, KIRSCH 和 RITTER 在文献[5]中继续了 KRESS 的工作, 他们使用因式分解方法从远场模式的信息中重建了裂缝的形状, 同年 AMMARI 等人将这些结果推广到文献[6]中的麦克斯韦方程的裂缝散射问题. CAKONI 和 COLTON 在文献[7]中用积分方程方法研究了表面阻抗为 λ 的材料覆盖裂缝的正散射问题, 并用线性采样方法恢复开弧, MING 在 2008 年讨论了阻抗裂缝的正散射和逆散射问题[8]. 2010 年, YAN 和 MAO 在文献[9]中考虑了一类电磁时谐平面波与具有开口圆弧和可穿透障碍物的无限长圆柱的混合散射问题, 利用边界积分方程的方法建立正散射问题解的存在唯一性. 对于具有斜导数边界条件的障碍物正散射问题, 2001 年, KRUTITSKII 通过角势和单层势之和, 使用积分方程方法研究了障碍物的正

散射问题, 该问题被归结为一个 Cauchy 奇异积分方程, 它是经典函数空间中具有唯一解的第二类 Fredholm 方程. MARTIN 在文献[10]中仅用单层势导出了一个包含 Cauchy 奇异积分的拟 Fredholm 积分方程, WANG 和 LIU 在文献[11]中用 Lax-Phillips 方法证明了正散射问题的可解性. 关于斜导数边值问题更多的文章, 推荐[7, 12-14]等文献.

以上文献只考虑的单个散射体的散射问题, 而关于具有斜导数边界条件的障碍物和裂缝的混合散射问题鲜有涉及. 本文将致力于求解混合散射模型(1)-(5), 与具有斜导数边界条件的单一裂缝或障碍物的研究相比, 问题的复杂性和处理难度都显著增加. 本文巧妙的构造了一种单层势、双层势和切向势的组合式, 在 Sobolve 空间中求解正散射问题. 根据边界条件所得的等价边界积分系统不再是单个方程, 而是一个矩阵算子, 证明该矩阵算子有界可逆变得困难. 经过详细分析矩阵算子中的各种积分算子性质, 并借鉴 WANG 在文献[11, 13]中对切向算子的处理技术, 最终将矩阵算子分解为强制算子和紧算子, 并据此证明边界积分系统是一个 Fredholm 方程组. 所得结果与文献[15-18]中经典散射问题的结果一致.

1 正散射问题的描述

在本节中, 将详细描述正散射问题(1)-(5)的数学模型. 为此, 需要在开弧和障碍物上引入 Sobolve 空间. 如前所述, Ω 是一个有界光滑区域, Σ 是 $\partial\Omega$ 的一部分, 介绍如下的 Sobolve 空间:

$$L^2(\Sigma) = \{u|_\Sigma : u \in L^2(\partial\Omega)\},$$

$$H^{\frac{1}{2}}(\Sigma) = \{u|_\Sigma : u \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\},$$

$$\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma) = \{u \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) : \text{suppu} \subseteq \bar{\Sigma}\},$$

$$\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma) = (H^{\frac{1}{2}}(\Sigma))',$$

$$H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma) = (\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma))',$$

其中 $\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)$ 是 $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$ 的对偶空间, $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)$ 是 $\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$ 的对偶空间. 有关这些空间的详细讨论请参考文献[1].

考虑下面的混合边界问题:

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, \text{ in } R^2 \setminus (\bar{D} \cup \bar{\Sigma}), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + i\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial \tau} = f, \text{ on } \partial D, \\ \frac{\partial u_-}{\partial \nu} + i\lambda_2 \frac{\partial u_-}{\partial \tau} = g, \text{ on } \Sigma, \\ u_+ = h, \text{ on } \Sigma, \end{cases} \quad (7)$$

其中 $f \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$, $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)$, $h \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$, 寻求解 $u \in H_{loc}^1(R^2 \setminus (\bar{D} \cup \bar{\Sigma}))$ 满足如上问题. 注意, 对于来自入射平面波 u^i 的散射问题, 有

$$f = -\frac{\partial u^i}{\partial \nu} - i\lambda_1 \frac{\partial u^i}{\partial \tau}, \quad g = -\frac{\partial u^i}{\partial \nu} - i\lambda_2 \frac{\partial u^i}{\partial \tau}, \quad h = -u^i. \quad (8)$$

下面是一个简单的示意图, u^i 是入射场, u 是散射场.

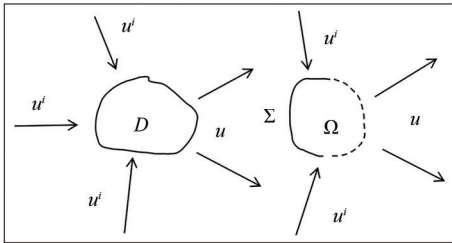


图 1 裂缝与不可穿透有界散射体的散射

Fig. 1 Scattering from cracks and impenetrable bounded scatterers

为方便起见, 在本文的其余部分中使用 Γ_1 表示开曲线 Σ , Γ_2 表示开障碍物边界 ∂D , 并令 $\Gamma = \partial\Omega \setminus \bar{\Sigma}$.

2 正散射问题的适定性

2.1 边界问题(7)解 u 的唯一性

定理 2.1 正散射问题(7)的解 u 至多有一个.

证明: 要证明正散射问题(7)的解至多有一个, 只需证明(7)在齐次条件下只有零解. 假定 D, Ω 包含在以原点为中心, r 为半径的充分大圆盘 B_r 中, ∂B_r 为圆盘的边界. 根据 $\partial\Omega$ 的定义, 可知在 $\Gamma = \partial\Omega \setminus \bar{\Sigma}$ 处是可穿透的. 下证在 $R^2 \setminus (\bar{D} \cup \bar{\Sigma})$ 内 $u \equiv 0$.

分别在区域 $Z_r = B_r \setminus (\bar{D} \cup \bar{\Omega})$ 和 Ω 内对 u 与 \bar{u} 使用 Green 公式得到

$$\int_{\partial B_r} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds = \int_{\Gamma_1} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds + \int_{\partial\Omega} u_+ \frac{\partial \bar{u}_+}{\partial \nu} ds + \int_{Z_r} (|\nabla u|^2 - k^2 |u|^2) dx, \quad (9)$$

$$\int_{\partial\Omega} u_- \frac{\partial \bar{u}_-}{\partial \nu} ds = \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - k^2 |u|^2) dx, \quad (10)$$

然后有

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \int_{\Gamma_2} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds &= \frac{-i}{2} \int_{\Gamma_2} (u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds - \bar{u} \frac{\partial u}{\partial \nu}) ds = \frac{-i}{2} \int_{\Gamma_2} \\ (i\lambda_1 u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} ds + i\lambda_1 \bar{u} \frac{\partial u}{\partial \tau}) ds &= \frac{\lambda_1}{2} \int_{\Gamma_2} (u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} ds + \bar{u} \frac{\partial u}{\partial \tau}) ds \\ &= \frac{\lambda_1}{2} \int_{\Gamma_2} (u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} ds - u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau}) ds = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

又由于 u 和 $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ 在边界 Γ 上连续, u 的边界条件表明

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} u_- \frac{\partial \bar{u}_-}{\partial \nu} ds &= -i\lambda_2 \int_{\Gamma_1} u_- \frac{\partial \bar{u}_-}{\partial \tau} ds + \int_{\Gamma} u_- \frac{\partial \bar{u}_-}{\partial \nu} ds, \quad (12) \\ \int_{\partial\Omega} u_+ \frac{\partial \bar{u}_+}{\partial \nu} ds &= -i\lambda_2 \int_{\Gamma_1} u_+ \frac{\partial \bar{u}_+}{\partial \tau} ds + \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - k^2 |u|^2) dx. \end{aligned} \quad (13)$$

利用分部积分, 得到

$$\int_{\partial\Omega} u_{\pm} \frac{\partial \bar{u}_{\pm}}{\partial \tau} ds = - \int_{\partial\Omega} \bar{u}_{\pm} \frac{\partial u_{\pm}}{\partial \tau} ds = \int_{\partial\Omega} \overline{u_{\pm} \frac{\partial \bar{u}_{\pm}}{\partial \tau}} ds,$$

因此

$$\operatorname{Re} \int_{\partial\Omega} u_{\pm} \frac{\partial \bar{u}_{\pm}}{\partial \tau} ds = 0. \quad (14)$$

由于

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} u_- \frac{\partial \bar{u}_-}{\partial \tau} ds &= \int_{\Gamma_1} u_- \frac{\partial \bar{u}_-}{\partial \tau} ds + \int_{\Gamma} u_- \frac{\partial \bar{u}_-}{\partial \tau} ds = \int_{\Gamma_1} u_- \frac{\partial \bar{u}_-}{\partial \tau} ds + \\ \int_{\Gamma} u_+ \frac{\partial \bar{u}_+}{\partial \tau} ds &= \int_{\Gamma_1} u_- \frac{\partial \bar{u}_-}{\partial \tau} ds + \int_{\partial\Omega} u_+ \frac{\partial \bar{u}_+}{\partial \tau} ds - \int_{\Gamma_1} u_+ \frac{\partial \bar{u}_+}{\partial \tau} ds \\ &= \int_{\Gamma_1} u_- \frac{\partial \bar{u}_-}{\partial \tau} ds + \int_{\partial\Omega} u_+ \frac{\partial \bar{u}_+}{\partial \tau} ds, \end{aligned}$$

因此

$$\operatorname{Re} \int_{\Gamma_1} u_- \frac{\partial \bar{u}_-}{\partial \tau} ds = 0. \quad (15)$$

根据(11), (15)式对(9)式取虚部得到

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \int_{\partial B_r} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds &= \operatorname{Im} \int_{\Gamma_2} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds + \operatorname{Im} \int_{\partial\Omega} u_+ \frac{\partial \bar{u}_+}{\partial \nu} ds \\ &= 0 - \lambda_2 \operatorname{Re} \int_{\Gamma_1} u_- \frac{\partial \bar{u}_-}{\partial \tau} ds = 0, \end{aligned}$$

由 Rellich's 引理^[19]可知, 在 $R^2 \setminus (\bar{D} \cup \bar{\Sigma})$ 中 $u \equiv 0$. 证明完成.

2.2 边界积分方程组的生成

第一步: 边界积分算子及其性质.

边界积分方程方法取决于如下积分算子. 令

$$\Phi(x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x-y|), \quad x \neq y$$

是二维 Helmholtz 方程的基本解, 引入单层势和双层势算子

$$\begin{aligned} S_{\bar{y}} \phi(x) &= \int_{\Gamma_1} \Phi(x, y) \phi(y) ds(y) \Big|_{\Gamma_1}, \quad K_{\bar{y}} \phi(x) = \\ &= \int_{\Gamma_1} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \phi(y) ds(y) \Big|_{\Gamma_1}, \end{aligned}$$

其法向导数算子分别为

$$K'_{ij}\phi(x) = \int_{\Gamma_i} \frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\nu(x)} \phi(y) ds(y) \Big|_{\Gamma_i}, T'_{ij}\phi(x) = \frac{\partial}{\partial\nu(x)} \int_{\Gamma_i} \frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\nu(y)} \phi(y) ds(y) \Big|_{\Gamma_i}.$$

定义奇异积分算子

$$H_{ij}\phi(x) = \int_{\Gamma_i} \frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\tau(y)} \phi(y) ds(y) \Big|_{\Gamma_i}, H'_{ij}\phi(x) = \int_{\Gamma_i} \frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\tau(x)} \phi(y) ds(y) \Big|_{\Gamma_i}, N_{ij}\phi(x) = \frac{\partial}{\partial\nu(x)} \int_{\Gamma_i} \frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\tau(x)} \phi(y) ds(y) \Big|_{\Gamma_i}, L_{ij}\phi(x) = \frac{\partial}{\partial\tau(x)} \int_{\Gamma_i} \frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\nu(y)} \phi(y) ds(y) \Big|_{\Gamma_i}, M_{ij}\phi(x) = \frac{\partial}{\partial\tau(x)} \int_{\Gamma_i} \frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\tau(y)} \phi(y) ds(y) \Big|_{\Gamma_i},$$

其中, $i, j = 1, 2, (\cdot)_{\Gamma_i}$ 表示在 Γ_i 上的限制.

关于算子 $S_{11}, K_{11}, K'_{11}, T_{11}$ 的映射性质以及相应势的跳跃关系, 参见文献[1]. 进一步, 可以推导出与 H_{11}, H'_{11}, H'_{22} 相关的势不存在跳跃. 事实上, 由于

$$Q(x) = \int_{\Gamma_1} \frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\tau(y)} \phi(y) ds(y) = -\Phi(x,y) \frac{\partial\phi(y)}{\partial\tau(y)} ds(y), \phi(y) \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1), x \in R^2 \setminus \bar{\Gamma}_1,$$

单层势的跳跃关系表明, 势 $Q(x)$ 不存在跃变. 设 $V(x)$ 为单层势

$$V(x) = \int_{\Gamma_1} \Phi(x,y) \phi(y) ds(y), \phi(y) \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1), x \in R^2 \setminus \bar{\Gamma}_1,$$

由于以下关系^[19]:

$$\text{grad}V_{\pm}(x) = \int_{\Gamma_1} \text{grad}_x \Phi(x,y) \phi(y) ds(y) \mp \frac{1}{2} \phi(x) \nu(x), x \in \Gamma_1,$$

得到

$$u(x) = \int_{\Gamma_1} \Phi(x,y) \alpha(y) ds(y) - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\nu(y)} \beta(y) ds(y) + i\lambda_2 \int_{\Gamma_1} \frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\tau(y)} \beta(y) ds(y) + \int_{\Gamma_2} \Phi(x,y) \gamma(y) ds(y), x \in R^2 \setminus (\bar{D} \cup \bar{\Sigma}), \quad (19)$$

其中 $\alpha \in \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1), \beta \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1), \gamma \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$ 是未知密度.

让 x 从 Ω 的外部趋于边界 Γ_1 , 得到

$$u_+ \Big|_{\Gamma_1} = S_{11} \alpha - K_{11} \beta - \frac{1}{2} \beta + i\lambda_2 H_{11} \beta + S_{21} \gamma, \quad (20)$$

进一步可得

$$\frac{\partial V_{\pm}}{\partial\tau}(x) = \int_{\Gamma_1} \frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\tau(x)} \phi(y) ds(y), x \in \Gamma_1.$$

因此, 断言成立. 关于算子 H_{11}, H'_{11}, H'_{22} 的映射性质, 可参考文献[20].

根据 KRESS 在文献[21]中的研究, 可以推导出双层势的梯度,

$$D(x) = \int_{\Gamma_1} \frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\nu(y)} \phi(y) ds(y), \phi \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1), x \in R^2 \setminus (\bar{\Gamma}_1)$$

满足

$$\text{grad}D(x) = k^2 \int_{\Gamma_1} \Phi(x,y) \phi(y) \nu(y) ds(y) + \left(\frac{\partial W(x)}{\partial x_2}, -\frac{\partial W(x)}{\partial x_1} \right),$$

其中, $x = (x_1, x_2) \in R^2 \setminus \bar{\Gamma}_1$ 和 $W(x) = -Q(x)$. 然后利用 $\tau = (s_1, s_2)$ 和 $\nu = (-s_2, s_1)$ 之间的关系, 得到 $D(x)$ 的法向导数, 将其限制在边界 Γ_1 上得到

$$\frac{\partial D_{\pm}}{\partial\nu}(x) = \frac{\partial W(x)}{\partial\tau(x)} + k^2 \nu \cdot (S_{11}(\phi\nu))(x) = (H'_{11} \frac{\partial\phi}{\partial\tau})(x) + k^2 \nu \cdot (S_{11}(\phi\nu))(x), x \in \Gamma_1, \quad (16)$$

切向导数为

$$\frac{\partial D_{\pm}}{\partial\tau}(x) = -\frac{\partial W(x)}{\partial\nu(x)} + k^2 \nu \cdot (S_{11}(\phi\nu))(x) = (-K'_{11} \frac{\partial\phi}{\partial\tau} \pm \frac{1}{2} \frac{\partial\phi}{\partial\tau})(x) + k^2 \tau \cdot (S_{11}(\phi\nu))(x), x \in \Gamma_1, \quad (17)$$

这里下标“-”和“+”分别表示从 Ω 的内部和外部到边界 Γ_1 的极限. 等式(18)揭示了 T_{11} 和 H'_{11} 之间的关系

$$T_{11} \phi = H'_{11} \frac{\partial\phi}{\partial\tau} + k^2 \nu \cdot S_{11}(\phi\nu), x \in \Gamma_1. \quad (18)$$

第二步: 导出边界积分方程组.

以单层势、双层势和切向势的组合形式求解(7), 并构造如下形式的解

$$\frac{\partial u_-}{\partial\nu} \Big|_{\Gamma_1} = K'_{11} \alpha + \frac{1}{2} \alpha - T_{11} \beta - i\lambda_2 K'_{11} \frac{\partial\beta}{\partial\tau} - \frac{i\lambda_2}{2} \frac{\partial\beta}{\partial\tau} + K'_{21} \gamma, \quad (21)$$

$$\frac{\partial u_-}{\partial\tau} \Big|_{\Gamma_1} = H'_{11} \alpha + K'_{11} \frac{\partial\beta}{\partial\tau} + \frac{1}{2} \frac{\partial\beta}{\partial\tau} - k^2 \tau \cdot S_{11}(\beta\nu) - i\lambda_2 H'_{11} \frac{\partial\beta}{\partial\tau} + H'_{21} \gamma. \quad (22)$$

让 x 从 D 的外部趋于边界 Γ_2 , 得到

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_2} = K'_{12}\alpha - T_{12}\beta + i\lambda_2 N_{12}\beta + K'_{22}\gamma - \frac{1}{2}\gamma, \quad (23)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} \Big|_{\Gamma_2} = H'_{12}\alpha - L_{12}\beta + i\lambda_2 M_{12}\beta + H'_{22}\gamma. \quad (24)$$

根据(17)和(18), 可以从等式(21)和(22)得到

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + i\lambda_2 \frac{\partial u}{\partial \tau}\right) \Big|_{\Gamma_1} = K'_{11}\alpha + i\lambda_2 H'_{11}\alpha + \frac{1}{2}\alpha + (\lambda_2^2 - 1)T_{11}\beta - \lambda_2 k^2(\lambda_2\nu + i\tau)S_{11}(\beta\nu) + K'_{21}\gamma + i\lambda_2 H'_{21}\gamma. \quad (25)$$

从等式(23)和(24)得到

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + i\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial \tau}\right) \Big|_{\Gamma_2} = K'_{12}\alpha + i\lambda_1 H'_{11}\alpha - T_{12}\beta + i\lambda_2 N_{12}\beta - i\lambda_1 L_{12}\beta - \lambda_1 \lambda_2 M_{12}\beta + K'_{22}\gamma + i\lambda_1 H'_{22}\gamma - \frac{1}{2}\gamma. \quad (26)$$

结合(20), (25), (26)可以推导出一个边界积分系统

$$\begin{pmatrix} S_{11} & -K_{11} + i\lambda_2 H_{11} - \frac{1}{2}I & S_{21} \\ K'_{11} + i\lambda_2 H'_{11} + \frac{1}{2}I & (\lambda_2^2 - 1)T_{11} - \lambda_2 k^2(\lambda_2\nu + i\tau)S_{11}(\beta\nu) & K'_{21} + i\lambda_2 H'_{21} \\ K'_{12} + i\lambda_1 H'_{12} & -T_{12} + i\lambda_2 N_{12} - i\lambda_1 L_{12} - \lambda_1 \lambda_2 M_{12} & K'_{22} + i\lambda_1 H'_{22} - \frac{1}{2}I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ g \\ f \end{pmatrix}, \quad (27)$$

其中 $S_{11}(\nu)(x) = \begin{pmatrix} (S_{11}s_2)(x) \\ (S_{11}s_1)(x) \end{pmatrix}$, 并且 $(\lambda_2\nu(x) + i\tau(x))S_{11}(\nu)(x)$ 定义为

$$(\lambda_2\nu(x) + i\tau(x))S_{11}(\nu)(x) = (\lambda_2 s_2 + i s_1)S_{11}(x) - (-\lambda_2 s_1 + i s_2)(S_{11}s_1)(x),$$

其中 $\tau(x) = (s_1(x), s_2(x))$, $\nu(x) = (s_2(x), -s_1(x))$. 由于如下的积分算子是有界的^[1,20]

$$\begin{aligned} S_{ij}: \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_i) &\rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j), K_{ij}: \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j), \\ K'_{ij}: \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_i) &\rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_j), \\ T_{ij}: \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i) &\rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_j), H_{ij}: \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j), H'_j: \\ \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_i) &\rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_j), N_{ij}: \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_j), L_{ij}: \\ \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i) &\rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_j), M_{ij}: \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_j). \end{aligned}$$

注意当 $i = 2$ 时, $\tilde{H}^{\pm\frac{1}{2}}(\Gamma_2) \rightarrow H^{\pm\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$. 用 A 表示上述系统的矩阵算子, 令

$$\begin{aligned} X &= \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2), \\ X^* &= H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2), \end{aligned}$$

$$\tilde{A}_0 = \begin{pmatrix} \tilde{S}_{11i} & -\tilde{K}_{110} + i\lambda_2 \tilde{H}_{110} - \frac{1}{2}I \\ \tilde{K}'_{110} + i\lambda_2 \tilde{H}'_{110} + \frac{1}{2}I & (\lambda_2^2 - 1)\tilde{T}_{11i} \\ & & K'_{22} + i\lambda_1 H'_{22} - \frac{1}{2}I \end{pmatrix}, \tilde{A}_c = \tilde{A} - \tilde{A}_0,$$

然后令

$$A_1 = K'_{22} + i\lambda_1 H'_{22} - \frac{1}{2}I, A_2 = \begin{pmatrix} \tilde{S}_{11i} & -\tilde{K}_{110} i\lambda_2 \tilde{H}_{110} - \frac{1}{2}I \\ \tilde{K}'_{110} + i\lambda_2 \tilde{H}'_{110} + \frac{1}{2}I & (\lambda_2^2 - 1)\tilde{T}_{11i} \end{pmatrix}.$$

众所周知算子 $K'_{22}, K'_{220}: H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$ 是紧的,

$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$ 是紧的, 特别的有如下关系^[1]:

$H'_{22}, H'_{220}: H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$ 是有界的, $H'_{22} - H'_{220}$:

$$(K'_{220})^2 - (H'_{220})^2 = I, \quad (28)$$

则 $A: X \rightarrow X^*$ 是有界的.

2.3 积分方程组(27)的求解

定理 2.2 算子 $A: X \rightarrow X^*$ 是一个指标为零的单射 Fredholm 算子.

证明: 将 $(\alpha, \beta)^T$ 零延拓到整个边界 $\partial\Omega$ 上, 将其

表示为 $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})^T \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \times H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, 设 $\tilde{S}_{ij}, \tilde{K}_{ij}, \tilde{K}'_{ij}, \tilde{H}_{ij}, \tilde{H}'_{ij}, \tilde{T}_{ij}, \tilde{N}_{ij}, \tilde{L}_{ij}, \tilde{M}_{ij}$ 为分别定义在边界 $\partial\Omega$ 上与 $S_{ij}, K_{ij}, K'_{ij}, H_{ij}, H'_{ij}, T_{ij}, N_{ij}, L_{ij}, M_{ij}$ 有相同的积分核算子, 用 $\tilde{K}_{j0}, \tilde{K}'_{j0}, \tilde{H}_{j0}$ 和 \tilde{H}'_{j0} 表示为定义在 $\partial\Omega$ 上的积分算子 $\tilde{K}_{ij}, \tilde{K}'_{ij}, \tilde{H}_{ij}$ 和 \tilde{H}'_{ij} , 但用 $\Phi_0(x, y)$ 代替 $\Phi(x, y)$

$$\Phi_0(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|}.$$

设 \tilde{S}_{11i} 和 \tilde{T}_{11i} 为基本解中用 i 代替 k 给出的 S_{11} 和 T_{11} 算子, 用 \tilde{A} 表示 A 作出了以上改变后的相应算子.

将算子改写为 $\tilde{A} = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_c$, 其中

其中 I 是单位算子.

根据 WANG 和 LIU 在文献 [11] 研究中的定理 3.5, 用参数 $\omega \in [0, 1]$ 定义算子 $A_1(\omega)$,

$$A_1(\omega) = K'_{22} + i\lambda_1 \omega H'_{22} - \frac{1}{2}I,$$

显然, 对于任意的 $\omega \in [0, 1], A_1(\omega): H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$ 是有界的. 注意 $A_1(0)$ 是第二类指标的 Fredholm 算子, $A_1 = A_1(1)$. 将 $A_1(\omega)$ 分解为

$$A_1(\omega) = B(\omega) + C(\omega),$$

其中

$$B(\omega) = i\omega\lambda_1 H'_{220} - \frac{I}{2},$$

$$C(\omega) = K'_{22} + i\omega\lambda_1 (H'_{22} - H'_{220}).$$

$$\begin{aligned} \left\langle A_2 \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} \right\rangle &= \langle \tilde{S}_{11i}, \tilde{\alpha}, \tilde{\alpha} \rangle - \langle \tilde{K}_{110}, \tilde{\beta}, \tilde{\alpha} \rangle + i\lambda_2 \langle \tilde{H}_{110}, \tilde{\beta}, \tilde{\alpha} \rangle - \frac{1}{2} \langle \tilde{\beta}, \tilde{\alpha} \rangle + \langle \tilde{K}'_{110}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \rangle + \\ & i\lambda_2 \langle \tilde{H}'_{110}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \rangle + \frac{1}{2} \langle \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \rangle + (\lambda_2^2 - 1) \langle \tilde{T}_{11i}, \tilde{\beta}, \tilde{\beta} \rangle. \end{aligned} \tag{29}$$

算子 \tilde{S}_{11i} 和 $-\tilde{T}_{11i}$ 是正定的, 并且有下界^[22], 即

$$\begin{aligned} \langle \tilde{S}_{11i}, \phi, \phi \rangle &\geq c \|\phi\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}, \phi \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), -\langle \tilde{T}_{11i}, \phi, \phi \rangle \geq \\ &c \|\phi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}, \phi \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega), \end{aligned}$$

其中常数 $c > 0, \langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 和 $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 之间的对偶. 由于是实积分核, 算子 \tilde{K}'_{110} 和 \tilde{H}'_{110} 分别是 \tilde{K}_{110} 和 \tilde{H}_{110} 的伴随算子. 共轭关系导致

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [-\langle \tilde{K}_{110}, \tilde{\beta}, \tilde{\alpha} \rangle + \langle \tilde{K}'_{110}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \rangle + i\lambda_2 \langle \tilde{H}_{110}, \tilde{\beta}, \tilde{\alpha} \rangle + \\ i\lambda_2 \langle \tilde{H}'_{110}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \rangle - \frac{1}{2} \langle \tilde{\beta}, \tilde{\alpha} \rangle + \frac{1}{2} \langle \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \rangle] = 0, \end{aligned}$$

因此, 有

$$\operatorname{Re} \left\langle A_2 \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} \right\rangle \geq c \|\tilde{\alpha}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2 + c \|\tilde{\beta}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2,$$

这表明 A_2 是强制的.

差算子 $\tilde{K}'_{11} - \tilde{K}'_{110}, \tilde{K}_{11} - \tilde{K}_{110}, \tilde{H}'_{11} - \tilde{H}'_{110}, \tilde{H}_{11} - \tilde{H}_{110}, \tilde{S}_{11} - \tilde{S}_{11i}$ 和 $\tilde{T}_{11} - \tilde{T}_{11i}$ 是紧的, 因为它们的积分核具有相同的奇异性^[19], 紧嵌入表明 $\tilde{S}_{11}: H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 是紧的. 除此之外, \tilde{A}_c 中那些指标不同 ($i \neq j$) 的算子, 具有连续的积分核, 所以它们都是紧的. 因此, 算子 \tilde{A}_c 是紧的.

注意到 $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})^T$ 是 $(\alpha, \beta)^T \in \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ 的零延拓, 对于限制在 Γ_1 上的算子 $A_{2\Gamma_1}$, 有

令 $P := \frac{4}{4(\omega\lambda_1)^2 - 1} (i\omega\lambda_1 H'_{220} + \frac{I}{2})$, 然后根据 (28) 可以得到

$$PB(\omega) = B(\omega)P = \frac{-4}{4(\omega\lambda_1)^2 - 1} ((\omega\lambda_1 H'_{220})^2 + \frac{I}{4}) = I + \frac{4(\omega\lambda_1)^2}{1 - 4(\omega\lambda_1)^2} (K'_{220})^2.$$

这意味着 P 是 $B(\omega)$ 的双边正则化子, 因此根据 MCLEAN 在文献 [1] 中的引理 2.24 可得 $B(\omega)$ 是一个 Fredholm 算子. 由于 $C(\omega)$ 的紧性, $A_1(\omega)$ 也是 Fredholm 算子, 又因为 $A_1(\omega)$ 相对于 ω 是连续的, 于是有

$$\operatorname{Ind}(A_1(1)) = \operatorname{Ind}(A_1(0)) = 0,$$

这意味着 A_1 是一个零指标的 Fredholm 算子.

接着考虑 A_2 . 由于

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\langle A_{2\Gamma_1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right\rangle &= \operatorname{Re} \left\langle A_2 \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} \right\rangle \geq \\ &c \|\alpha\|_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}^2 + c \|\beta\|_{\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}^2, \end{aligned}$$

又 $\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \subset H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \times H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, 把 \tilde{A}_c 限制在 Γ_1 上, 则 $\tilde{A}_{c\Gamma_1}$ 的值域属于 $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, 因此 $\tilde{A}_{c\Gamma_1}$ 保持紧性. 再根据 A_1 的证明结果, 可得 A 是指标为零的 Fredholm 算子.

下证 A 是单射的. 令 $A(\alpha, \beta, \gamma)^T = 0$, 则由 (19) 定义的组合势满足具有齐次边界条件问题 (7), 根据定理 2.1 的唯一性结果, 得到在 $R^2 \setminus (\bar{D} \cup \bar{\Gamma}_1)$ 中 $u = 0$. 单、双层势的跳跃关系告诉我们

$$\beta = u_- \Big|_{\Gamma_1} - u_+ \Big|_{\Gamma_1} = 0,$$

$$\alpha = \frac{\partial u_-}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_1} - \frac{\partial u_+}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_1} = 0,$$

并且

$$u_+ \Big|_{\Gamma_2} = 0, \frac{\partial u_+}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_2} = 0.$$

现在令位势函数 (19) 定义在 D 内, 由于单层位势连续到边界, 在 Γ_2 上得到 $u_- = u_+ = 0$. 另一方面通过假设 k^2 不是 $-\Delta$ 在区域 D 的狄利克雷特征值^[11], 得到 D 中的 $u = 0$, 这意味着 Γ_2 上 $\frac{\partial u_-}{\partial \nu} = 0$, 利用单层势的跳跃关系, 得到

$$\gamma = \frac{\partial u_-}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_2} - \frac{\partial u_+}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_2} = 0.$$

因此 A 是单射的. 证毕.

定理 2.3 边值问题(7)有唯一的连续依赖于边界数据 $f \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$, $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, $h \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ 的解 $u \in H_{loc}^1(R^2 \setminus (\bar{D} \cup \bar{\Gamma}_1))$, 满足以下不等式

$$\|u\|_{H_{loc}^1(R^2 \setminus (\bar{D} \cup \bar{\Gamma}_1))} \leq c(\|f\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)} + \|g\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} + \|h\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}),$$

其中 c 是与 u 无关的常数.

证明: 解 u 以具有密度 $\alpha \in \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, $\beta \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, $\gamma \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$ 的组合势(19)的形式存在, 由定理 2.2, 得出 A^{-1} 存在且有界, 故密度 α, β, γ 可由 f, g, h 唯一确定. 因此, 问题(7)的唯一解由组合势(19)确定, 这些位势的性质表明上述不等式成立.

参 考 文 献

- [1] MCLEAN W C H. Strongly elliptic systems and boundary integral equations [M]. Cambridge; New York: Cambridge University Press, 2000.
- [2] KOLYBASOVA V, KRUTITSKII P. Helmholtz equation outside an open arc in a plane with a mixed boundary condition [J]. Pamm, 2007, 7(1): 2040089-2040090.
- [3] KRESS R. On the numerical solution of a hypersingular integral equation in scattering theory [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 1995, 61(3): 345-360.
- [4] MÖNCH L. On the inverse acoustic scattering problem by an open arc: The sound-hard case [J]. Inverse Problems, 1997, 13(5): 1379-1392.
- [5] KIRSCH A, RITTER S. A linear sampling method for inverse scattering from an open arc [J]. Inverse Problems, 2000, 16(1): 89-105.
- [6] AMMARI H, BAO G, WOOD A W. An integral equation method for the electromagnetic scattering from cavities [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2000, 23(12): 1057-1072.
- [7] CAKONI F, COLTON D. Qualitative methods in inverse scattering theory [M]. Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2005.
- [8] LEE K M. Inverse scattering problem for an impedance crack [J]. Wave Motion, 2008, 45(3): 254-263.
- [9] YAN G, YAO M. Mathematical basis of scattering problems from penetrable obstacles and cracks [J]. 2010, 51(12): 123520.
- [10] MARTIN P A. On the diffraction of Poincaré waves [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2001, 24(12): 913-925.
- [11] WANG H, LIU J. The two-dimensional direct and inverse scattering problems with generalized oblique derivative boundary condition [J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2015, 75(2): 313-334.
- [12] NAKAMURA G, WANG H. The direct electromagnetic scattering problem from an imperfectly conducting cylinder at oblique incidence [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2013, 397(1): 142-155.
- [13] WANG H, LIU J. An inverse scattering problem with generalized oblique derivative boundary condition [J]. Applied Numerical Mathematics, 2016, 108: 226-241.
- [14] WANG Y, GUO J, YAN G. The factorization method for the inverse obstacle scattering problem with oblique derivative boundary condition [J]. IMA Journal of Applied Mathematics, 2018, 83(2): 283-301.
- [15] BOUKARI Y, HADDAR H. The factorization method applied to cracks with impedance boundary conditions [J]. Inverse Problems & Imaging, 2013, 7(4): 1123-1138.
- [16] CAKONI F, COLTON D. The linear sampling method for cracks [J]. Inverse Problems, 2003, 19(2): 279-295.
- [17] COLTON D L, KRESS R. Integral equation methods in scattering theory [M]. Hoboken: Wiley & Sons, 1983.
- [18] GUO J, WU Q, YAN G. The factorization method for cracks in elastic scattering [J]. Inverse Problems & Imaging, 2018, 12(2): 349-371.
- [19] COLTON D, KRESS R. Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory [M]. Fourth edition. New York: Springer, 2013: 37 - 38.
- [20] NAKAMURA G, WANG H. Reconstruction of an impedance cylinder at oblique incidence from the far-field data [J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2015, 75(1): 252-274.
- [21] KRESS R. Linear integral equations [M]. Berlin; New York: Springer-Verlag, 1989.
- [22] KIRSCH A, GRINBERG N. The Factorization Method for Inverse Problems [M]. Oxford: Oxford University Press, 2007.

(责任编辑 & 校对 雷建云)