

相依风险模型下时间一致的最优再保险-投资策略

黄鸿君^a, 覃利华^{b*}

(广西民族师范学院 a. 教育科学学院; b. 数学与计算机科学学院, 广西 崇左 532200)

摘要 研究了 Poisson-Geometric 风险模型索赔相依的时间一致最优再保险-投资策略问题. 模型中假设保险公司购买两种比例的再保险, 依据期望-方差原理计算再保费率, 且风险投资价格随市场通货膨胀波动. 在均值-方差准则下, 利用随机控制原理及动态规划建立对应的 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程, 求得了时间一致的最优再保险-投资策略和值函数的解析解. 最后借助数值实验, 结合其经济意义讨论了模型主要参数对最优再保险-投资策略的影响. 结果表明最优再保险策略随期望索赔次数、索赔次数偏离程度的增大而减小, 两类具有相依性的理赔业务中, 再保险策略随着索赔次数、索赔次数偏离程度的增加采取相反策略; 最优投资策略随通货膨胀率、无风险资产收益率、风险资产波动率的增大而减小.

关键词 相依风险; 期望-方差保费原则; 再保险-投资; 时间一致

中图分类号 O211.6 文献标志码 A 文章编号 1672-4321(2026)03-0412-10

doi: 10.20056/j.cnki.ZNMDZK.20250859

Optimal reinsurance with consistent time under the dependency risk model-investment strategy

HUANG Hongjun^a, QIN Lihua^{b*}

(Guangxi Minzu Normal University, a. School of Education Science; b. School of Mathematics and Computer Science, Chongzuo 532200, Guangxi China)

Abstract The problem of the time-consistent optimal reinsurance-investment strategy with dependent claims in the Poisson-Geometric risk model was studied. In the model, it is assumed that the insurance company purchases two types of proportional reinsurance, the reinsurance premium is calculated based on the expected-variance principle, and the price of risky investments fluctuates with market inflation. Under the mean-variance criterion, the corresponding Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equation was established by using the stochastic control theory and dynamic programming, and the analytical solutions to the time-consistent optimal reinsurance-investment strategy and the value function were derived. Finally, with the help of numerical experiments and combined with its economic significance, the impact of the main parameters of the model on the optimal reinsurance-investment strategy was discussed. The results show that the optimal reinsurance strategy decreases with the increase in the expected number of claims and the degree of deviation in the number of claims; in the two types of claim settlement businesses with dependence, the reinsurance strategies adopt opposite strategies as the number of claims and the degree of deviation in the number of claims increase; the optimal investment strategy decreases with the increase in the inflation rate, the return rate of risk-free assets, and the volatility of risky assets.

Keywords relevant risks; expectations-variance premium principle; reinsurance-investment; time consistency

近几年,再保险和投资依旧还是保险精算研究的热点问题.例如,LIANG等^[1]基于均值-方差原则

收稿日期 2025-09-06

* 通信作者 覃利华(1987-),女,副教授,研究方向:保险精算,E-mail:631898027@qq.com

基金项目 广西高校中青年骨干教师科研基础能力提升资助项目(2025KY0934);广西民族师范学院科研经费资助项目(2024YB128);广西民族师范学院科研经费资助项目(2022YB019)

下研究保险公司破产概率最小化和最优再保险策略问题;CHEN与YANG^[2]、WANG等^[3]均以终端财富期望效用最大化为目标,运用随机控制理论研究最优再保险和投资策略问题;ZENG和LI^[4]、LI等^[5]和YI等^[6]基于均值-方差准则下,研究时间一致最优再保险和投资策略问题,得到了最优再保险和投资策略及最优值函数的表达式.季鲲鹏和彭幸春^[7]、杨鹏^[8]以期望效用最大化准则为目标,研究最优再保险和投资策略选择问题.

以上的文献都只研究单一的索赔风险,亦或是独立的多险种,然而每个险种之间通常是存在相依性,如交通事故的发生有可能导致财产索赔、医疗索赔、死亡索赔的发生等,因此研究索赔相依的风险模型具有十分重要意义.如杨鹏^[9]研究索赔相依的最优再保险和投资问题;YUEN^[10]等在期望指数效用最大化准则下,研究索赔相依风险模型最优再保险策略问题,得出最优策略与值函数的表达式.GUAN和LIANG^[11]研究多重相依风险模型的最优再保险投资策略问题,通过引入辅助鲁棒最优控制问题和随机动态规划方法,推导出最优策略和值函数的表达式.慕蕊^[12]研究具有相依风险业务的最优投资和再保险问题,在财富终端期望指数效用最大化的准则下,应用随机控制理论,得到了最优再保险和投资策略及相应的值函数.ZHANG和WU^[13]研究具有延迟相依风险的最优再保险和投资策略问题.

虽然已经有很多学者对最优再保险和投资进行了深入研究,但都是假设索赔计数过程是服从期望等于方差的复合Poisson过程.然而在实际保险业务中保险公司通常会制定一些免赔制度或者无赔款折扣等营销制度,此时方差就会大于期望,称该现象为散度偏差.而复合Poisson-Geometric过程描述的就是方差大于期望,刚好弥补复合Poisson过程的不足,毛泽春和刘锦萼^[14]证明了索赔次数用复合Poisson-Geometric分布比复合Poisson分布更能体现保险市场环境.黄鸿君和覃利华^[15-16]研究了带混合保费和投资复合Poisson-Geometric风险模型的生存概率.林祥和李娜^[17]研究复合Poisson-Geometric风险模型的最优比例再保险和投资策略问题,利用随机最优控制原理得到最优再保险-投资和破产概率的显式解.杨鹏等^[18-19]基于均值-方差准则下分别考虑超额损失再保险和比例再保险风险资产带有跳的复合Poisson-Geometric风险模型的最优再保险和投资策略问题,应用随机控制的理论求得了相应HJB方程的解及最优的再保险和投资策略的显示

解.孙宗岐^[20-21]研究复合Poisson-Geometric风险模型的最优投资、再保和混合分红和阈值分红问题,利用动态规划原理求得最优函数的解析解.本文在已有文献的基础上将前人论文中的复合Poisson过程推广到复合Poisson-Geometric过程,进一步研究保险公司的最优再保险和投资的策略选择问题.复合Poisson-Geometric过程的许多数学表达式比复合Poisson过程都要具有代表性,替换后是否能得到比较好的性质与结果,这是本文将面临的困难与挑战,也是区别于已有文献结论至关重要的一点.

1 模型建立

为了引入复合Poisson-Geometric风险模型,根据文献[14]下面给出复合Poisson-Geometric分布和复合Poisson-Geometric过程的相关定义.

定义1 若一个随机变量 s 的母函数为

$$G(t) = \exp\left\{\frac{\lambda'(t-1)}{1-\rho't}\right\}$$

则称 s 为服从参数为 λ 和 ρ' 的复合Poisson-Geometric分布,记为 $PG(\lambda', \rho')$,其中 $\lambda' > 0, 0 \leq \rho' < 1$.

定义2 若计数过程 $\{N'(t), t \geq 0\}$ 满足

- 1) $N'(0) = 0$;
- 2) $\{N'(t), t \geq 0\}$ 具有独立平稳增量;
- 3) 对 $t > 0$,有 $N'(t) \sim PG(\lambda't, \rho')$,且

$$E[N'(t)] = \frac{\lambda't}{1-\rho'}, \text{Var}[N'(t)] = \frac{\lambda't(1+\rho')}{(1-\rho')^2}$$

$\{N'(t), t \geq 0\}$ 为参数为 λ', ρ' 的复合Poisson-Geometric过程.如果

注1 在定义2中,当 $\rho' = 0$ 时,复合Poisson-Geometric过程就退化为Poisson过程,因此复合Poisson-Geometric过程是Poisson过程的推广,这里的 ρ' 为偏离系数.

注2 当 $\rho' = 0$ 时,由定义2的3)可知 $E[N'(t)] = \text{Var}[N'(t)] = \lambda't$,说明发生事故次数与理赔次数一样,即每次发生事故保险公司都要进行理赔.当 $\rho' \neq 0$ 时 $E[N'(t)] \neq \text{Var}[N'(t)]$,说明保险公司附加签订了理赔条件,发生事故时不一定要进行理赔,此时理赔计数不能用Poisson过程.

假设所用到的随机变量和随机过程均定义在完备、赋流的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}, P)$ 上, $T > 0$ 表示再保险和投资的终止时刻, \mathcal{F}_t 表示在 $(0, t]$ 内保险公司获取的全部信息.假设保险公司在投资过

程中资产是充足又可分的,且不考虑任何的交易和税收所产生的费用.

基于以上相关的定义,本文考虑通货膨胀对金融市场的影响,建立索赔相依的 Poisson-Geometric 风险模型.设 X_t 为时刻 t 保险公司的财富,满足的微分方程为

$$dX_t = cdt + \beta dW_0(t) - d \sum_{i=1}^{N(t)+N_1(t)} X_i - d \sum_{i=1}^{N(t)+N_2(t)} Y_i. \quad (1)$$

其中, $\sum_{i=1}^{N(t)+N_1(t)} X_i$ 表示第一类索赔到时刻 t 为止的总索赔额, X_i 表示第一类索赔第 i 次理赔额,分布函数为 $F_X(x)$, 密度函数为 $f_X(x)$, 记 $E[X] = \mu_{11}, E[X^2] = \mu_{12}$;

$\sum_{i=1}^{N(t)+N_2(t)} Y_i$ 表示第二类索赔到时刻 t 为止的总索赔额, Y_i 表示第二类索赔第 i 次理赔额,分布函数为 $F_Y(y)$, 密度函数为 $f_Y(y)$, 记 $E[Y] = \mu_{21}, E[Y^2] = \mu_{22}$; 计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 体现了两类索赔业务的相依性, $\{N(t), t \geq 0\}, \{N_1(t), t \geq 0\}$ 和 $\{N_2(t), t \geq 0\}$ 分别服从参数为 $\lambda > 0, 0 \leq \rho < 1, \lambda_1 > 0, 0 \leq \rho_1 < 1$ 和 $\lambda_2 > 0, 0 \leq \rho_2 < 1$ 相依的复合 Poisson-Geometric 过程, 本文假设保费率按照期望值原理计算, 即 $c = (1 + \theta) \left[\left(\frac{\lambda}{1-\rho} + \frac{\lambda_1}{1-\rho_1} \right) \mu_{11} + \left(\frac{\lambda}{1-\rho} + \frac{\lambda_2}{1-\rho_2} \right) \mu_{21} \right]$, $\theta > 0$ 为安全负载荷; $\beta \geq 0$ 为常数, 表示扩散变差参数, 即盈余的波动率, $\{W_0(t), t \geq 0\}$ 为一维标准布朗运动, 表示不确定的收入或亏损; 类似文献[12]将索赔过程可近似为如下扩散过程

$$d \sum_{i=1}^{N(t)+N_1(t)} X_i = \alpha_1 dt - \beta_1 dW_1(t), d \sum_{i=1}^{N(t)+N_2(t)} Y_i = \alpha_2 dt - \beta_2 dW_2(t), \quad (2)$$

其中,

$$\alpha_1 = \left(\frac{\lambda}{1-\rho} + \frac{\lambda_1}{1-\rho_1} \right) \mu_{11}, \alpha_2 = \left(\frac{\lambda}{1-\rho} + \frac{\lambda_2}{1-\rho_2} \right) \mu_{21},$$

$$\beta_1 = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{1-\rho} + \frac{\lambda_1}{1-\rho_1} \right) \mu_{12}}, \beta_2 = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{1-\rho} + \frac{\lambda_2}{1-\rho_2} \right) \mu_{22}},$$

$\{W_1(t), t \geq 0\}$ 和 $\{W_2(t), t \geq 0\}$ 均为一维标准布朗运动, 其相关系数为 $\rho_{12} = \frac{\lambda \mu_{11} \mu_{21}}{\beta_1 \beta_2} \in (-1, 1)$.

为了减少承担风险, 保险公司购买了比例再保险来分散风险, 设 $q_1(t) \in [0, 1], q_2(t) \in [0, 1]$ 分别为第一类保险和第二类保险再保险后的自留水平, 当 $q_1(t) > 1, q_2(t) > 1$ 时说明保险公司从其他保险公司获得新的业务. 受文献[12]的启发, 本文的再保费率是按照期望-方差原理计算, 再保费率为

$$\delta(q_1(t), q_2(t)) = (1 + \nu) [(1 - q_1(t))\alpha_1 + (1 - q_2(t))\alpha_2 + \tau\phi(q_1(t), q_2(t))], \quad (3)$$

其中,

$$\phi(q_1(t), q_2(t)) = (1 - q_1(t))^2 \beta_1^2 + (1 - q_2(t))^2 \beta_2^2 + 2 \frac{\lambda}{1-\rho} \mu_{11} \mu_{21} (1 - q_1(t))(1 - q_2(t)).$$

ν 和 τ 为再保险公司的安全载荷, 满足 $\theta < \nu$, 保险公司与再保险公司都要保证能正常运营, 需要满足

$$0 \leq q_i(t) \leq \frac{\theta}{\nu} < 1, i = 1, 2.$$

注3 当 $\nu > 0, \tau = 0$ 时, 再保费率计算原则退化变成期望值保费原则.

注4 当 $\nu = 0, \tau > 0$ 时, 再保费率计算原则退化变成方差保费原则.

假设保险公司投资一个无风险资产(如: 银行存款等)和一个风险资产(如: 股票基金等). 无风险资产投资价格 $B(t)$ 满足的随机微分方程为 $dB(t) = rB(t)dt, r > 0$ 为常数, 表示无风险平均利率. 风险资产价格 $P(t)$ 满足微分方程为 $dP(t) = P(t) [\mu dt + \sigma dW_3(t)]$, 其中 $\mu, \sigma > 0$ 为常数, μ 表示风险资产的平均收益率, σ 表示风险资产的波动率, $\{W_3(t), t \geq 0\}$ 为一维标准布朗运动. 不失一般性设 $\mu > r$.

因为投资很容易受到通货膨胀的影响, 所以本文考虑了通货膨胀风险, 且通货膨胀风险价格 $L(t)$ 满足的随机微分方程为 $L(t) = L(t) [\varepsilon dt + \eta dW_4(t)]$, 其中 ε 表示通货膨胀风险的预期增长率, η 表示通货膨胀风险的预期波动率, $\{W_4(t), t \geq 0\}$ 为一维标准布朗运动, $\{W_3(t), t \geq 0\}$ 与 $\{W_4(t), t \geq 0\}$ 的相关系数为 ρ_0 . 类似于文献[8], 本文采用通货膨胀对风险资产价格进行折算, 折算后的价格作为新的风险资产投资金额, 记为 $P_1(t) = \frac{P(t)}{L(t)}$, $P_1(t)$ 满足如下随机微分方程

$$dP_1(t) = P_1(t) [(\mu + \eta^2 - \varepsilon - \rho_0 \sigma \eta) dt + \sigma dW_3(t) - \eta dW_4(t)]. \quad (4)$$

设时刻 t 在风险资产上投资的金额为 $\pi(t)$, 在无风险资产上投资的金额为 $X_t^u - \pi(t)$. 记 $u(t) = (q_1(t), q_2(t), \pi(t))$ 为在时刻 t 的再保险和投资策略. 保险公司在进行再保险和投资后, 其财富过程 X_t^u 满足的随机微分方程为

$$dX_t^u = dX_t^{q_1, q_2} + \pi(t) \frac{dP_1(t)}{P_1(t)} + [X_t^u - \pi(t)] \frac{dB(t)}{B(t)} = [rX_t^u + c - \delta(q_1(t), q_2(t)) - \alpha_1 q_1(t) - \alpha_2 q_2(t) + (m - r)\pi(t)] dt + \beta dW_0(t) + \beta_1 q_1(t) W_1(t) + \beta_2 q_2(t) W_2(t) + \pi(t) [\sigma dW_3(t) - \eta dW_4(t)], \quad (5)$$

其中 $m = \mu + \eta^2 - \varepsilon - \rho_0 \sigma \eta$.

2 问题的提出

类似文献[24],在均值-方差的原则下,我们建立目标函数为

$$V(t, x) = \sup_{u \in U} V(t, x, u) = \sup_{u \in U} \left\{ E_{t,x}[X_t^u] - \frac{\gamma}{2} \text{Var}[X_t^u] \right\}, \quad (6)$$

其中 $E_{t,x}[X_t^u]$ 量化投资收益, $\text{Var}[X_t^u]$ 量化投资风险, $\gamma > 0$ 为常数表示保险人的风险厌恶系数, $V(t, x)$ 为最优值函数. 因为问题(6)中的方差含有条件方差, 不满足时间一致的条件, 所以问题(6)所研究的时间是不一致的, 具体证明过程可参看文献[22]. 在实际生活中, 偏好可能会随时间的改变而改变, 但公司的策略不会随意的改变, 即在某一时刻 $s (s < t)$ 的最优策略 $u(t)$, 在未来某一时刻 t 的最优策略还是 $u(t)$, 所以本文可认为时间是一致的, 文献[23]已给出证明, 在这里不再进行证明.

定义 3 对 $\forall t \in [0, T]$, 若再保险-投资策略 $u(t) = (q_1(t), q_2(t), \pi(t))$ 满足以下的条件:

(1) $q_1(t), q_2(t)$ 和 $\pi(t)$ 关于流 \mathcal{F}_t 是循环可测的, 且是右连续的、左极限存在;

(2) $\int_0^T [q_1(t)]^2 dt < +\infty, \int_0^T [q_2(t)]^2 dt < +\infty, \int_0^T [\pi(t)]^2 dt < +\infty$

(3) 随机微分方程(5)对于 $u(t)$ 存在唯一强解.

则称 $u(t) = (q_1(t), q_2(t), \pi(t))$ 称为可行策略, 所有可行策略构成的集合记为 U .

定义 4 对于 $\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$ 和可行策略 $u^*(t)$, 选取实数 $\tilde{a} > 0, \tilde{b} \in \mathbb{R}$ 和 $s > 0$, 定义下面的策略:

$$u^s(v) = \begin{cases} (\tilde{a}, \tilde{b}), & (v, \tilde{x}) \in [t, t + s] \times \mathbb{R} \\ u^*(v), & (v, \tilde{x}) \in [t + s, T] \times \mathbb{R} \end{cases}$$

若对于 $\forall \tilde{a} > 0$ 和 $\tilde{b} \in \mathbb{R}$ 都有

$$\liminf_{s \rightarrow 0} \frac{V(t, x, u^s) - V(t, x, u^*)}{s} \geq 0,$$

则称 $u^*(t)$ 为平衡策略, 平衡值函数为 $V(t, x) = V(t, x, u^*)$.

设任意 $\varphi(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$, φ_t 是关于 t 的一阶可微, φ_x, φ_{xx} 分别关于 x 的一阶可微与二阶可微, 定义

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi(q_1(t), q_2(t))}{\partial q_1(t)} = & - \left[2\tau \beta_1^2 (1 + v) A(t) + \left(\frac{\lambda_1}{1 - \rho_1} + \frac{\lambda}{1 - \rho} \right) \gamma m^2(t) \mu_{12} \right] q_1(t) - \frac{\lambda}{1 - \rho} \mu_{11} \mu_{21} [2\tau(1 + v) A(t) + \\ & \gamma m^2(t)] q_2(t) + 2\tau(1 + v) A(t) \left[\beta_1^2 + \frac{\lambda}{1 - \rho} \mu_{11} \mu_{21} \right] + v \left(\frac{\lambda_1}{1 - \rho_1} + \frac{\lambda}{1 - \rho} \right) \mu_{11} A(t) \end{aligned} \quad (10)$$

如下的微分算子

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \varphi(t, x) = & \varphi_t + \left[c + rx + (m - r) \pi(t) - \delta(q_1(t), \right. \\ & \left. q_2(t)) \right] \varphi_x + \frac{1}{2} \left[(\sigma^2 + \eta^2 - 2\rho_0 \sigma \eta) \pi^2(t) + \beta^2 \right] \varphi_{xx} + \\ & \frac{\lambda_1}{1 - \rho_1} E \left[\varphi(t, x - q_1(t) X) - \varphi(t, x) \right] + \frac{\lambda_2}{1 - \rho_2} \\ & E \left[\varphi(t, x - q_2(t) Y) - \varphi(t, x) \right] + \frac{\lambda}{1 - \rho} \\ & E \left[\varphi(t, x - q_1(t) X - q_2(t) Y) - \varphi(t, x) \right]. \end{aligned}$$

为了求解最优随机问题, 类似文献[24]定理 4.1 的证明方法可得出下面的验证定理.

定理 1 验证定理 设 $F(t, x), G(t, x), H(t, x)$ 定义在 $[0, T] \times \mathbb{R}$ 上, 它们关于 t 连续可微, 关于 x 二阶连续可微. 如果 F, G, H 满足如下的方程

$$\sup_{u \in U} \{ \mathcal{A} F(t, x) - 0.5\gamma \mathcal{A} G^2(t, x) + \gamma G(t, x) \mathcal{A} G(t, x) \} = 0, F(T, x) = x, \quad (7)$$

$$\mathcal{A}^u G(t, x) = 0, G(T, x) = x, \quad (8)$$

$$\mathcal{A}^u H(t, x) = 0, H(T, x) = x^2,$$

$$u^*(t) = \arg \sup_{u \in U} \{ \mathcal{A}^u F(t, x) - 0.5\gamma \mathcal{A}^u G^2(t, x) + \gamma G(t, x) \mathcal{A}^u G(t, x) \},$$

则 $V(t, x) = F(t, x), G(t, x) = E_{t,x}[X(T, u^*)], H(t, x) = E_{t,x}[X^2(T, u^*)],$

$u^*(t)$ 是时间一致的最优再保险和投资策略.

3 问题的求解

为了更好的证明定理 2, 先给出下面的引理 1.

引理 1 设 $\xi(q_1(t), q_2(t))$ 满足下式

$$\begin{aligned} \xi(q_1(t), q_2(t)) = & -\delta(q_1(t), q_2(t)) A(t) - \\ & \frac{\lambda_1}{1 - \rho_1} \left[q_1(t) A(t) \mu_{11} + \frac{1}{2} \gamma q_1^2(t) m^2(t) \mu_{12} \right] - \\ & \frac{\lambda_2}{1 - \rho_2} \left[q_2(t) A(t) \mu_{21} + \frac{1}{2} \gamma q_2^2(t) m^2(t) \mu_{22} \right] - \\ & \frac{\lambda}{1 - \rho} A(t) [q_1(t) \mu_{11} + q_2(t) \mu_{21}] - \frac{1}{2} \frac{\lambda}{1 - \rho} \\ & \gamma m^2(t) [q_1^2(t) \mu_{12} + q_2^2(t) \mu_{22} + 2q_1(t) q_2(t) \mu_{11} \mu_{21}], \quad (9) \end{aligned}$$

$(\hat{q}_1(t), \hat{q}_2(t))$ 为 $\xi(q_1(t), q_2(t))$ 的最大值点.

证明: 对 $\xi(q_1(t), q_2(t))$ 关于 $q_1(t), q_2(t)$ 求偏导可得

$$\frac{\partial \xi(q_1(t), q_2(t))}{\partial q_2(t)} = -\frac{\lambda}{1-\rho} \mu_{11} \mu_{21} [2\tau(1+\nu)A(t) + \gamma m^2(t)] q_1(t) - \left[2\tau\beta_2^2(1+\nu)A(t) + \left(\frac{\lambda_2}{1-\rho_2} + \frac{\lambda}{1-\rho} \right) \gamma m^2(t) \mu_{22} \right] q_2(t) + 2\tau(1+\nu)A(t) \left[\beta_2^2 + \frac{\lambda}{1-\rho} \mu_{11} \mu_{21} \right] + \nu \left(\frac{\lambda_2}{1-\rho_2} + \frac{\lambda}{1-\rho} \right) \mu_{21} A(t), \quad (11)$$

$$A = \frac{\partial^2 \xi(q_1(t), q_2(t))}{\partial q_1^2(t)} = -2\tau\beta_1^2(1+\nu)A(t) - \left(\frac{\lambda_1}{1-\rho_1} + \frac{\lambda}{1-\rho} \right) \gamma m^2(t) \mu_{12},$$

$$B = \frac{\partial^2 \xi(q_1(t), q_2(t))}{\partial q_1(t) \partial q_2(t)} = -\frac{\lambda}{1-\rho} \mu_{11} \mu_{21} [2(1+\nu)A(t)\tau + \gamma m^2(t)],$$

$$C = \frac{\partial^2 \xi(q_1(t), q_2(t))}{\partial q_2^2(t)} = -2\tau\beta_2^2(1+\nu)A(t) - \left(\frac{\lambda_2}{1-\rho_2} + \frac{\lambda}{1-\rho} \right) \gamma m^2(t) \mu_{22}.$$

所以 $AC - B^2 = 4\tau^2(1+\nu)^2 A^2(t) \left[\beta_1^2 \beta_2^2 - \frac{\lambda^2}{(1-\rho)^2} \mu_{11}^2 \mu_{21}^2 \right] + 2\tau(1+\nu)A(t) \left[\left(\frac{\lambda_2}{1-\rho_2} + \frac{\lambda}{1-\rho} \right) \beta_1^2 \mu_{22} + \left(\frac{\lambda_1}{1-\rho_1} + \frac{\lambda}{1-\rho} \right) \beta_2^2 \mu_{12} - 2 \frac{\lambda^2}{(1-\rho)^2} \mu_{11}^2 \mu_{21}^2 \right] \gamma m^2(t) + \left[\left(\frac{\lambda_1}{1-\rho_1} + \frac{\lambda}{1-\rho} \right) \left(\frac{\lambda_2}{1-\rho_2} + \frac{\lambda}{1-\rho} \right) \mu_{12} \mu_{22} - \frac{\lambda^2}{(1-\rho)^2} \mu_{11}^2 \mu_{21}^2 \right] \gamma^2 m^4(t),$ (12)

根据柯西-施瓦兹不等式可得到 $AC - B^2 > 0$, 又因为 $A < 0$, 所以 $(\hat{q}_1(t), \hat{q}_2(t))$ 是 $\xi(q_1(t), q_2(t))$ 唯一的极大值点, 也是最大值点. 证毕.

定理 2 对于财富过程式(5), 最优投资策略为

$$\pi^*(t) = \frac{(m-r)}{(\sigma^2 + \eta^2 - 2\rho_0\sigma\eta)\gamma e^{r(T-t)}}, \quad (13)$$

当 $\tau = 0$ 时, 最优再保险策略为

$$q_1^*(t) = \frac{\left[\left(\frac{\lambda_1}{1-\rho_1} + \frac{\lambda}{1-\rho} \right) \left(\frac{\lambda_2}{1-\rho_2} + \frac{\lambda}{1-\rho} \right) \mu_{11} \mu_{22} - \frac{\lambda}{1-\rho} \left(\frac{\lambda_2}{1-\rho_2} + \frac{\lambda}{1-\rho} \right) \mu_{11} \mu_{21}^2 \right] \nu}{\left(\frac{\lambda_1}{1-\rho_1} + \frac{\lambda}{1-\rho} \right) \left(\frac{\lambda_2}{1-\rho_2} + \frac{\lambda}{1-\rho} \right) \mu_{12} \mu_{22} - \left(\frac{\lambda}{1-\rho} \right)^2 \mu_{11}^2 \mu_{22}^2} \frac{1}{\gamma e^{r(T-t)}}, \quad (14)$$

$$q_2^*(t) = \frac{\left[\left(\frac{\lambda_1}{1-\rho_1} + \frac{\lambda}{1-\rho} \right) \left(\frac{\lambda_2}{1-\rho_2} + \frac{\lambda}{1-\rho} \right) \mu_{12} \mu_{21} - \frac{\lambda}{1-\rho} \left(\frac{\lambda_1}{1-\rho_1} + \frac{\lambda}{1-\rho} \right) \mu_{21} \mu_{11}^2 \right] \nu}{\left(\frac{\lambda_1}{1-\rho_1} + \frac{\lambda}{1-\rho} \right) \left(\frac{\lambda_2}{1-\rho_2} + \frac{\lambda}{1-\rho} \right) \mu_{12} \mu_{22} - \left(\frac{\lambda}{1-\rho} \right)^2 \mu_{11}^2 \mu_{22}^2} \frac{1}{\gamma e^{r(T-t)}}. \quad (15)$$

最优值函数为

$$F(t, x) = e^{r(T-t)} x + \frac{B(t)}{\gamma},$$

$$H(t, x) = G^2(t, x) + \frac{2[G(t, x) - F(t, x)]}{\gamma}. \quad (18)$$

财富过程的方差为

$$\text{Var}_{t,x}[X_T^u] = \frac{2(n(t) - B(t))}{\gamma^2}.$$

边界条件 $F(T, x) = x, G(T, x) = x$, 依据已有研究成果假设 $F(t, x)$ 和 $G(t, x)$ 分别满足如下式子:

$$F(t, x) = A(t)x + \frac{B(t)}{\gamma}, \quad A(T) = 1, \quad B(T) = 0, \quad (19)$$

$$G(t, x) = m(t)x + \frac{n(t)}{\gamma}, \quad m(T) = 1, \quad n(T) = 0, \quad (20)$$

其中,

$$B(t) = \frac{\gamma [c - (1+\nu)(\alpha_1 + \alpha_2)]}{r} [e^{r(T-t)} - 1] + \kappa_3(T-t), \quad (16)$$

$$n(t) = \frac{\gamma [c - (1+\nu)(\alpha_1 + \alpha_2)]}{r} [e^{r(T-t)} - 1] + \kappa_4(T-t). \quad (17)$$

证明: 由(6)式和验证定理得

$$F(t, x) = V(t, x) = E_{t,x}[X(T, u^*)] - 0.5\gamma \{ [X^2(T, u^*)] - [E_{t,x}(X(T, u^*))]^2 \} = G(t, x) - 0.5\gamma [H(t, x) - G^2(t, x)],$$

因此

$F(t, x)$ 和 $G(t, x)$ 的偏导数为

$$F_t(t, x) = A'(t)x + \frac{B'(t)}{\gamma}, \quad F_x = A(t), \quad F_{xx} = 0, \quad (21)$$

$$G_t(t, x) = m'(t)x + \frac{n'(t)}{\gamma}, \quad G_x = m(t), \quad G_{xx} = 0, \quad (22)$$

把(18)-(22)式代入(7)式, 并化简得

$$A'(t)x + \frac{B'(t)}{\gamma} + (c + rx)A(t) + \sup_{\pi} \{ \xi(\pi(t)) \} + \sup_{q_1, q_2} \{ \xi(q_1(t), q_2(t)) \} = 0, \quad (23)$$

其中 $\xi(q_1(t), q_2(t))$ 满足(9)式, $\xi(\pi(t))$ 为

$$\xi(\pi(t)) = (m - r)\pi(t)A(t) - 0.5\gamma(\sigma^2 + \eta^2 - 2\rho_0\sigma\eta)\pi^2(t)m^2(t), \quad (24)$$

对(24)式关于 $\pi(t)$ 求导并令其为 0, 可得

$$\hat{\pi}(t) = \frac{(m - r)A(t)}{(\sigma^2 + \eta^2 - 2\rho_0\sigma\eta)\gamma m^2(t)}, \quad (25)$$

且令一阶偏导数为 0, 联立(10)式、(11)式可解出最优解

$$\hat{q}_1(t) = \frac{b_2 a_{22} - b_1 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \quad \hat{q}_2(t) = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}. \quad (26)$$

其中,

$$a_{11} = 2\tau\beta_1^2(1 + v)A(t) + \left(\frac{\lambda_1}{1 - \rho_1} + \frac{\lambda}{1 - \rho}\right)\gamma m^2(t)\mu_{12},$$

$$a_{12} = \frac{\lambda}{1 - \rho}\mu_{11}\mu_{21}[2\tau(1 + v)A(t) + \gamma m^2(t)],$$

$$a_{21} = \frac{\lambda}{1 - \rho}\mu_{11}\mu_{21}[2\tau(1 + v)A(t) + \gamma m^2(t)],$$

$$\kappa_1 = \frac{\left[\left(\frac{\lambda_1}{1 - \rho_1} + \frac{\lambda}{1 - \rho}\right)\left(\frac{\lambda_2}{1 - \rho_2} + \frac{\lambda}{1 - \rho}\right)\mu_{11}\mu_{22} - \frac{\lambda}{1 - \rho}\left(\frac{\lambda_2}{1 - \rho_2} + \frac{\lambda}{1 - \rho}\right)\mu_{11}\mu_{21}^2\right]v}{\left(\frac{\lambda_1}{1 - \rho_1} + \frac{\lambda}{1 - \rho}\right)\left(\frac{\lambda_2}{1 - \rho_2} + \frac{\lambda}{1 - \rho}\right)\mu_{12}\mu_{22} - \left(\frac{\lambda}{1 - \rho}\right)^2\mu_{11}^2\mu_{22}^2}, \quad (28)$$

$$\kappa_2 = \frac{\left[\left(\frac{\lambda_1}{1 - \rho_1} + \frac{\lambda}{1 - \rho}\right)\left(\frac{\lambda_2}{1 - \rho_2} + \frac{\lambda}{1 - \rho}\right)\mu_{12}\mu_{21} - \frac{\lambda}{1 - \rho}\left(\frac{\lambda_1}{1 - \rho_1} + \frac{\lambda}{1 - \rho}\right)\mu_{21}\mu_{11}^2\right]v}{\left(\frac{\lambda_1}{1 - \rho_1} + \frac{\lambda}{1 - \rho}\right)\left(\frac{\lambda_2}{1 - \rho_2} + \frac{\lambda}{1 - \rho}\right)\mu_{12}\mu_{22} - \left(\frac{\lambda}{1 - \rho}\right)^2\mu_{11}^2\mu_{22}^2}, \quad (29)$$

把(25)式和(27)式代入(23)式, 可得

$$[A'(t) + rA(t)]x + \frac{B'(t)}{\gamma} + [c - (1 + v)(\alpha_1 + \alpha_2)]A(t) + \kappa_3 \frac{A^2(t)}{m^2(t)} = 0. \quad (30)$$

其中

$$\kappa_3 = -\frac{(m - r)^2}{2\gamma(\sigma^2 + \eta^2 - 2\rho_0\sigma\eta)} + v(\kappa_1\alpha_1 + \kappa_2\alpha_2) - \frac{\gamma}{2}\left(\frac{\lambda_1}{1 - \rho_1} + \frac{\lambda}{1 - \rho}\right)\mu_{12}\kappa_1^2 - \frac{\gamma}{2}\left(\frac{\lambda_2}{1 - \rho_2} + \frac{\lambda}{1 - \rho}\right)\mu_{22}\kappa_2^2 - \frac{\lambda}{1 - \rho}\gamma\mu_{12}\mu_{21}\kappa_1\kappa_2, \quad (31)$$

由(30)式可得

$$A'(t) + rA(t) = 0, A(T) = 1, \quad (32)$$

$$\frac{B'(t)}{\gamma} + [c - (1 + v)(\alpha_1 + \alpha_2)]A(t) + \kappa_3 \frac{A^2(t)}{m^2(t)} = 0, B(T) = 0. \quad (33)$$

把(25)和(27)式代入(8)式, 可得

$$a_{22} = 2\tau\beta_2^2(1 + v)A(t) + \left(\frac{\lambda_2}{1 - \rho_2} + \frac{\lambda}{1 - \rho}\right)\gamma m^2(t)\mu_{22},$$

$$b_1 = -2\tau(1 + v)A(t)\left[\beta_1^2 + \frac{\lambda}{1 - \rho}\mu_{11}\mu_{21}\right] +$$

$$v\left(\frac{\lambda_1}{1 - \rho_1} + \frac{\lambda}{1 - \rho}\right)\mu_{11}A(t),$$

$$b_2 = -2\tau(1 + v)A(t)\left[\beta_2^2 + \frac{\lambda}{1 - \rho}\mu_{11}\mu_{21}\right] +$$

$$v\left(\frac{\lambda_2}{1 - \rho_2} + \frac{\lambda}{1 - \rho}\right)\mu_{21}A(t).$$

为了简化文章的篇幅, 下面主要研究 $\tau = 0$ 的情形.

当 $\tau = 0$ 时, 再保费率(3)式退化成为期望值保费原理, (26)式退化为

$$\hat{q}_1(t) = \kappa_1 \frac{A(t)}{\gamma m^2(t)}, \hat{q}_2(t) = \kappa_2 \frac{A(t)}{\gamma m^2(t)}, \quad (27)$$

其中

$$[m'(t) + rm(t)]x + \frac{n'(t)}{\gamma} + [c - (1 + v)(\alpha_1 + \alpha_2)]A(t) + \kappa_4 \frac{A(t)}{m(t)} = 0, \quad (34)$$

其中

$$\kappa_4 = -\frac{(m - r)^2}{\gamma(\sigma^2 + \eta^2 - 2\rho_0\sigma\eta)} + v(\kappa_1\alpha_1 + \kappa_2\alpha_2), \quad (35)$$

由(34)式可得

$$m'(t) + rm(t) = 0, m(T) = 1, \quad (36)$$

$$\frac{n'(t)}{\gamma} + [c - (1 + v)(\alpha_1 + \alpha_2)]A(t) + \kappa_4 \frac{A(t)}{m(t)} = 0, n(T) = 0. \quad (37)$$

求解(32)和(36)式可得

$$A(t) = m(t) = e^{r(T-t)}. \quad (38)$$

把(38)式分别代入(25)式和(27)式可得到(13)-(15)式.

把(32)式分别代入 $B(T) = 0$ 和 $n(T) = 0$, 可得(16)式、(17)式.

最优值函数为

$$F(t, x) = e^{r(T-t)}x + \frac{B(t)}{\gamma},$$

财富过程的方差为

$$\text{Var}_{t,x}[X_T^u] = \frac{2(n(t) - B(t))}{\gamma^2}.$$

其中, $B(t)$ 和 $n(t)$ 分别为(16)式, (17)式所示.

定理 2 证明完毕.

注 5 当 $v = 0$ 时, 再保费率(3)式退化变成方差保费原则, 最优再保险策略的求解过程与 $\tau = 0$ 的情形相似, 文章篇幅有限, 因此本文不再一一证明.

4 数值分析

在上节中, 我们从理论上推导出了复合 Poisson-Geometric 风险模型的最优再保险-投资策略的表达式. 在本节中, 主要是分析模型参数对最优再保险-投资策略的影响, 并讨论其经济意义.

4.1 模型参数对最优再保险策略的影响

最优再保险策略 $q_1^*(t), q_2^*(t)$ 的表达式均含有复合 Poisson-Geometric 分布的参数以及两类索赔的一阶矩、二阶矩, 说明最优再保险策略跟索赔计数过程的分布有关. 本文假设两类保险业务理赔额大小分别服从参数为 1 和 2 的指数分布, 可得出 $\mu_{11} = 1, \mu_{12} = 2, \mu_{21} = 0.5, \mu_{22} = 0.5$. 为了便于数值模拟, 此部分参数取值参考慕蕊等^[12]、杨鹏^[19]等, 给出如下的参数值, 利用 MATLAB 软件分析(14)式、(15)式, 结果如图 1~6 所示.

设 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 4, \rho_1 = 0.15, \rho_2 = 0.2, r = 0.05, T = 10, t = 5, \gamma = 0.1, v = 0.1, \lambda \in [2, 8]$, 图 1-2 分别给出了 λ 和 ρ 对最优再保险策略 $q_1^*(t), q_2^*(t)$ 的影响. 从图 1-2 可以看出最优再保险策略 $q_1^*(t), q_2^*(t)$ 是期望理赔次数 λ 的减函数, 偏离系数 ρ 的减函数, 说明两类索赔相依性的索赔计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 参数 λ, ρ 越大, 保险公司自留额越少, 增加购买再保险比例, 把更多的理赔风险转移到再保险公司, 自身承担的风险就减小, 符合购买再保险的意图.

设 $\lambda = 4, \lambda_2 = 3, \rho = 0.15, \rho_2 = 0.2, r = 0.05, T = 10, t = 5, \gamma = 0.1, v = 0.1, \lambda_1 \in [2, 8]$, 图 3-4 分别给出了 λ_1 和 ρ_1 对 $q_1^*(t), q_2^*(t)$ 的影响. 从图 3 可以看出最优再保险策略 $q_1^*(t)$ 是期望理赔次数 λ_1 的增函数, 偏离系数 ρ_1 的增函数, 从图 4 可以看出最优再保险策略 $q_2^*(t)$ 是期望理赔次数 λ_1 的减函数, 偏离系数 ρ_1 的减函数. 说明当第一类保险业务索赔计数过程的

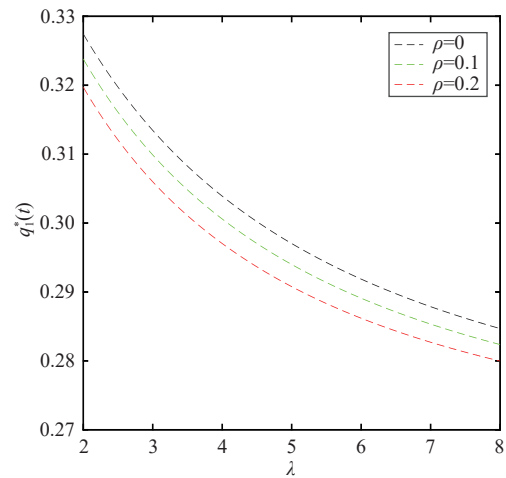


图 1 λ 和 ρ 对 $q_1^*(t)$ 的影响

Fig. 1 The influence of λ and ρ on $q_1^*(t)$

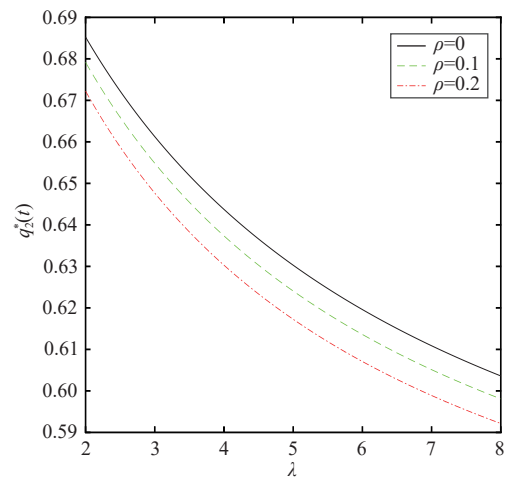


图 2 λ 和 ρ 对 $q_2^*(t)$ 的影响

Fig. 2 The influence of λ and ρ on $q_2^*(t)$

参数 λ_1 和 ρ_1 越大时, 保险公司第一类保险业务自留额比例增加, 第二类保险业务自留额比例减少, 把第一类保险业务的风险转移到自身, 第二类保险业务的风险转移给再保险公司. 参考文献[25], 考虑保险公司与再保险公司的竞争性, 这种结果也是符合经济规律的.

设 $\lambda = 4, \lambda_1 = 3, \rho = 0.15, \rho_1 = 0.2, r = 0.05, T = 10, t = 5, \gamma = 0.1, v = 0.1, \lambda_2 \in [2, 8]$, 图 5-6 分别给出了 λ_2 和 ρ_2 对 $q_1^*(t), q_2^*(t)$ 的影响. 从图 5 可以看出最优再保险策略 $q_1^*(t)$ 是期望理赔次数 λ_2 的减函数, 偏离系数 ρ_2 的增函数, 从图 6 可以看出最优再保险策略 $q_2^*(t)$ 是期望理赔次数 λ_2 的增函数, 偏离系数 ρ_2 的增函数. 说明当第二类保险业务索赔计数过程的参数 λ_2 和 ρ_2 越大时, 第一类保险业务自留额比例减少, 保险公司第二类保险业务自留额比例增加, 第一类保险业务的风险转移给再保险公司, 把第二类

保险业务的风险转移到自身.参考文献[25],考虑
保险公司与再保险公司的竞争性,这种结果也是符
合经济规律的.

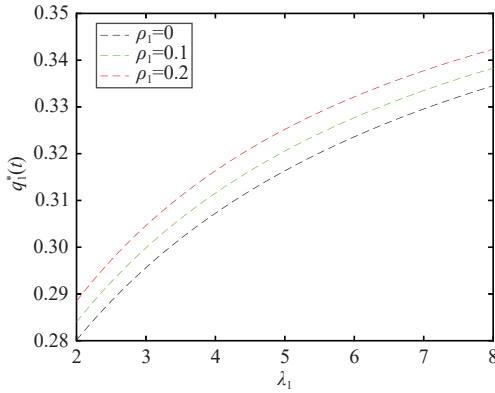


图 3 λ_1 和 ρ_1 对 $q_1^*(t)$ 的影响

Fig. 3 The influence of λ_1 and ρ_1 on $q_1^*(t)$

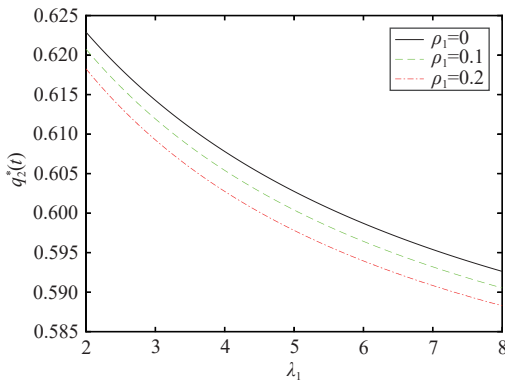


图 4 λ_1 和 ρ_1 对 $q_2^*(t)$ 的影响

Fig. 4 The influence of λ_1 and ρ_1 on $q_2^*(t)$

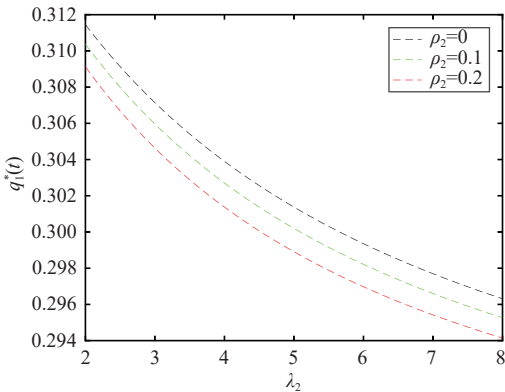


图 5 λ_2 和 ρ_2 对 $q_1^*(t)$ 的影响.

Fig. 5 The influence of λ_1 and ρ_2 on $q_1^*(t)$

4.2 模型参数对最优投资策略的影响

从(13)式可以发现最优再投资策略的解析解
不含有索赔计数过程的参数,因此下面主要研究通
货膨胀的参数、风险资产平均收益率和风险厌恶系
数对最优投资策略 $\pi^*(t)$ 产生的影响.为了更好的
得到数值模拟,我们参考杨鹏^[9]、YANG^[24]等,结合保

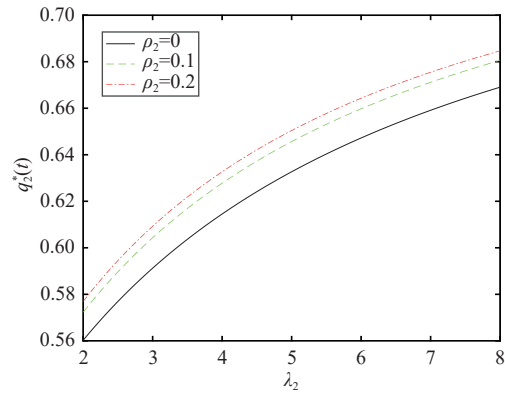


图 6 λ_2 和 ρ_2 对 $q_2^*(t)$ 的影响.

Fig. 6 The influence of λ_2 and ρ_2 on $q_2^*(t)$

险公司的实际情况,且除特别说明外,将基本参数
设置为 $\eta = 0.2, \gamma = 0.1, r = 0.05, T = 12, \rho_0 = 0.1,$
 $\mu = 0.05, \sigma = 0.2, \varepsilon = 0.02, t = 5$.根据(13)式,利用
MATLAB软件分析可得出图7-图10的结果.

从图7可知,最优投资策略 $\pi^*(t)$ 是风险资产平
均收益率 μ 的增函数,即 μ 越大,从风险资产获取
的收益就越大,此时保险公司将增加风险资产的投资
金额.从图8可知,最优投资策略 $\pi^*(t)$ 关于风险厌
恶系数 γ 是呈递减趋势的,即 γ 越大,保险公司为了
降低风险,将减少风险投资金额,增大无风险投资
金额.从图7和图8可知,最优投资策略 $\pi^*(t)$ 关于
时间 t 是递增的,即随着时间的增加,保险公司已经
掌握好风险投资的规律,而风险投资的收益率大于
无风险投资的收益率,所以此时保险人会选择加大
风险投资金额,以便获取更大的收益.

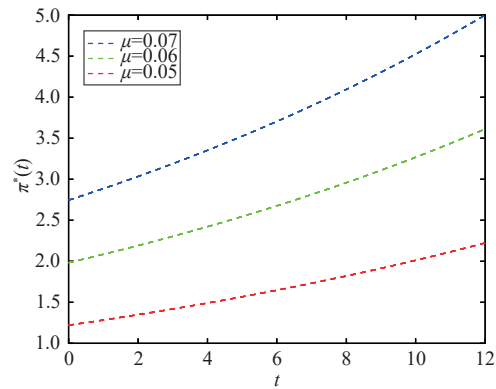
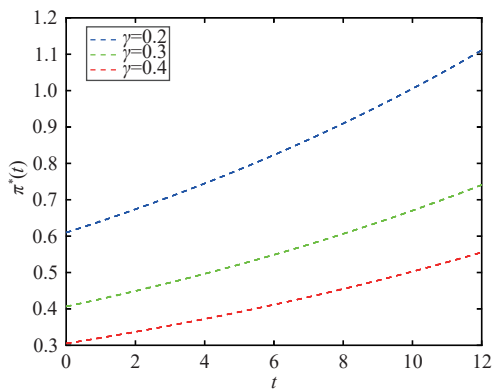


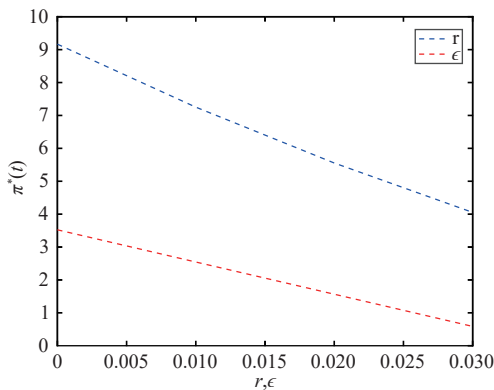
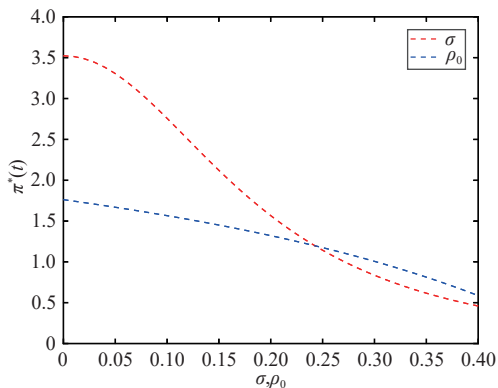
图 7 μ 对 $\pi^*(t)$ 的影响

Fig. 7 The influence of μ on $\pi^*(t)$

从图9可知,最优风险投资策略 $\pi^*(t)$ 关于 ε 和
 r 是递减的,即通货膨胀率的预期增长率 ε 越大,说
明货币贬值得越快,因为通货膨胀对风险投资有影
响,所以保险公司可以减少风险资产的投资,同时
增大无风险资产的投资.若无风险资产收益率 r 越

图 8 γ 对 $\pi^*(t)$ 的影响Fig. 8 The influence of γ on $\pi^*(t)$

大, 从无风险资产获得的收益就越大, 从而投资在无风险资产的金额就更多, 相应地在风险资产的比例就减少. 从图 10 可知, 最优风险投资策略 $\pi^*(t)$ 是 ρ_0 和 σ 的减函数, 即风险资产和通货膨胀间相关系数 ρ_0 越大, 说明受到通货膨胀的影响就会更大, 所以保险公司选择加大风险投资比例, 避免遭受通货膨胀的影响. 风险资产波动率 σ 越大, 面临的风险就越大, 从而减少风险资产的投资金额, 增大无风险资产的投资金额.

图 9 r 和 ε 对 $\pi^*(t)$ 的影响Fig. 9 The influence of r and ε on $\pi^*(t)$ 图 10 σ 和 ρ_0 对 $\pi^*(t)$ 的影响Fig. 10 The influence of σ and ρ_0 on $\pi^*(t)$

5 结束语

本文基于 Poisson-Geometric 风险模型, 研究了索赔相依时间一致的最优投资-再保险策略问题. 为了更贴合经济风险实际, 假设了保险公司通过购买两种比例再保险分摊风险, 依据期望-方差原理计算再保费率, 且风险投资价格受到通货膨胀的影响. 考虑收益最大化风险最小化原则, 应用了随机动态规划原理建立与之对应的 HJB 方程, 推导得出了时间一致的最优再保险-投资策略和值函数的解析解. 最后借助数值实验讨论了模型主要参数对最优再保险-投资策略产生的影响, 并分析其经济意义. 实验结果表明: 最优再保险策略随相依期望索赔次数、索赔次数偏离程度的增大而减小; 两类具有相依性的理赔业务中, 再保险策略随着索赔次数、索赔次数偏离程度的增加采取相反策略. 最优投资策略随通货膨胀率、无风险资产收益率、风险资产波动率的增大而减小. 后期还有许多问题待解决, 比如: (1) 在 Poisson-Geometric 风险模型中考虑风险资产价格服从 CEV 模型、Heston 模型等; (2) 再保险方式可以考虑超额损失再保险、联合比例-超额损失再保险等; (3) 在投资上考虑保险公司与再保险公司存在竞争关系等等, 这些将是以后研究的问题.

参 考 文 献

- [1] LIANG X, LIANG Z, YOUNG V R. Optimal reinsurance under the mean-variance premium principle to minimize the probability of ruin [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2020, 92: 128-146.
- [2] CHEN Z, YANG P. Robust optimal reinsurance-investment strategy with price jumps and correlated claims [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2020, 92: 27-46.
- [3] WANG Y, RONG X, ZHAO H. Optimal investment strategies for an insurer and a reinsurer with a jump diffusion risk process under the CEV model [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2018, 328: 414-431.
- [4] ZENG Y, LI Z. Optimal time-consistent investment and reinsurance policies for mean-variance insurers [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2011, 49(1): 145-154.
- [5] LI D, RONG X, ZHAO H. Time-consistent reinsurance-investment strategy for an insurer and a reinsurer with mean-variance criterion under the CEV model [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2015, 283:

- 142-162.
- [6] YI H, SHAN Y, SHU H, et al. Optimal mean-variance investment and reinsurance strategies with a general Lévy process risk model [J]. *Systems Science & Control Engineering*, 2024, 12: 2306831.
- [7] 季鲲鹏, 彭幸春. 考虑通胀风险与最低绩效保障的损失厌恶型保险公司的最优投资与再保险策略[J]. *数学物理学报*, 2022, 42(4): 1265-1280.
- [8] 杨鹏. 模糊厌恶视角下具有通货膨胀影响的鲁棒最优再保险和投资[J]. *系统科学与数学*, 2024, 44(1): 164-178.
- [9] 杨鹏. 具有索赔相依的最优再保险与投资策略[J]. *系统科学与数学*, 2022, 42(6): 1566-1579.
- [10] YUEN K C, LIANG Z, ZHOU M. Optimal proportional reinsurance with common shock dependence [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2015, 64: 1-13.
- [11] GUAN G, LIANG Z. Robust optimal reinsurance and investment strategies for an AAI with multiple risks [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2019, 89: 63-78.
- [12] 慕蕊, 马世霞, 张欣茹. 相依风险模型下保险公司和再保险公司的鲁棒最优再保险和投资策略[J]. *工程数学学报*, 2024, 41(2): 245-265.
- [13] ZHANG Q, WU L. Robust optimal proportional reinsurance and investment problem for an insurer with delay and dependent risks [J]. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 2024, 53(1): 34-65.
- [14] 毛泽春, 刘锦萼. 索赔次数为复合 Poisson-Geometric 过程的风险模型及破产概率[J]. *应用数学学报*, 2005, 28(3): 419-428.
- [15] 覃利华, 黄鸿君. 复合 Poisson-Geometric 风险下带投资和混合保费收取的生存概率[J]. *贵州师范大学学报(自然科学版)*, 2025, 43(5): 115-121.
- [16] 黄鸿君, 覃利华. 带混合保费和投资复合 Poisson-Geometric 风险模型的生存概率[J]. *海南师范大学学报(自然科学版)*, 2022, 35(3): 260-267.
- [17] 林祥, 李娜. 索赔次数为复合 Poisson-Geometric 过程下的破产概率和最优投资和再保险策略[J]. *应用数学*, 2011, 24(1): 174-180.
- [18] 杨鹏, 林祥, 王献锋. 复合 Poisson-Geometric 风险过程下最优再保险-投资组合选择[J]. *应用数学学报*, 2015, 38(1): 174-182.
- [19] 杨鹏, 杨志江, 孔祥鑫. Poisson-Geometric 模型下时间一致的最优再保险-投资策略选择[J]. *应用数学*, 2019, 32(4): 729-738.
- [20] 孙宗岐, 陈志平. 复合 Poisson-Geometric 风险下保险公司的最优投资-再保-混合分红策略[J]. *工程数学学报*, 2016, 33(5): 463-479.
- [21] 孙宗岐, 杨鹏, 吴静, 等. 复合 P-G 风险下最优投资组合-便宜再保-阈值分红问题[J]. *西南大学学报(自然科学版)*, 2022, 44(7): 96-105.
- [22] BJORK T, MURGOCI A. A general theory of Markovian time inconsistent stochastic control problems [J]. *SSRN Electronic Journal*, 2010, 17(9): 27-37.
- [23] BJÖRK T, MURGOCI A, ZHOU X Y. Mean-variance portfolio optimization with state-dependent risk aversion [J]. *Mathematical Finance*, 2014, 24(1): 1-24.
- [24] YANG P. Time-consistent mean-variance reinsurance-investment in a jump-diffusion financial market [J]. *Optimization*, 2017, 66(5): 737-758.
- [25] 杨鹏. 两类相依保险业务下基于竞争的最优再保险策略[J]. *应用数学学报*, 2023, 46(3): 412-426.

(责编&校对 雷建云)