第 45 卷第 1 期 中南民族大学学报(自然科学版) Vol.45 No.1
2026年1月 Journal of South-Central Minzu University(Natural Science Edition) Jan. 2026

带调和振荡算子热方程的适定性研究

王涛,田媛媛,李浩光*

(中南民族大学 数学与统计学学院,武汉 430074)

摘 要 带调和振荡算子非线性热方程的适定性问题是当前的一个热门课题.在低正则Sobolev空间下,利用磨光算子估计、Hahn-Banach延拓定理、Riesz表示定理、压缩映射原理等方法,证明了带调和振荡算子的非线性热方程柯西问题解的全局存在唯一性.

关键词 调和振荡算子;热方程;低正则Sobolev空间;全局适定性

中图分类号 O175.29 **文献标志码** A **文章编号** 1672-4321(2026)01-0106-04

doi:10.20056/j.cnki.ZNMDZK.20250826

On the well-posedness of heat equation with Harmonic oscillators

WANG Tao, TIAN Yuanyuan, LI Haoguang*

(College of Mathematics and Statistics, South-Central Minzu University, Wuhan 430074, China)

Abstract The well-posedness problem of the nonlinear heat equation with Harmonic oscillators is a current hot topic. In the lower regularity Sobolev space, by means of methods such as the mollifier estimate, the Hahn-Banach extension theorem, the Riesz representation theorem, and the contraction mapping principle, the global existence and uniqueness of the solution of Cauchy problem of the nonlinear heat equation with Harmonic oscillators are proved.

Keywords Harmonic oscillators; heat equation; lower regularity Sobolev space; global well-posedness

1 基础知识及相关背景

本文主要研究带调和振荡算子热方程的柯西问题的全局适定性.考虑如下非线性热方程的柯西问题:

$$\begin{cases} \partial_t f + v\cdot\nabla_x f + \mathcal{H}f = f^2, \\ f(t,x,v)\big|_{t=0} = f_{in}(x,v), \end{cases} \tag{1}$$

其中$\mathcal{H} = -\Delta + |v|^2$,未知量$f = f(t,x,v)$表示在时间$t \geqslant 0$,位置变量$x \in \mathbb{R}$,速度变量$v \in \mathbb{R}$的气体粒子密度分布函数,$f_{in}(x,v)$为给定初始值.有许多研究工作涉及到热方程解的全局适定性[1-5],近期,文献[6]和[7]研究了在调制空间$M^{p,q}$, $0 < p, q \leqslant \infty$中,与分数阶Hermite算子相关的热方程,通过对分数阶Hermite算子的伪微分分析,作者证明了热方程解的适定性.Hermite算子$\mathcal{H} = -\Delta + |v|^2$在量子力学分析中起着至关重要的作用[8-9].本文主要探讨在低正则Sobolev空间$H^1(\mathbb{R}_x)Q^1(\mathbb{R}_v)$中热方程解的适定性问题,Sobolev空间$H^1(\mathbb{R})$的定义为:

$$H^1(\mathbb{R}): = \{u \in D'(\mathbb{R}), \|u\|_{H^1(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)|\hat{u}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}} < \infty\},$$

对于任何$k \in \mathbb{N}$,定义Shubin空间$Q^k(\mathbb{R})$为:

$$Q^k(\mathbb{R}): = \{u \in S'(\mathbb{R});\ \mathcal{H}^{\frac{k}{2}} u \in L^2(\mathbb{R})\}.$$

为了记号简便$H^1(\mathbb{R}_x)Q^1(\mathbb{R}_v) \triangleq H_x^1 Q_v^1$,同时还有:

$$L^\infty([0,T];\ H_x^1 Q_v^1) = L_T^\infty H_x^1 Q_v^1,$$
$$L^2([0,T];\ H_x^1 Q_v^2) = L_T^2 H_x^1 Q_v^2.$$

收稿日期 2025-02-26

* **通信作者** 李浩光(1987-),男,副教授,博士,研究方向:偏微分方程,E-mail: lihaoguang@scuec.edu.cn

基金项目 湖北省自然科学基金资助项目(2025AFB696)

2 主要定理及证明

定理1 对于$0<T<+\infty$,$f_{in}\in H_x^1Q_v^1$,柯西问题(1)有唯一的低正则解,其中:

$$f\in L_T^\infty H_x^1Q_v^1\cap L_T^2H_x^1Q_v^2,$$

且存在常数$C>0$,满足:

$$\|f\|_{L_T^\infty H_x^1Q_v^1}+\|f\|_{L_T^2H_x^1Q_v^2}\leqslant C\|f_{in}\|_{H_x^1Q_v^1}. \tag{2}$$

定理的证明将分为两部分展开.第一部分利用磨光算子、Hahn-Banach定理证明线性化的热方程在Sobolev空间$L_T^\infty H_x^1Q_v^1\cap L_T^2H_x^1Q_v^2$解的存在唯一性;第二部分利用压缩映射原理证明非线性热方程解的全局适定性.在证明定理1之前,先介绍以下引理1.

引理1 设$f,g\in Q^1(\mathbb{R})$,存在一个正常数C_0,使得:

$$\|fg\|_{Q^1(\mathbb{R})}\leqslant C_0\|f\|_{Q^1(\mathbb{R})}\|g\|_{Q^1(\mathbb{R})}. \tag{3}$$

证明 设:

$$a(x,\xi)=\left(|\xi|^2+|x|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$b(x,\xi)=\left((1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}+(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}.$$

即:

$$a(x,\xi)\in S_{1,0}^1,b(x,\xi)\in S_{1,0}^{-1}.$$

利用文献[10]第一章中的定理1.1.15,得到:

$$a\diamond b\in S_{1,0}^0.$$

由于$op(S_{1,0}^0)$在$L^2(\mathbb{R})$上有界,可以证得:

$$\|u\|_{Q^1(\mathbb{R})}=\|\mathcal{H}^{1/2}u\|_{L^2(\mathbb{R})}\leqslant$$

$$C_0\left\|\left((1-\Delta)^{1/2}+(1+|v|^2)^{1/2}\right)u\right\|_{L^2(\mathbb{R})}\leqslant$$

$$C_0\left(\|(1-\Delta)^{1/2}u\|_{L^2(\mathbb{R})}+\|(1+|v|^2)^{1/2}u\|_{L^2(\mathbb{R})}\right),$$

利用:

$$\overset{\wedge}{fg}=\hat{f}*\hat{g}=\int_{\mathbb{R}^3}\hat{f}(\xi-\eta)\hat{g}(\eta)\mathrm{d}\eta,$$

推得:

$$\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\leqslant\|\hat{g}\|_{L^1(\mathbb{R}_\xi)}\leqslant C_0\|(1-\Delta)^{1/2}g\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

根据Cauchy-Schwartz不等式,有:

$$\|\mathcal{H}^{1/2}(fg)\|_{L^2(\mathbb{R})}\lesssim\Big(\|(1-\Delta)^{1/2}(fg)\|_{L^2(\mathbb{R})}+$$

$$\|(1+|v|^2)^{1/2}(fg)\|_{L^2(\mathbb{R})}\Big)\lesssim\|(1+|\xi|)\hat{f}*\hat{g}\|_{L^2(\mathbb{R}_\xi)}+$$

$$\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|(1+|v|^2)f\|_{L^2(\mathbb{R})}\lesssim$$

$$\|(1-\Delta)^{1/2}f\|_{L^2(\mathbb{R})}\|(1-\Delta)^{1/2}g\|_{L^2(\mathbb{R})}+$$

$$\|(1-\Delta)^{1/2}f\|_{L^2(\mathbb{R})}\|(1-\Delta)^{1/2}g\|_{L^2(\mathbb{R})}+$$

$$\|(1-\Delta)^{1/2}g\|_{L^2(\mathbb{R})}\|(1+|v|^2)f\|_{L^2(\mathbb{R})}\lesssim\|f\|_{Q^1(\mathbb{R})}\|g\|_{Q^1(\mathbb{R})},$$

引理1证毕.

2.1 线性化热方程解的全局存在唯一性

命题1 考虑线性化热传导方程的柯西问题:

$$\begin{cases}\partial_t f+v\cdot\nabla_x f+\mathcal{H}f=gf,\\ f(t,x,v)\big|_{t=0}=f_{in}(x,v),\end{cases} \tag{4}$$

其中未知分布函数$f=f(t,x,v)$取决于时间$t\geqslant 0$,位置变量$x\in\mathbb{R}$,速度变量$v\in\mathbb{R}$.对于任意的$0<T<+\infty$,任意小的正数$\delta>0$,当初值$f_{in}\in H_x^1Q_v^1$,函数$g\in L_T^\infty H_x^1Q_v^1\cap L_T^2H_x^1Q_v^2$且满足:

$$\|g\|_{L_T^\infty H_x^1Q_v^1}+\|g\|_{L_T^2H_x^1Q_v^2}\leqslant\delta,$$

则柯西问题(4)存在唯一弱解$f_\varepsilon\in L^\infty([0,T];\ H_x^1Q_v^1)$.同时存在常数$C>0$,满足:

$$\|f_\varepsilon\|_{L_T^\infty H_x^1Q_v^1}+\|f_\varepsilon\|_{L_T^2H_x^1Q_v^2}\leqslant C\|f_{in}\|_{H_x^1Q_v^1}.$$

证明 利用磨光函数$0\leqslant\rho(x)\in S(\mathbb{R})$且$\int_{\mathbb{R}^2}\rho(x)\mathrm{d}x=1$.设$g_\varepsilon=g*\rho_\varepsilon(x)$,$f_{in}^\varepsilon=f_{in}*\rho_\varepsilon(x)$,其中$\rho_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-2}\rho(\frac{x}{\varepsilon})$.根据命题1中条件可得:

$$\|f_{in}^\varepsilon\|_{H_x^1Q_v^1}\leqslant\|f_{in}\|_{H_x^1Q_v^1}<\infty$$

且

$$\|g_\varepsilon\|_{L_T^\infty H_x^1Q_v^1}+\|g_\varepsilon\|_{L_T^2H_x^1Q_v^2}\leqslant\|g\|_{L_T^\infty H_x^1Q_v^1}+\|g\|_{L_T^2H_x^1Q_v^2}\leqslant\delta.$$

考虑自伴算子:

$$P^*=-\partial_t-v\cdot\nabla_x-\Delta_v+|v|^2,$$

对于函数$\psi\in C^\infty([0,T],S(\mathbb{R}_{x,v}^2))$,其中$\psi(T)=0$,可得:

$$\mathrm{Re}(\psi,P^*\psi)_{(1,0)}=-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\psi\|_{H_x^1Q_v^1}^2+\|\mathcal{H}^{1/2}\psi\|_{H_x^1Q_v^1}^2-$$
$$\mathrm{Re}(g_\varepsilon\psi,\psi)_{H_x^1Q_v^1}.$$

由引理1,可得:

$$\left|(g_\varepsilon\psi,\psi)_{H_x^1Q_v^1}\right|\leqslant C_0\|g_\varepsilon\|_{H_x^1Q_v^1}\|\psi\|_{H_x^1Q_v^1}^2,$$

利用Cauchy-Schwartz不等式,可以得到:

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\psi\|^2_{H^1_xQ^1_v}+2\|\psi\|^2_{H^1_xQ^2_v}-C_0\|g_\varepsilon\|_{H^1_xQ^1_v}\|\psi\|^2_{H^1_xQ^1_v}\leqslant 2\|\psi\|_{H^1_xQ^1_v}\|P^*\psi\|_{H^1_xQ^1_v},$$

考虑到$\delta>0$足够小,使得$C_0\|g_\varepsilon\|_{H^1_xQ^1_v}\leqslant C_0\|g\|_{H^1_xQ^1_v}<1$,则有:

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\psi\|^2_{H^1_xQ^1_v}+\|\psi\|^2_{H^1_xQ^2_v}\leqslant 2\|\psi\|_{H^1_xQ^1_v}\|P^*\psi\|_{H^1_xQ^1_v},$$

两边关于t在$[t,T]$上积分,有:

$$\|\psi(t)\|^2_{H^1_xQ^1_v}+\int_t^T\|\psi(\tau)\|^2_{H^1_xQ^2_v}\mathrm{d}\tau\leqslant C\|\psi\|_{L^\infty_TH^1_xQ^1_v}\|P^*\psi\|_{L^1_TH^1_xQ^1_v},$$

故

$$\|\psi(t)\|^2_{H^1_xQ^1_v}\leqslant C\int_t^T\|P^*\psi\|_{H^1_xQ^1_v}\mathrm{d}\tau,$$

从而有$\|\psi\|_{L^\infty_TH^1_xQ^1_v}\leqslant C\|P^*\psi\|_{L^1_TH^1_xQ^1_v}$.

下面考虑泛函子空间:

$$Q=\{\psi=Pu;\psi\in C^\infty([0,T],S(\mathbb{R}^2_{x,v})),\ \psi(T)=0\}\subset L^1([0,T];\ H^1_xQ^1_v),$$

因为$f_{in}\in H^1_xQ^1_v$,可以定义线性函数:

$$Q:\mathbb{Q}\to\mathbb{C},u=P^*\psi\mapsto(f_{in},\psi(0))_{H^1_xQ^1_v},$$

其中$\psi\in C^\infty([0,T],S(\mathbb{R}^2_{x,v}))$,$P^*$单射,因此:

$$\|Q(u)\|=\left|\left(f_0,\psi(0)\right)_{H^1_xQ^1_v}\right|\leqslant\|f_{in}\|_{H^1_xQ^1_v}\|\psi(0)\|_{H^1_xQ^1_v}\leqslant \|f_{in}\|_{H^1_xQ^1_v}\|\psi\|_{L^\infty([0,T];\ H^1_xQ^1_v)}\leqslant C\|f_{in}\|_{H^1_xQ^1_v}\|P^*f_\varepsilon\|_{L^1_TH^1_xQ^1_v}\leqslant C\|f_{in}\|_{H^1_xQ^1_v}\|u\|_{L^1_TH^1_xQ^1_v}.$$

利用Hahn-Banach定理,Q可以在$L^1([0,T];H^1_xQ^1_v)$推广为连续线性形式,且其范数小于$C\|f_{in}\|_{H^1_xQ^1_v}$.根据Riesz表示定理,存在唯一的$f_\varepsilon\in L^\infty([0,T];H^1_xQ^1_v)$满足:

$$\|f_\varepsilon\|_{L^\infty_TH^1_xQ^1_v}\leqslant C\|f_{in}\|_{H^1_xQ^1_v},$$

使得:

$$\forall\, u\in L^1_TH^1_xQ^1_v,\ \ Q(u)=\int_0^T(f_\varepsilon(t),u(t))_{H^1_xQ^1_v}\mathrm{d}t,$$

这表明对所有函数$\psi\in C_0^\infty((-\infty,T),S(\mathbb{R}^2_{x,v}))$,可得:

$$Q(P^*\psi)=\int_0^T(f_\varepsilon(t),u(t))_{H^1_xQ^1_v}\mathrm{d}t=\int_0^T(Pf_\varepsilon(t),\psi(t))_{H^1_xQ^1_v}\mathrm{d}t=(f_{in},\psi(0))_{H^1_xQ^1_v},$$

因此,$f_\varepsilon\in L^\infty_TH^1_xQ^1_v$是柯西问题的唯一弱解,且满足:

$$\|f_\varepsilon\|_{L^\infty_TH^1_xQ^1_v}\leqslant C\|f_{in}\|_{H^1_xQ^1_v},$$

代回到方程(4)可得:

$$\partial_tf_\varepsilon+v\cdot\nabla_xf_\varepsilon+\mathcal{H}f_\varepsilon=g_\varepsilon f_\varepsilon,$$

两边同时在$H^1_xQ^1_v$上和f_ε作内积得:

$$(\partial_tf_\varepsilon,f_\varepsilon)_{H^1_xQ^1_v}+(v\cdot\nabla_xf_\varepsilon,f_\varepsilon)_{H^1_xQ^1_v}+(\mathcal{H}f_\varepsilon,f_\varepsilon)_{H^1_xQ^1_v}=(g_\varepsilon f_\varepsilon,f_\varepsilon)_{H^1_xQ^1_v},$$

则:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|f_\varepsilon\|^2_{H^1_xQ^1_v}+\|f_\varepsilon\|^2_{H^1_xQ^2_v}\leqslant\left|(g_\varepsilon f_\varepsilon,f_\varepsilon)_{H^1_xQ^1_v}\right|\leqslant C_0\|g_\varepsilon\|_{H^1_xQ^1_v}\|f_\varepsilon\|^2_{H^1_xQ^1_v},$$

进一步:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|f_\varepsilon\|^2_{H^1_xQ^1_v}+(2-2C_0\varepsilon)\|f_\varepsilon\|^2_{H^1_xQ^2_v}\leqslant 0,$$

对于任何$0<\varepsilon<1$,可以推得:

$$\|f_\varepsilon\|^2_{H^1_xQ^1_v}+\|f_\varepsilon\|^2_{L^2_TH^1_xQ^2_v}\leqslant\|f_{in}(x,v)\|^2_{H^1_xQ^1_v}.$$

命题1证毕.

2.2 非线性热方程解的全局存在唯一性

在命题1的基础上,利用迭代方法证明柯西问题(4)中的弱解f_ε在$L^\infty_TH^1_xQ^1_v\cap L^2_TH^1_xQ^2_v$上收敛于$f$,使得$f\in L^\infty_TH^1_xQ^1_v\cap L^2_TH^1_xQ^2_v$就是非线性热方程柯西问题(1)的低正则弱解.

下面证明定理1.

证明 利用迭代的方法定义$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$,其中f_n是以下柯西问题的弱解,即:

$$\begin{cases}\partial_tf_n+v\cdot\nabla_xf_n+\mathcal{H}f_n=f_{n-1}f_n,\\ f_n(0,x,v)=f_{in}(x,v).\end{cases}\tag{5}$$

起始密度分布函数$f_0(t,x,v)$满足:

$$\begin{cases}\partial_tf_0+v\cdot\nabla_xf_0+\mathcal{H}f_0=0,\\ f_0(0,x,v)=f_{in}(x,v).\end{cases}$$

对方程组(5)中的f_n和f_{n-1}做差,令$\omega_n=f_n-f_{n-1}$,可以得到:

$$\begin{cases}\partial_t\omega_n+v\cdot\nabla_x\omega_n+\mathcal{H}\omega_n=f_{n-1}f_n-f_{n-2}f_{n-1},\\ \omega_n(0,x,v)=0.\end{cases}$$

在$H^1_xQ^1_v$上,用ω_n做内积有:

$$\partial_t\|\omega_n\|^2_{H^1_xQ^1_v}+\|\omega_n\|^2_{H^1_xQ^1_v}\leqslant\|f_{n-1}\|_{H^1_xQ^1_v}\left(\|\omega_n\|_{H^1_xQ^1_v}+\|\omega_{n-1}\|_{H^1_xQ^1_v}\right),$$

则:

$$\|\omega_n\|^2_{H^1_xQ^1_v}+\|\omega_n\|^2_{L^2_TH^1_xQ^1_v}\leqslant C\|f_{n-1}\|_{L^\infty_TH^1_xQ^1_v}\left(\|\omega_n\|_{L^2_TH^1_xQ^1_v}+\|\omega_{n-1}\|_{L^2_TH^1_xQ^1_v}\right)\leqslant 2C_0\|f_{in}(x,v)\|^2_{H^1_xQ^1_v}\|\omega_n\|_{L^2_TH^1_xQ^1_v},$$

可以得到:

$$\|\omega_n\|^2_{H^1_xQ^1_v}+\|\omega_n\|^2_{L^2_TH^1_xQ^1_v}\leqslant 8C_0^2\|\omega_{n-1}\|^2_{L^2_TH^1_xQ^1_v}\|f_{in}(x,v)\|^2_{H^1_xQ^1_v}.$$

记$\lambda=C_0\|f_{in}(x,v)\|<1$,即:

$$\|\omega_n\|^2_{L^\infty_TH^1_xQ^1_v}+\|\omega_n\|^2_{L^2_TH^1_xQ^1_v}\leqslant\lambda\|\omega_{n-1}\|_{L^2_TH^1_xQ^1_v},$$

函数列$\{f_n\}$是泛函空间$L_T^\infty H_x^1 Q_v^1 \cap L_T^2 H_x^1 Q_v^2$上的一个柯西列,$L_T^\infty H_x^1 Q_v^1 \cap L_T^2 H_x^1 Q_v^2$是一个完备空间,根据压缩映射原理,故存在$f \in L_T^\infty H_x^1 Q_v^1 \cap L_T^2 H_x^1 Q_v^2$,使得:

$$f_n \to f \in L_T^\infty H_x^1 Q_v^1 \cap L_T^2 H_x^1 Q_v^2,$$

且满足:

$$\| f \|_{L_T^\infty H_x^1 Q_v^1} + \| f \|_{L_T^2 H_x^1 Q_v^2} \leqslant C \| f_{in} \|_{H_x^1 Q_v^1}.$$

下面开始证明唯一性.

假设$\tilde{f}$是柯西问题的另一个弱解且满足:

$$\| \tilde{f} \|_{L^\infty H_x^1 Q_v^2} + \| \tilde{f} \|_{L^2 H_x^1 Q_v^2} \leqslant C \| f_{in} \|_{H_x^1 Q_v^1},$$

设$h = f - \tilde{f}$,则h满足方程:

$$\begin{cases} \partial_t h + v \cdot \nabla_x h + Hh\mathcal{H} = f^2 - \tilde{f}^2, \\ h(0, x, v) = 0, \end{cases}$$

作估计得:

$$(\partial_t h, h)_{H_x^1 Q_v^1} + (v \cdot \nabla_x h, h)_{H_x^1 Q_v^1} + (\mathcal{H} h, h)_{H_x^1 Q_v^1} = ((f + \tilde{f}) h, h)_{H_x^1 Q_v^1},$$

则:

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| h \|_{H_x^1 Q_v^1} + \| h \|_{H_x^1 Q_v^2} \leqslant C_0 \| f + \tilde{f} \|_{H_x^1 Q_v^1} \| h \|_{H_x^1 Q_v^2}^2 \leqslant$$
$$2 C_0 C \| f_{in} \|_{H_x^1 Q_v^1} \| h \|_{H_x^1 Q_v^2}^2,$$

令$\varepsilon_0 > 0$足够小,使得$2C_0 C \| f_{in} \|_{H_x^1 Q_v^1} \leqslant 2 C_0 C \varepsilon_0 < 1$,则有:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| h \|_{H_x^1 Q_v^1} \leqslant 0,$$

即:

$$\| h \|_{L H_x^1 Q_v^1} \leqslant \| h(0, x, v) \|_{H_x^1 Q_v^1} = 0,$$

从而$h = 0$,即$f = \tilde{f}$,柯西问题弱解唯一.定理 1 得证.

参　考　文　献

[1] CORDERO E, NICOLA F, RODINO L. Gabor representations of evolution operators[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 2015, 367(11): 7639-7663.

[2] DUAN R J, YU H J. The Vlasov-Poisson-landau system near a local Maxwellian[J]. Advances in Mathematics, 2020, 362: 106956.

[3] NICOLA F. Phase space analysis of semilinear parabolic equations [J]. Journal of Functional Analysis, 2014, 267(3): 727-743.

[4] WONG M W. Weyl transforms, the heat kernel and green function of a degenerate elliptic operator[J]. Annals of Global Analysis and Geometry, 2005, 28(3): 271-283.

[5] 李浩光, 刘静. 线性 Fokker-Planck 方程柯西问题解的适定性[J]. 中南民族大学学报(自然科学版), 2019, 38(4): 631-633.

[6] CORDERO E. On the local well-posedness of the nonlinear heat equation associated to the fractional Hermite operator in modulation spaces[J]. Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications, 2021, 12(1): 13.

[7] BÉNYI Á, OKOUDJOU K A. Local well-posedness of nonlinear dispersive equations on modulation spaces[J]. Bulletin of the London Mathematical Society, 2009, 41(3): 549-558.

[8] FOLLAND G B. Harmonic analysis in phase space.[M]. Princeton: Princeton University Press, 1989.

[9] THANGAVELU S. Lectures on Hermite and Laguerre expansions. Volume 42[M]. Princeton: Princeton University Press, 1993.

[10] LERNER N. Metrics on the phase space and non-selfadjoint Pseudo-Differential Operators [M]. Basel: Birkhäuser Basel, 2010.

(责编　曹东,校对　雷建云)